MOUVEMENTS DE MARKOV POUR DES TRESSES QUASIPOSITIVES

S.Yu. Orevkov

Résumé. Soit $B_m = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \,|\, \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1},\ [\sigma_j, \sigma_k] = 1$ pour $|k-j| > 1\rangle$ le groupe des tresses. Une tresse b est dite *quasipositive* si $b = (a_1\sigma_1 a_1^{-1})\dots(a_k\sigma_1 a_k^{-1})$. En utilisant la théorie des courbes pseudo-holomorphes de Gromov, on montre que $b \in B_m$ *est quasipositive si et seulement si* $b\sigma_m \in B_{m+1}$ *est quasipositive.*

Version abrégé française

Soit B_m le groupe des tresses à m brins (m-tresses). Il est défini par les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ et rélations $[\sigma_j, \sigma_k] = 1$ pour $|k-j| > 1$ et $\sigma_j\sigma_k\sigma_j = \sigma_k\sigma_j\sigma_k$ pour $|k-j| = 1$. Une tresse b est dite *quasipositive* (voir [5]) si $b = \prod_{j=1}^{k} a_j\sigma_1 a_j^{-1}$ où les $a_j \in B_m$.

On dit, que $b' \in B_{m+1}$ est obtenue à partir de $b \in B_m$ par *un mouvement de Markov*, si $b' = b\sigma_m^\varepsilon$ oú $\varepsilon = \pm 1$ (on identifie ici B_m avec le sous-groupe de B_{m+1} engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$). On dit, que le mouvement de Markov est *positif* si $\varepsilon = 1$ et *négatif* sinon. Il est clair d'après les définitions qu'une tresse est quasipositive lorsqu'elle est obtenue à partir d'une tresse quasipositive par un mouvement de Markov positif. Dans cet article, on démontre la réciproque.

Théorème 1. *Soit $b' \in B_{m+1}$ obtenue à partir de b par un mouvement de Markov positif. Si b' est quasipositive, alors b est quasipositive aussi.*

La preuve n'est pas constructive. Elle est basée sur la théorie des courbes pseudo-holomorphes de Gromov, et nous ne connaissons pas d'algorithme pour trouver une présentation quasipositive de b à partir d'une présentation quasipositive de b'.

Le Théorème 1 peut être appliqué à l'étude de la topologie des courbes algébriques réelles planaires, car la réalisabilité d'un arrangement d'ovales d'une courbe algébrique de degré donné implique la quasipositivité qu'une certaine tresse (voir [4]).

L'idée de la preuve est aussi issue de la topologie des courbes algébriques réelles. Elle résulte de l'observation suivante. Soit $C \subset \mathbf{RP}^2$ une courbe réelle et A un petit arc convexe de C, dont l'enveloppe convexe contient un point $p \notin C$ et ne contient pas d'autres parties de la courbe. Alors, la tresse associée à la projection par rapport au point p est obtenue par un mouvement de Markov positif à partir de la tresse associée à la projection par rapport à un point de A. La preuve du Théorème 1 modélise cette situation par les courbes pseudo-homomorphes.

Remarque. Si b' est obtenue à partir d'une tresse quelconque par un mouvement de Markov négatif, alors b' n'est jamais quasipositive. C'est une conséquence

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

immédiate du résultat suivant de Burckel [1] et Laver [3] (une preuve géométrique a été donnée par Wiest [6]): *Toute tresse conjuguée à une tresse quasipositive est positive dans l'ordre invariant à droite de Dehornoy.*

On dit qu'un entrelacs dans une 3-sphère est *un entrelacs quasipositif* s'il est isotope à une tresse quasipositive fermée.

Question 1. Soit L un entrelacs quasipositif et b une tresse représentant L, dont le nombre des brins est minimal. Est ce que cela implique que b est quasipositive?

Dans le cas où b est une 2-tresse, la réponse est affirmative; cela est une conséquence immédiate du fait qu'un entrelacs non-slice et son image miroir ne peuvent pas être simultanément quasipositifs (voir [5]).

Question 2. Soient b_1 et b_2 deux tresses quasipositives représentant le même entrelacs. Est ce qu'il est toujours possible de passer de b_1 à b_2, en utilisant uniquement des conjugaisons et des mouvements de Markov positifs?