Michel VAQUIE
Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR 5219,
Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex 9
tél : 05 61 55 76 61
courriel : michel.vaquie@math.univ-toulouse.fr
grade : CR1
numéro d'agent : 00029394
Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

J'ai effectué mon activité de recherche essentiellement au sein de l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Quand je suis arrivé dans cette unité en 2003 je travaillais en théorie des singularités en géométrie algébrique et plus précisément sur la théorie des valuations. Depuis 2005 je me suis intéressé à la théorie des champs algébriques et à la géométrie algébrique homotopique, j'ai entamé une collaboration avec Bertrand Toën, qui était alors à Toulouse, collaboration qui se poursuit, même après son départ pour Montpellier.

En lien avec ce nouveau domaine de recherche je me suis intéressé à d'autres parties des mathématiques, surtout la logique, la théorie des catégories et la topologie algébrique et plus particulièrement la théorie de l'homotopie.

Ce travail se fait en collaboration au sein de l'Institut de Mathématiques de Toulouse avec essentiellement Denis-Charles Cisinski et Joseph Tapia, en particulier nous avons poursuivi l'organisation du séminaire hebdomadaire *Champs et homotopie en géométrie algébrique*, qui réunit les membres de l'équipe de géométrie algébrique de l'Institut. Ce séminaire fonctionne sous le mode de *groupe de travail* dans lequel nous exposons et cherchons à faire avancer des travaux de recherches directement liés à notre activité (géométrie algébrique homotopique et dérivée, théorie homotopique des *dg*-catégories et des catégories enrichies, théorie de l'homotopie, théorie des motifs, K-théorie).

J'ai aussi commencé à m'intéresser à la théorie des opérades, profitant de la présence d'Emily Burgunder et de Joan Milles recrutés récemment à Toulouse.

Principaux Résultats :

I Géométrie algébrique homotopique (travail en collaboration avec Bertrand Toën, Institut de Mathématiques de Toulouse, et Gabriele Vezzosi, Université de Florence)

Nous avons commencé un travail dont le but est de construire des *versions quantiques* de nombreux espaces de modules, et pour cela nous avons étudié la *quantification* dans le cadre de *géométrie algébrique dérivée.*

Pour cela nous montrons l'existence de structures géométriques additionnelles du type *formes symplectiques* ou *de Poisson* sur ces espaces dans le but de pouvoir ensuite appliquer une *quantification par déformation.*

Dans un premier travail, en collaboration avec Tony Pantev, University of Pennsylvania, nous avons étudié les structures symplectiques en introduisant la notion de *structures symplectiques décalées de degré* n où $n \in \mathbb{Z}$ est un entier arbitraire.

C'est une généralisation de la notion de structure symplectique sur une variété algébriques lisses dans le cas $n = 0$.

Dans le cas classique une forme symplectique sur X, où X est un schéma lisse sur k, est la donnée d'une 2-forme fermée $\omega \in H^0(X, \Omega^{2,cl}_{X/k})$ qui est non-dégénérée, c'est-à-dire qui induit un isomorphisme $\Theta_\omega : \mathbb{T}_{X/k} \simeq \Omega^1_{X/k}$ entre les fibrés tangents et cotangents.

Pour X un champ dérivé d'Artin au sens de HAG-II les 1-formes différentielles sont définies de façon naturelle comme les sections d'un complexe quasi-cohérent $\mathbb{L}_{X/k}$ appelé le *complexe cotangent* et les p-formes apparaissent alors comme les sections du complexe $\wedge^p \mathbb{L}_{X/k}$, plus généralement les éléments du groupe d'hyper cohomologie $H^n(X, \wedge^p \mathbb{L}_{X/k})$ sont appelés les *p-formes de degré* n sur X.

La première difficulté est de définir la notion de formes *fermées.* l'idée est de considérer les p-formes comme des fonctions sur le champ dérivé des lacets $\mathcal{L}X$ de X au moyen d'*un théorème du type HKR* et d'interpréter le propriété d'être fermée comme la condition d'être S^1-équivariant. Mais comme nous travaillons dans le cadre homotopique il apparaît que le fait d'être fermée n'est pas une condition sur la forme mais une structure supplémentaire.

Pour cela nous avons besoin de rappeler quelques constructions sur les *complexes mixtes gradués au dessus de* k, c'est-à-dire les complexes munis d'une structure de $k[\epsilon]$-module, où ϵ est en degré -1 et vérifie $\epsilon^2 = 0$, avec une graduation compatible. On peut aussi considérer ces complexes comme des dg-comodules au dessus de la dg-algèbre de Hopf commutative $B_\epsilon := H^*(\mathbb{G}_m \ltimes B\mathbb{G}_a, \mathcal{O})$

Si E est complexe mixte gradué, nous pouvons définir son *complexe d'homologie cyclique négative pondéré* $NC^w(E)$, qui est un complexe gradué de k-modules. Nous obtenons ainsi un foncteur $NC^w : \epsilon - dg_k^{gr} \longrightarrow dg_k^{gr}$, de plus pour tout E nous avons un morphisme naturel $NC^w(E) \to E$ dans dg_k^{gr}.

Nous sommes amenés à définir d'abord les notions de p-formes fermées et de structures symplectiques n-décalées *localement*, c'est-à-dire pour une algèbre commutative différentielle graduée négativement A.

Nous formons l'algèbre de de Rham de $A \in cdga_k^{\leq 0}$ sur k

$$DR(A/k) := Sym_A(\Omega^1_{A/k}[1]) \simeq \oplus_p \Omega^p_{A/k}[p] \ .$$

La différentielle de de Rham $\epsilon := d_{DR} : \Omega^p_{A/k} \to \Omega^{p+1}_{A/k}$ la munit d'une structure de *complexe mixte gradué au dessus de* k.

Nous obtenons ainsi un foncteur $DR(-/k) : cdga_k^{\leq 0} \longrightarrow \epsilon - dg_k^{gr}$, et par construction le complexe sous-jacent à $DR(A/k)$ est $\oplus_p(\wedge^p_A \mathbb{L}_{A/k})[p]$, où $\mathbb{L}_{A/k}$ est le complexe cotangent.

Par définition le *complexe d'homologie cyclique négative pondéré* de A au dessus de k est $NC^w(A/k) := NC^w(DR(A/k))$, et nous avons des morphismes naturels de complexes $NC^w(A/k)(p) \longrightarrow \wedge^p_A \mathbb{L}_{A/k}[p]$.

Pour tout complexe de k-modules E nous notons $|E|$ l'ensemble simplicial obtenu par la correspondance de Dold-Kan, $|E| \simeq Map_{dg_k}(k, E)$. Alors pour $A \in cdga_k^{\leq 0}$, et deux entiers $p \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous posons

$$\mathcal{A}^p_k(A, n) := | \wedge^p_A \mathbb{L}_{A/k}[n]|$$
$$\mathcal{A}^{p,cl}_k(A, n) := |NC^w(A/k)[n-p](p)|.$$

Cela définit deux foncteurs $\mathcal{A}^p_k(-, n)$ et $\mathcal{A}^{p,cl}_k(-, n)$ de $cdga_k^{\leq 0}$ dans $\mathbb{S}$ et une transformation naturelle $\mathcal{A}^{p,cl}_k(-, n) \longrightarrow \mathcal{A}^p_k(-, n)$.

Définition : Pour $A \in cdga_k^{\leq 0}$, l'ensemble simplicial $\mathcal{A}^p_k(A, n)$ (resp. $\mathcal{A}^{p,cl}_k(A, n)$) est appelé l'*espace des p-formes de degré n sur le champ dérivé A relativement à k* (resp. l'*espace des p-formes fermées de degré n sur le champ dérivé A relativement à k*).

L'espace $\mathcal{A}^{p,cl}_k(A, n)$ des p-formes fermées de degré n sur A n'est pas un sous-espace plein, c'est-à-dire n'est pas une réunion de composantes connexes de $\mathcal{A}^p_k(A, n)$. La fibre homotopique $K(w)$ de $\mathcal{A}^{p,cl}_k(A, n) \longrightarrow \mathcal{A}^p_k(A, n)$ au dessus d'un point $w \in \mathcal{A}^p_k(A, n)$ peut être un espace compliqué, c'est l'espace des données nécessaires pour *rendre fermée* la forme w et nous l'appelons l'espace des *clés* de w.

Proposition : Les foncteurs $\mathcal{A}^p_k(-, n)$ et $\mathcal{A}^{p,cl}_k(-, n)$ définissent des pré-champs dérivés qui sont des champs dérivés pour la topologie étale.

Grâce à cette proposition nous pouvons alors globaliser les définitions précédentes.

Définition : Soient $F \in dSt_k$ un champ dérivé au dessus de k, p et n deux entiers avec $p \geq 0$.

L'*espace des p-formes, relativement à k, de degré n sur F* est défini par

$$\mathcal{A}^p_k(F) := Map_{dSt_k}(F, \mathcal{A}^p_k(-, n)) .$$

L'*espace des p-formes fermées, relativement à k, de degré n sur F* est défini par

$$\mathcal{A}^{p,cl}_k(F) := Map_{dSt_k}(F, \mathcal{A}^{p,cl}_k(-, n)) .$$

Alors que l'espace des p-formes fermées sur un champ dérivé F est en général compliqué, dans le cas où F est un champ d'Artin dérivé l'espace des p-formes a la description, prévisible, suivante,

$$\mathcal{A}_k^p(F,n) \simeq Map_{L_{qcoh}(F)}(\mathcal{O}_F, \wedge^p \mathbb{L}_{F/k}[n]) \ ,$$

où $\mathbb{L}_{F/k} \in L_{qcoh}(F)$ est le complexe cotangent relativement à k.

Nous pouvons maintenant définir l'espace des *structures symplectiques n-décalées* sur un champ d'Artin dérivé F. Si F est un champ d'Artin dérivé le complexe cotangent $\mathbb{L}_{F/k}$ est un complexe parfait, donc dualisable et nous notons $\mathbb{T}_{F/k}$ son dual, le complexe tangent. Alors toute 2-forme ω de degré n sur F induit un morphisme de complexes quasi-cohérents

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow (\wedge^2_{\mathcal{O}_F} \mathbb{L}_{F/k})[n] \ ,$$

par dualité et adjonction nous en déduisons un morphisme dans $L_{qcoh}(F)$

$$\Theta_\omega : \mathbb{T}_{F/k} \longrightarrow \mathbb{L}_{F/k}[n] \ .$$

Nous pouvons alors définir les structurs symplectiques pour un champ.

Définition : Soient F un champ d'Artin dérivé et $n \in \mathbb{Z}$.

1. Une 2-forme $\omega \in \mathcal{A}_k^2(F,n)$ est *non-dégénée* si le morphisme Θ_ω est un isomorphisme dans $D_{qcoh}(F)$.
   On note $\mathcal{A}_k^2(F,n)^{nd}$ le sous-espace plein de $\mathcal{A}_k^2(F,n)$ formé par l'union des composantes connexes des 2-formes non-dégénérées de degré n sur F.
2. L'*espace des structures symplectiques n-décalées sur F (relativement à k)*, $\mathbb{S}ymp_k(F,n)$ est défini par le produit fibré homotopique suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}ymp_k(F,n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_k^{2,cl}(F,n) \arrow[d] \\
\mathcal{A}_k^2(F,n)^{nd} \arrow[r] & \mathcal{A}_k^2(F,n).
\end{tikzcd}$$

   Par définition, $\mathbb{S}ymp_k(F,n)$ est le sous-espace plein de $\mathcal{A}_k^{2,cl}(F,n)$ défini par une unique condition sur les 2-formes sous-jacentes.

Comme le complexe cotangent d'un champ d'Artin dérivé F est parfait il existe un unique entier n tel que l'espace $\mathbb{S}ymp_k(F,n)$ puisse être non vide. Nous retrouvons bien sur la notion usuelle de forme symplectique pour un schéma lisse sur k avec $n = 0$.

Nous avons ensuite démontré trois résultats d'existence de structure symplectiques.

Le premier exemple est celui du champ classifiant BG d'un groupe affine réductif G, que nous pouvons munir d'une structure symplectique 2-décalée. La 2-forme sous-jacente est donnée l'unique forme quadratique G-invariante

$$\mathfrak{g}[1] \wedge \mathfrak{g}[1] \simeq Sym^2(\mathfrak{g})[2] \longrightarrow k[2],$$

où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G sur k.
Théorème : Le champ dérivé $\mathbb{R}\mathbf{Parf}$ des complexes parfaits de faisceaux quasi-cohérents est équipé d'une forme symplectique 2-décalée naturelle.

Ce résultat est lié au résultat précédent car nous avons une immersion ouverte canonique $B\mathrm{GL}_n \subset \mathbb{R}\mathbf{Parf}$, qui envoie un fibré vectoriel sur le complexe sous-jacent concentré en degré 0, la forme symplectique 2-décalée sur sur $B\mathrm{GL}_n$ est alors la restriction de celle sur $\mathbb{R}\mathbf{Parf}$.

Le deuxième théorème permet de transférer une structure symplectique définie sur un champ d'Artin dérivé donné F sur le champ dérivé $\mathbf{Map}(X, F)$ sous certaine condition d'*orientabilité* sur X.

Nous définissons d'abord la notion de champ dérivé $\mathcal{O}$-compact, c'est une condition de finitude qui assure que pour un champ dérivé $\mathcal{O}$-compact X et pour un champ dérivé il existe un morphisme de complexes gradués

$$\kappa_{F,X} : NC^w(F \times X) \longrightarrow NC^w(F) \otimes_k C(X, \mathcal{O}_X),$$

fonctoriel en F, où $C(X, \mathcal{O}_X)$ est consideré pur de poids 0.

Nous définissons pour un champ dérivé $\mathcal{O}$-compact X la notion de *$\mathcal{O}$-orientation de degré d* comme un morphisme de complexes

$$[X] : C(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow k[-d] \ ,$$

vérifiant certaine propriété. L'existence de cette $\mathcal{O}$-orientation de degré d signifie essentiellement que $D_{qcoh}(X)$ satisfait la condition de Calabi-Yau en dimension d.

Le second théorème d'existence peut être vu comme une version algébrique du *formalisme AKSZ* étendu au cadre des champs dérivés.

Théorème : Soient F un champ d'Artin dérivé muni d'une forme symplectique n-décalée ω et X un champ dérivé $\mathcal{O}$-compact equipé d'une $\mathcal{O}$-orientation de degré d, alors le champ dérivé $\mathbf{Map}(X, F)$ est muni d'une structure symplectique $n-d$-décalée canonique.

L'idée est d'utiliser le morphisme d'évaluation

$$X \times \mathbf{Map}(X, F) \longrightarrow F \ ,$$

de prendre l'image inverse de la forme symplectique sur F pour en déduire une 2-forme de degré n sur $X \times \mathbf{Map}(X, F)$. Nous *intégrons* alors cette forme le long de X en utilisant la $\mathcal{O}$-orientation pour obtenir une 2-forme fermée de degré $n-d$ sur $\mathbf{Map}(X, F)$.

Notre troisième résultat d'existence concerne les intersections symplectiques. Pour cela nous introduisons la notion de *structure Lagrangienne* sur un morphisme $L \longrightarrow X$, où X est equippé d'une forme symplectique n-décalée, c'est la généralisation de la notion de sous-variété Lagrangienne, plus précisément une immersion fermée $L \hookrightarrow X$ de schémas lisses possède une structure Lagrangienne si et seulement si L est une sous-variété Lagrangienne de X dans le sens usuel.

Théorème : Soit X un champ d'Artin dérivé muni d'une forme symplectique n-décalée ω et soit

$$L \longrightarrow X\,, \qquad L' \longrightarrow X$$

deux morphismes de champs d'Artin dérivés munis de structures Lagrangiennes. Alors le produit fibré homotopique $L \times^h_X L'$ est muni d'une forme symplectique $n-1$-décalée naturelle.

Comme corollaire nous en déduisons que l'intersection dérivée de deux sous-variétés lisses Lagrangiennes $L, L' \subset X$ dans une variété symplectique X est munie naturellement d'une structure symplectique -1-décalée.

Il est à noter que ces théorèmes utilisent de façon cruciale le fait que nous travaillons dans le cadre de la géométrie dérivée, et les résultats sont faux dans le cadre non dérivé.

Grâce aux théorèmes d'existence précédents nous pouvons trouver de nombreuses classes d'exemples de structures symplectiques décalées. Soit Y est un schéma, ou plus généralement un champ de Deligne-Mumford, lisse et propre de dimension d.

1. Le choix d'une classe fondamentale $[Y] \in H^{2d}_{DR}(Y, \mathcal{O})$ dans la cohomologie de de Rham détermine canoniquement une forme symplectique $2(d-1)$-décalée sur le champ dérivé

   $$\mathbb{R}\mathbf{Parf}_{DR}(Y) := \mathbf{Map}(Y_{DR}, \mathbb{R}\mathbf{Parf})$$

   des complexes parfaits à connexion plate sur Y.
2. Le choix d'une classe fondamentale $[Y] \in H^{2d}_{Dol}(Y, \mathcal{O})$ dans la cohomologie de Dolbeault détermine canoniquement une forme symplectique $2(d-1)$-décalée sur le champ dérivé

   $$\mathbb{R}\mathbf{Parf}_{Dol}(Y) := \mathbf{Map}(Y_{Dol}, \mathbb{R}\mathbf{Parf})$$

   des complexes parfaits de Higgs sur Y.
3. Le choix d'une trivialisation $\omega_{Y/k} \simeq \mathcal{O}_Y$, quand elle existe, détermine canoniquement une forme symplectique $(2-d)$-décalée sur le champ dérivé

   $$\mathbb{R}\mathbf{Parf}(Y) := \mathbf{Map}(Y, \mathbb{R}\mathbf{Parf})$$

   des complexes parfaits sur Y.

Nous avons écrit un article contenant les résulats précédents, qui est disponible sur le serveur arXiv : arxiv.org/pdf/1111.3209

Toujours dans le but d'étudier la quantification par déformation dans le cadre de la géométrie dérivée, nous avons commencé un travail sur les structures de Poisson. Dans ce cas des difficultés nouvelles apparaissent qui empêchent de trouver un résultat équivalent à celui concernant les structures symplectiques dans un cadre aussi général.

Pour étudier la quantification par déformation nous avons aussi besoin de développer la théorie des déformations des dg-catégories. Dans ce cas la première difficulté vient du comportement de la structure de catégorie de modèles dont est munie la catégorie $C(k)$ des complexes de k-modules et de la structure qu'elle induit sur la catégorie $\mathbf{dgCat}_k$ des catégories enrichies sur $C(k)$. Les structures habituelles, projective et injective, ne conviennent pas. Il a fallu dans un premier temps construire une nouvelle structure de catégorie de modèles sur $C(k)$, la *structure modérée*, cette structure a aussi été définie dans un autre cadre par d'autres personnes, et munir la catégorie $\mathbf{dgCat}_k$ de la structure induite.

Nous utilisons la théorie développée par Jacob Lurie des *problèmes de module formel* dans le cadre homotopique, ou des ∞-catégories. Nous pouvons alors définir le *champ dérivé formel* des dg-catégories compactement engendrées et nous obtenons une bonne définition de déformations formelles d'une dg-catégorie.

Ces deux travaux, sur les structures de Poisson et sur les déformations de dg-catégories, sont en cours de rédaction.

II Géométrie algébrique relative (travail en collaboration avec Mathieu Anel, Université du Québec à Montréal)

Je rappelle la construction que nous avions faite avec Bertrand Toën, un *contexte de géométrie algébrique relative* $(C, \otimes, \mathbf{1})$ est la donnée d'une catégorie C complète et cocomplète, munie d'une structure monoïdale symétrique fermée $\otimes$, avec $\mathbf{1}$ comme unité monoïdale. La catégorie des monoïdes commutatifs dans C est notée $Mon(C)$, sa catégorie opposée est notée Aff_C et est appelée la catégorie des *schémas affines sur* $\mathbf{1}$, ou des $\mathbf{1}$-*schémas affines*. Pour M dans $Mon(C)$, on note $\mathbb{A}^M$ le $\mathbf{1}$-schéma affine correspondant.

Pour tout schéma affine $X = \mathbb{A}^M$, la catégorie des M-modules est notée $M(X) = M\text{–}Mod$, le foncteur oubli $M\text{–}Mod \to C$ admet un adjoint à gauche noté $- \otimes M$. $M\text{–}Mod$ est aussi munie d'une structure monoïdale symétrique fermée notée $\otimes_M$, la catégorie des monoïdes commutatifs dans cette catégorie est la catégorie M–*Alg* des M-*algèbres* qui s'identifie à la catégorie $M/Mon(C)$.

Tout morphisme de monoïdes $u : M \to N$ définit une adjonction :

$$u^* : \ M\text{–}Mod \rightleftarrows N\text{–}Mod \ : u_* \ ,$$

où le foncteur u^* est égal à $- \otimes_M N$ et où le foncteur d'oubli u_* est conservatif et commute à toutes les limites et colimites. Soit $f : Y = \mathbb{A}^N \to X = \mathbb{A}^M$ le morphisme de schémas associés, alors nous posons $f^* = u^*$ et $f_* = u_*$. et $v'_* u'^*$ de N'–Mod dans N–Mod, qui est un isomorphisme.

Nous disons que le morphisme $f : Y \to X$ est *plat*, ou que le morphisme de monoïdes associés $u : M \to N$ est *plat*, si le foncteur $f^* = u^*$ est exact et nous pouvons définir la topologie *fidèlement plate quasi-compacte* sur Aff_C en disant qu'une famille $\{p_i : X_i \to X\}_{i \in I}$ est couvrante pour cette topologie si chaque p_i est plat et s'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que la famille de foncteurs $\{p_i^* : M(X_i) \to M(X)\}_{i \in J}$ soit conservative.

Nous disons que f est un *ouvert formel de Zariski* si f est un monomorphisme plat et que f est une *immersion ouverte de Zariski* si de plus f^* est localement de présentation finie.

Le morphisme f est un monomorphisme si u est un épimorphisme, c'est-à-dire si si le morphisme naturel $N \otimes_M N \to N$ est un isomorphisme, ce qui revient à demander que f^* soit pleinement fidèle, en particulier $f : Y \to X$ est un ouvert formel de Zariski si et seulement si l'adjonction (f^*, f_*) est une localisation exacte à gauche de catégories.

Nous pouvons alors définir la topologie de Zariski sur Aff_C, une famille couvrante pour cette topologie est une famille couvrante pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte dont tous les morphismes sont des immersions ouvertes de Zariski. Par définition la catégorie $SchCat(C)$ des *schémas relatifs* sur $(C, \otimes, \mathbf{1})$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie $Sh_{Zar}(Aff_C)$ des faisceaux sur Aff_C pour la toplogie de Zariski, obtenus en recollant pour cette topologie les objets affines.

Nous avons ainsi défini les schémas comme certains préfaisceaux sur une catégorie Aff_C qui sont des faisceaux pour une topologie de Grothendieck et qui sont localement représentables. Cette définition correspond dans le cas classique de la géométrie algébrique, c'est-à-dire si nous prenons comme catégorie monoïdale de base la catégorie $\mathbb{Z} - Mod$ des groupes abéliens, à la définition par le *foncteur des points* associé des schémas usuels, ou $\mathbb{Z}$-schémas.

Les $\mathbb{Z}$-schémas ont été d'abord définis comme des espaces topologiques X localement annelés, c'est-à-dire munis d'un faisceau en anneaux locaux $\mathcal{O}_X$, qui sont localement isomorphes en tant qu'espaces localement annelés au spectre d'un anneau commutatif. La définition des schémas comme foncteurs représentables et l'équivalence entre les deux définitions a été donnée dans les années 60, voir par exemple le livre *Groupes Algébriques* de M. Demazure et P. Gabriel

Il est alors naturel de voir s'il est possible de construire pour tout contexte de géométrie algébrique $(C, \otimes, \mathbf{1})$ une notion de schéma comme espace topologique muni d'un *faisceau structural*, et de montrer que cette notion correspond à celle introduite précédemment. Plus précisément cela revient à définir une nouvelle catégorie $SchGeom(C)$ dont les objets seront ces schémas que nous appellerons *schémas géométriques* pour les distinguer des schémas définis précédemment, que nous appellerons parfois *schémas catégoriques*, et à trouver une équivalence de catégories entre $SchGeom(C)$ et $SchCat(C)$.

Dans un premier temps il s'agit de construire un foncteur pleinement fidèle de la catégorie $SchCat(C)$ dans la catégorie des espaces topologiques sobres munis de faisceaux à valeurs dans $Mon(C)$. Dans une première partie nous étudions l'espace sous-jacent, le *spectre*, puis dans une deuxième partie nous étudierons le faisceau structural.

Pour avoir une théorie intéressante nous sommes amenés à faire certaines hypothèses qui ne sont pas trop restrictives. Si on note Aff_C^{pf} la catégorie duale de celle $Mon^{pf}(C)$ des monoïdes de présentation finie, nous supposons que la catégorie $Mon(C)$ est localement de présentation finie, alors Aff_C^{pf} est une petite catégorie stable par limites finies et Aff_C est la catégorie $Pro(Aff_C^{pf})$ des pro-objets de Aff_C^{pf}. Nous demandons aussi que pour tout $X \in Aff_C$, tout ouvert formel de Zariski de X est une limite filtrante d'ouverts affines.

Nous nous plaçons dans la catégorie Aff_C munie de la toplogie de Zariski, alors l'ensemble ordonné Zar/F des ouverts de Zariski d'un faisceau F est une *locale*, c'est-à-dire un *treillis distributif complet*, c'est-à-dire stable par intersections finies et par toutes les unions, tel que les intersections finies se distribuent sur les unions quelconques.

Une locale L est dite *spatiale* si elle est isomorphe à l'ensemble ordonné des ouverts d'un espace topologique (si tel est le cas cet espace est nécessairement sobre), on peut les caractériser comme les locales L ayant assez de points pour différentier les éléments de L.

Sur toute locale L, vue comme catégorie, il existe une topologie canonique, et dans le cas où la locale est spatiale la catégorie des faisceaux sur L pour cette topologie est isomorphe à la catégorie des faisceaux sur l'espace topologique sobre $Esp(L)$ associé à L.

Il est possible de montrer que la topologie de Zariski sur la locale Zar/F, définie par restriction de la topologie canonique de $Sh(Aff_C)$, coïncide avec sa topologie canonique. Alors un faisceau X est un schéma si et seulement si la locale Zar/X est engendré par $ZarAff(X)$ (autrement dit, un schéma est un faisceau ayant assez d'ouverts affines), et dans ce cas la locale associée à X est spatiale.

Définition : Le *spectre* d'un faisceau de Zariski F sur Aff_C, noté *spec*(F) est la locale Zar/F. Pour un schéma affine associé au monoïde M, *spec*$(\mathbb{A}^M)$ est aussi abrégé *spec*(M).

Le premier résultat important que nous avons obtenu est le suivant :

Proposition : L'association $X \mapsto spec(X)$ définit un foncteur, dit *foncteur spectral* :

$$spec : Sh_{Zar}(Aff_C) \quad \longrightarrow \quad Sobres$$

de la catégorie des faisceaux sur Aff_C dans la catégorie $Sobres$ des espaces topologiques sobres commutant aux colimites quelconques. En outre, *spec* envoie les ouverts de Zariski $U \to X$ dans des immersions ouvertes $spec(U) \to spec(X)$ et commute aux intersections d'ouverts.

Le fait que le foncteur spectral envoie ouverts de Zariski,qui ne sont qu'une classe distinguée de monomorphismes, dans des ouverts d'espaces topologiques est en quelque sorte tout son intérêt.

La commutation aux colimites et l'envoi des ouverts de Zariski sur des immersions ouvertes a pour conséquence que le spectre d'un schéma obtenu en recollant des pièces affines le long d'ouverts de Zariski se décrit, conformément à l'intuition habituelle, comme le recollement des spectres des pièces affines le long d'ouverts de ces spectres.

La commutation de *spec* avec les colimites assure également que le foncteur $spec : Sh(Aff_C) \longrightarrow Sobres$ peut être défini comme l'extension de Kan à gauche de $spec : Aff_C \longrightarrow Sobres$. Le résultat est encore vrai si $Sobres$ est remplacée par $Locales$, mais est faux si on définit le foncteur *spec* à valeurs dans la catégorie $Topos$ des topos.

Mais dans la suite, la construction du faisceau structural nécessite de voir le foncteur spectre à valeurs dans la catégorie $Topos$. En outre, toute extension de ce travail pour considérer des analogues de la topologie étale nécessiterait un spectre à valeurs dans les topos.

Le foncteur *spec* n'a en général aucune propriété de commutation avec les limites ni n'est fidèle, comme le prouve le cas classique des spectres d'anneaux. Il faut ajouter les faisceaux structuraux pour obtenir un foncteur fidèle et des commutations aux limites.

Pour décrire l'ensemble ordonné des points d'un spectre nous avons besoin de définir un schéma local, nous disons qu'un schéma affine L est *local* si pour tout schéma affine $X \in Aff_C^{pf}$, pour tout recouvrement $u_i : U_i \to X$ et tout $p : L \to X$, il existe une factorisation de $p = u_i p_i$ pour l'un des i :

$$\begin{tikzcd} & U_i \arrow[d, "u_i"] \\ L \arrow[ur, dashed, "p_i"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd} .$$

La sous-catégorie pleine de Aff_C des schémas locaux est notée $SchLoc$ et pour un schéma X, les objets de $FZar/X$ dont le domaine est un schéma local sont appelés des *formes locales (de Zariski) de* X.

Dans le cas particulier de la topologie de Zariski des anneaux, les objets locaux sont exactement les anneaux locaux et les formes locales d'un anneau A sont les localisations de A qui sont des anneaux locaux, qui sont en bijection avec les points du spectre. Ce résultat se généralise au cas d'un contexte quelconque, si X est un schéma dans $SchCat(C)$, l'ensemble ordonné des points de la locale $spec(X)$ est équivalent à celui des formes locales de X.

Pour définir le faisceau structural nous avons besoin de la notion de topos, en particulier les spectres définis précédemment comme espaces topologiques seront remplacés par leur topos de faisceaux.

Nous déduisons des hypothèses faites précédemment que la catégorie Aff_C est la catégorie des points du topos $\underline{Mon}(C) := Pr(Aff_C^{pf})$ des préfaisceaux sur Aff_C^{pf}, la topologie de Zariski se restreint à Aff_C^{pf} et définit le sous-topos $\underline{LMon}(C) := Sh_{Zar}(Aff_C^{pf})$ de $\underline{Mon}(C)$. Nous appelons $\underline{Mon}(C)$ le *topos classifiant les C-monoïdes*, et $\underline{LMon}(C)$ le *topos classifiant les C-monoïdes locaux*; ce dernier nom est justifié par le fait que la catégorie des points de $\underline{LMon}(C)$ est la catégorie *Loc* des schémas locaux.

Proposition : Pour tout faisceau de Zariski X, il existe un morphisme géométrique de topos

$$\mathcal{O}_X : spec(X) \longrightarrow \underline{LMon}(C) ,$$

nommé *le faisceau structural de $spec(X)$*. (Dans le cas $X = \mathbb{A}^M$, $\mathcal{O}_X$ est noté $\mathcal{O}_M$.)

Le morphisme $\mathcal{O}_X$ se relève en un morphisme géométrique de topos

$$\widehat{\mathcal{O}}_X : Pr(Zar/X) \longrightarrow Pr(Aff_C^{pf}) = \underline{Mon}(C)$$

qui induit un foncteur entre les catégories de points $Pro(Zar/X) \longrightarrow Aff_C$, dont la restriction à Zar/X, dans le cas où $X = \mathbb{A}^M$, est le foncteur o_M défini par :

$$\begin{array}{rcl} o_M : ZarAff(M)^{op} & \longrightarrow & Mon(C) \\ M \to M' & \longmapsto & M' \end{array} \qquad (1)$$

Les morphismes géométriques vers $\underline{Mon}(C)$ (les faisceaux en C-monoïdes) sont plus facile à manipuler sous la forme d'un diagramme

$$\mathcal{O}'_X : Aff_C^{pf} \longrightarrow Sh(Zar/X)$$

commutant aux limites finies. Un tel diagramme se présente encore mieux sous la forme du foncteur en deux variables

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}'_X : (Zar/X)^{op} \times Aff_C^{pf} & \longrightarrow & Ens \\ (U, \mathbb{A}^N) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{Sh(Aff_C)}(U, \mathbb{A}^N) \end{array}$$

qui est exact à gauche dans la première variable et envoit les familles couvrantes dans des familles épimorphiques dans la deuxième variable.

La proposition précédente peut s'interpréter en disant que le spectre d'un monoïde M est l'espace des modules des formes locales de M ; la proposition suivante assure que le faisceau structural du spectre est bien la famille des formes locales de M.

Soient X un schéma et un point x de $spec(X)$ vu comme un morphisme géométrique $x : Ens \to spec(X)$, le *germe de* $\mathcal{O}_X$ *en* x est le morphisme géométrique

$$\mathcal{O}_{X,x} : Ens \xrightarrow{x} spec(X) \xrightarrow{\mathcal{O}_X} \underline{LMon} \ ,$$

il correspond à un C-monoïde local encore noté $\mathcal{O}_{X,x}$.

Alors pour un monoïde M, et un point x de $spec(M)$, $\mathcal{O}_{M,x}$ est la forme locale de Zariski de $\mathbb{A}^M$ correspondant à x.

Comme dans le cas classique nous pouvons montrer que pour tout monoïde M, M est un monoïde local si et seulement si l'espace $spec(M)$ a un unique point fermé x et $\mathcal{O}_{M,x} = M$.

Pour tout topos T on note T–$Mon(C)$ la catégorie $\mathrm{Hom}^{cc,lex}(Aff_C^{pf}, T)$ des foncteurs exacts à gauche $Aff_C^{pf} \to T$ et de leurs transformations naturelles. Les objets de T–$Mon(C)$ sont appelés *C-monoïdes sur T* ; il convient de les penser comme des familles de C-monoïdes paramétrées par T.

Tout topos T est muni d'un morphisme géométrique canonique $t : T \to Ens$ qui induit un foncteur $t^* : Mon(C) \to T$–$Mon(C)$ et on note T–Zar l'image inverse par t^* de la classe Zar des immersions ouvertes de Zariski dans $Mon(C)$. Nous pouvons alors définir deux classes de morphismes dans T–$Mon(C)$ de la manière suivante :

un morphisme est *Zariski-conservatif* s'il possède la propriété de relèvement unique à droite par rapport à la classe T–Zar ; ces morphismes forment une sous-catégorie de T–$Mon(C)$ notée T–$ZCons$.

un morphisme est un *ouvert formel de Zariski* s'il possède la propriété de relèvement unique à gauche par rapport à la classe T–$ZCons$, ils forment une catégorie notée T–$FZar$.

Nous pouvons alors énoncer un des résultats fondamentaux de la théorie
Proposition : Les classes T–$FZar$ et T–$ZCons$ de T–$Mon(C)$ sont respectivement les classes gauche et droite d'un système de factorisation unique engendré à gauche par T–Zar. C'est-à-dire que tout morphisme $f : M \to N \in T$–$Mon(C)$ se factorise uniquement en $ba : M \to M' \to N$ où $a \in T$–$FZar$ et $b \in T$–$ZCons$.

Ce système est en outre naturel au sens où, si $u : T' \to T$ est un morphisme géométrique, le foncteur $u^* : T$–$Mon \to T'$–Mon envoie T–$ZCons$ et T–$FZar$ dans T'–$ZCons$ et T'–$FZar$ respectivement (et donc préserve les factorisations).

Un topos T est dit *structuré sur* $\underline{Mon}(C)$ (resp. sur $\underline{LMon}(C)$) s'il est muni d'un morphisme géométrique $\mathcal{O}_T$ de T dans $\underline{Mon}(C)$ (resp. dans $\underline{LMon}(C)$). Un *morphisme* $(T, \mathcal{O}_T) \longrightarrow (T', \mathcal{O}_{T'})$ *de topos structurés sur* $\underline{Mon}(C)$ est la donnée d'un morphisme géométrique $u : T \to T'$ et d'une transformation naturelle $f : \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_{T'} \circ u$. Comme $\underline{LMon}(C) \to \underline{Mon}(C)$ est une immersion, la catégorie $\underline{LMon}$*–Topos* des topos structurés sur $\underline{LMon}(C)$ est naturellement une sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{Mon}$*–Topos* des topos structurés sur $\underline{Mon}(C)$.

Un morphisme $(u, f) : (T, \mathcal{O}_T) \longrightarrow (T', \mathcal{O}_{T'})$ de topos structurés sur $\underline{LMon}$ est dit *Zariski-conservatif* si f est dans T*–ZCons*. La catégorie des topos structurés sur $\underline{LMon}(C)$ et des morphismes Zariski-conservatifs est notée $\underline{LMon}\text{–}Topos^{ZCons}$ et nous avons le résultat important suivant.

Proposition : Le foncteur d'inclusion $\iota : \underline{LMon}\text{–}Topos^{ZCons} \longrightarrow \underline{Mon}\text{–}Topos$ possède un adjoint à droite, noté **Spec**.

Pour X un faisceau de Zariski, le couple $Spec(X) := (spec(X), \mathcal{O}_X)$ définit un topos structuré sur $\underline{LMon}(C)$, si X est affine $Spec(X)$ est appelé un *schéma géométrique affine* et par définition un *schéma géométrique* est un topos structuré sur $\underline{LMon}(C)$ qui est localement (au sens des immersions ouvertes de topos structurés) équivalent au spectre d'un schéma affine.

Le théorème suivant est le résultat principal de ce travail.

Théorème : Le morphisme faisceau structural définit un foncteur

$$\begin{array}{rcl} Spec(-) : Sh_{Zar}(Aff_C) & \longrightarrow & \underline{LMon}\text{–}Sobres^{ZCons} \\ X & \longmapsto & (spec(X), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

cocontinu et envoyant la classe des ouverts de Zariski dans les immersions ouvertes d'espaces structurés.

En outre, ce foncteur restreint aux schémas est exact à gauche et induit une équivalence entre la catégorie des schémas catégoriques et la catégorie des schémas géométriques.

La rédaction de ce travail n'est pas encore satisfaisante, nous avons écrit un article que nous avons fait circuler mais nous désirons améliorer le texte avant de le soumettre pour publication. En particulier nous devons préciser les conditions nécessaires pour que le théorème principal, l'équivalence de catégories, soit vérifié.

III Structure du treillis de Bousfield (travail en collaboration avec Jack Morava, Johns Hopkins University)

L'article original de Bousfield, *The Boolean algebra of spectra*, Comm. Math. Helv. **54** (1979), met en évidence trois constructions intéressantes, le treillis complet **B** de toutes les classes de Bousfield, qui contient le treillis complet distibutif **DL** des classes *smash-idempotentes*, qui contient à son tour l'algèbre Booléenne non compète **BA** des classes *complémentées*.

Nous rappelons les résultats de Johnstone sur les locales et les espaces de Stone. Un idéal I d'un treillis L est un sous-ensemble stable par $\vee$ finies et tel que $a \in I,\ b \leq a$ implique $b \in I$, alors la classe des idéaux I dans L peut être identifié avec la classe des ouverts d'un espace topologique Spec L, dont les points sont les idéaux premiers de L.

Cela définit des espaces

$$\mathrm{Spec}\ \mathbf{B} \to \mathrm{Spec}\ \mathbf{DL} \to \mathrm{Spec}\ \mathbf{BA}\ ,$$

avec $rmSpec$ **DL** espace topologique *sobre* et *cohérent* et Spec **BA** espace topologique compact et totallement discontinu.

Hovey and Palmieri, dans *The structure of the Bousfield lattice*, Cont. Math. **239** (1998), construisent une rétraction de Spec **DL** vers Spec **B**, dont l'image est le *diviseur* défini par l'idéal principal engendré par les spectres d'Eilenberg-MacLane.

Nous avons réfléchi à la possibilité de construire un *faisceau en spectres* sur ces espaces. En effet la localisation de Bousfield L_E\$ du spectre en sphères à $\langle E \rangle$ est un anneau en spectres commutatif, ou plutôt un spectre en E_∞-anneaux. Il devrait être possible d'associer à tout idéal I de **B**, c'est-à-dire à tout ouvert de Spec **B**, un spectre en E_∞-anneaux.

Nous n'avons pas avancé beaucoup plus dans cette recherche, malgré deux séjours à Johns Hopkins University nous avons manqué de temps. Il semble que pour mener à bien ce que nous avons en tête il faille utiliser de façon très précise les résultats de Jacob Lurie sur les *infini-topos* et sur l'*algèbre supérieure* et en particulier les ∞-*opérades*. Ce sont des théories que je ne maîtrise pas encore suffisamment mais je compte bien poursuivre ce travail dans les années futures.

IV Philosophie des mathématiques

Depuis la rentrée 2010 et la préparation du colloque *Histoire des Mathématiques, Histoire et Philosophie des Sciences* (voir plus bas dans la liste des conférences), je m'intéresse de façon active à la philosophie et à l'histoire des mathématiques. Il ne s'agit pas de faire un travail de recherche dans ces disciplines mais de trouver des collaborations avec des chercheurs dans ce domaine.

Ce travail a commencé, en particulier avec Brice Halimi (Université Paris Ouest Nanterre, IREPH), Sébastien Maronne (Université Toulouse Paul Sabatier, IMT) et David Rabouin (CNRS, SPHERE). La première réalisation a été l'organisation de l'école thématique *Mathématiques et Philosophie contemporaine* en juin 2012 (voir plus bas dans la liste des conférences).

Le sujet sur lequel je réfléchis, et qui rejoint mes recherches en mathématiques, que ce soit la théorie des valuations, la géométrie algébrique relative ou la théorie des catégories, est la *notion d'espace et de point* en géométrie.

Les objets de la géométrie algébrique classique sont des *espaces*, dans un premier temps uniquement des courbes et des surfaces, et à cette notion d'espace est associée la notion de *point*, un espace étant considéré comme un ensemble de points ayant des propriétés particulières. La réflexion commencée au vingtième siècle avec les travaux de A. Weil ou d'O. Zariski, puis les définitions plustardives dans les articles fondateurs de J.-P.Serre, de C. Chevalley et surtout ceux dA. Grothendieck, aboutit à une description plus *catégorique* avec la notion de *foncteur des points*.

Les domaines dans lesquels je travaille concernent essentiellement des objets qui généralisent les schémas ou variétés algébriques, les champs dérivés ou les schémas en géométrie relative. L'étude de la notion d'espace ou de point s'applique aussi dans ces nouveaux cadres, mais s'étend aussi à d'autres domaines comme par exemple les espaces de Berkovich.