О КВАЗИРАЦИОНАЛЬНЫХ (ПО АБЪЯНКАРУ) ОСОБЕННОСТЯХ

С. Ю. Оревков

Пусть p – особая точка комплексно-аналитической поверхности X, и пусть $\sigma\colon \widetilde{X} \to X$ – разрешение особенности поверхности X в p. Абъянкар [1] назвал особенность в p *квазирациональной*, если каждая неприводимая компонента исключительной кривой $E = \sigma^{-1}(p)$ – рациональная кривая.

Пусть U – окрестность начала координат в $\mathbb{C}^2$ и C – аналитическая кривая в U, заданная уравнением $f(x,y)=0$. Предположим, что C аналитически неприводима в 0. Для данного целого числа g рассмотрим поверхность X в $\mathbb{C}^3$, заданную уравнением $z^g + f(x,y) = 0$. В [1] доказано, что особенность X в 0 квазирациональна, если C имеет в 0 одну характеристическую пару Пюизо (m,n) и числа m, n, g попарно взаимно просты. Это – основной результат первой части [1], а во второй части аналогичное утверждение доказано для произвольного основного поля.

В настоящей заметке доказано обобщение этой теоремы Абъянкара (правда, только в аналитическом случае над $\mathbb{C}$) для любого числа пар Пюизо. Оно непосредственно вытекает из известных фактов теории узлов.

Пусть, как выше, росток f в 0 аналитически неприводим. Выберем координаты так, чтобы одна из осей касалась C в 0, и пусть m и n – кратности нулей у ограничений f на оси координат. (Если C имеет в 0 одну пару Пюизо, то эта пара есть (m,n).)

Предложение. *Пусть либо m, либо n взаимно просто с g. Тогда особенность X в 0 квазирациональна.*

Доказательство. Пусть S^5 и S^3 – достаточно малые сферы в $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{C}^2$ с центром в 0, и пусть $M = X \cap S^5$, $K = C \cap S^3$. Ясно, что M – трехмерное многообразие и K – узел в S^3. Согласно [4], $H_1(M,\mathbb{Q})$ содержит подгруппу, изоморфную $H_1(E,\mathbb{Q})$. Значит, из $H_1(M,\mathbb{Q}) = 0$ следует квазирациональность X в 0.

С другой стороны, M есть g-листное циклическое накрытие над S^3, разветвленное вдоль K (см. [5]). Значит (см. [3]), $H_1(M,\mathbb{Q}) = 0$ тогда и только тогда, когда многочлен Александера $\Delta_K(t)$ не имеет общих корней с многочленом $t^g - 1$. Итак, достаточно показать, что $\Delta_K(\omega^j) \neq 0$ для любого j, где ω – примитивный корень g-й степени из единицы. Для этого воспользуемся формулой Зарисского [6], явно выражающей $\Delta_K(t)$ через характеристическую последовательность Пюизо.

Одно из m, n взаимно просто с g. Допустим, n. Это – кратность нуля ограничения f на одну из осей, скажем, y. Тогда разложение C в ряд Пюизо в 0 имеет вид[1]: $x = t^n$, $y = \sum_{i \geqslant m} a_i t^i$. Следуя [2], обозначим $d_1 = n$, $m_1 = m$;

$$d_i = \text{НОД}(d_{i-1}, m_i), \qquad m_i = \min\{j \mid a_j \neq 0, d_i \nmid j\}, \qquad i > 1.$$

Пусть h – такое число, что $d_h \neq 1$, $d_{h+1} = 1$ (тогда m_i определены для $i = 1, \dots, h$, а d_i – для $i = 1, \dots, h+1$). Пусть $n_i = d_i / d_{i+1}$, $i = 1, \dots, h$, и пусть $r_1 = m_1$,

$$r_i = r_{i-1} n_{i-1} + m_i - m_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, h.$$

Заметим, что $n = n_1 \dots n_h$, значит, g взаимно просто с каждым из $n_1, \dots, n_h$. Согласно [6],

$$\Delta_K(t) = \frac{t-1}{t^n - 1} \prod_{i=1}^{h} \frac{t^{r_i n_i} - 1}{t^{r_i} - 1}.$$

[1] Иногда при определении ряда Пюизо требуют, чтобы было $n < m$. Здесь, как и в [1], [2], [6], таких ограничений не предполагается.

Предположим, что $\Delta_K(\omega^j) = 0$ для некоторого j. Тогда ω^j – корень одного из многочленов $(t^{r_i n_i} - 1)/(t^{r_i} - 1)$, т.е.

$$\omega^{j r_i n_i} = 1, \tag{1}$$

$$\omega^{j r_i} \neq 1. \tag{2}$$

Поскольку ω – примитивный корень g-й степени из единицы, из (1) следует, что $j r_i n_i$ делится на g. Но g и n_i взаимно просты, значит, $j r_i$ делится на g. Это противоречит (2), что и требовалось доказать.

Замечание 1. Мы доказали, что если g взаимно просто с n, то $H_1(M, \mathbb{Q}) = 0$. Если дополнительно потребовать, чтобы g было взаимно простым с каждым из $r_1, \dots, r_h$, то можно показать, что $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$.

Замечание 2. На самом деле, условие $H_1(M, \mathbb{Q}) = 0$ (или, эквивалентно, условие, что $\Delta_K(t)$ и $t^g - 1$ не имеют общих корней) не только достаточно, но и необходимо для квазирациональности X в 0. Это следует из того, что граф неприводимых компонент (двойственный граф) кривой E – дерево.

Замечание 3. Необходимое и достаточное условие для квазирациональности X в 0 можно сформулировать в виде целочисленных условий на g и на характеристическую последовательность $(r_1, n_1; \dots; r_h, n_h)$. Эти условия состоят в том, что для любого $i = 1, \dots, h$ выполнено хотя бы одно из равенств

$$\text{НОД}(g, r_i n_i) = \text{НОД}(g, r_i), \tag{3}$$

$$\text{НОД}(g, r_i n_i) = \text{НОД}(g, d_i). \tag{4}$$

Замечание 4. В терминах степени накрытия g и характеристической последовательности можно дать полное топологическое описание кривой E (включая матрицу пересечений неприводимых компонент). Например, каждое i, для которого равенства (3) и (4) не выполнены, дает $\text{НОД}(g, d_{i+1})$ неприводимых компонент кривой E рода

$$\frac{\text{НОД}(g, r_i n_i) + \text{НОД}(g, d_{i+1}) - \text{НОД}(g, r_i) - \text{НОД}(g, d_i)}{2\text{НОД}(g, d_{i+1})}.$$

Остальные компоненты кривой E рациональны.

Замечание 5. Если росток C в 0 аналитически приводим, то условие $H_1(M, \mathbb{Q}) = 0$ уже не является необходимым для квазирациональности X в 0, так как в этом случае ненулевой 1-цикл может появиться не только из-за положительного рода компоненты кривой E, а также из-за того, что двойственный граф кривой E может оказаться не деревом. Пример: $f = x^5 + x^2 y^2 + y^5$, $g = 2$.

Утверждения, сформулированные в замечаниях 1–4, требуют другой техники и будут доказаны в другой статье.

Настоящая работа выполнена, когда я был в Математическом Институте им. Макса Планка, и я благодарю этот институт за гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Abhyankar S. S. // Amer. J. Math. 1979. V. 101. P. 267–300. [2] Abhyankar S. S. Expansion technique in algebraic geometry. Bombay: Tata Inst. Fund. Res., 1977. [3] Фокс Р. Краткий экскурс в теорию узлов // Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967. [4] Мамфорд Д. Топология нормальных особенностей и критерий простоты // Математика.. Т. 10. №6. С. 3–24. [5] Савельев И. В. // Матем. заметки. 1979. Т. 25. №4. С. 497–503. [6] Zariski O. // Amer. J. Math. 1932. V. 54. P. 453–465.

НИИ Системных Исследований РАН

Принято редколлегией
04.09.1995