КВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ И СВЯЗНЫЕ СУММЫ

С. Ю. Оревков

Аннотация. Доказано, что связная сумма двух зацеплений квазиположительна тогда и только тогда, когда квазиположительно каждое из них. Доказательство основано на технике заполнения аналитическими дисками.

1. Введение

Коса из n нитей называется *квазиположительной*, если она разлагается в произведение кос, сопряженных стандартным (артиновским) образующим $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ группы кос B_n. Коса называется *сильно квазиположительньной*, если она она разлагается в произведение кос вида $\sigma_{j,k+1} = \tau_{k,j}\sigma_j\tau_{k,j}^{-1}$ для $j \le k$, где $\tau_{k,j} = \sigma_k\sigma_{k-1}\dots\sigma_j$. Такие косы называются *ленточными образующими* (они также известны как образующие копредставления Бирман – Ко – Ли группы кос B_n, см. [3]).

Все зацепления в настоящей статье предполагаются ориентированными зацеплениями в трехмерной сфере S^3. Зацепление называется *(сильно) квазиположительным*, если оно представимо (сильно) квазиположительной косой. Эту терминологию ввел Ли Рудольф [13, 14], и теперь она стала общепринятой в теории узлов.

Основной результат заметки — пункт (а) следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть $L = L_1 \# L_2$ — связная сумма двух зацеплений в S^3. Тогда:*

(а). L квазиположительно если и только если таковы L_1 и L_2.

(б). L сильно квазиположительно если и только если таковы L_1 и L_2.

Отметим, что часть (б) этой теоремы непосредственно вытекает из основного результата статьи [14] (см. §3). Она включена для полноты, как и две следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть $L = L_1 \sqcup L_2$ — несвязная сумма двух зацеплений в S^3. Тогда:*

(а). L квазиположительно если и только если таковы L_1 и L_2.

(б). L сильно квазиположительно если и только если таковы L_1 и L_2.

Пусть $\mathrm{sh}_m : B_n \to B_{m+n}$ — гомоморфизм, заданный на образующих как $\sigma_k \mapsto \sigma_{m+k}$ (m-сдвиг). Если зацепления L_1 и L_2 представлены косами $X_1 \in B_m$ и $X_2 \in B_n$, то $L_1 \sqcup L_2$ и $L_1 \# L_2$ можно представить косами

$$X_1 \,\mathrm{sh}_m(X_2) \in B_{m+n} \qquad \text{и} \qquad X_1 \,\mathrm{sh}_{m-1}(X_2) \in B_{m+n-1} \tag{1}$$

соответственно. Таким образом, следующий результат — это аналог для кос теоремы 1.2.

Теорема 1.3. *Пусть $X_1 \in B_m$ и $X_2 \in B_n$. Пусть $X = X_1 \operatorname{sh}_m(X_2) \in B_{m+n}$. Тогда:*

(а). ([12, теорема 3.2]) *X квазиположительна если и только если таковы X_1 и X_2.*

(б). X сильно квазиположительна если и только если таковы X_1 и X_2.

Гипотеза 1.4. *Пусть $X_1 \in B_m$ и $X_2 \in B_n$. Пусть $X = X_1 \operatorname{sh}_{m-1}(X_2) \in B_{m+n-1}$. Тогда X квазиположительна если и только если таковы X_1 и X_2.*

Замечание 1.5. Частным случаем гипотезы 1.4 является основной результат статьи [11]: коса $X \in B_n$ квазиположительна если и только если такова коса $X\sigma_n \in B_{n+1}$.

Замечание 1.6. В [11, вопрос 1] я спрашивал, верно ли, что коса с минимальным числом нитей, представляющая данное квазиположительное зацепление, обязательно должна быть квазиположительной. В силу теоремы 1.1(а), из положительного ответа на этот вопрос с помощью рассуждений, как в [9], следовала бы гипотеза 1.4. В самом деле, индекс самопересечения (т.е. алгебраическая длина минус число нитей) квазиположительной косы максимален среди всех кос, представляющих данное зацепление (см., например, [15]). Из этого легко вывести, что в предположениях гипотезы 1.4 он максимален для каждой из кос X_j, $j = 1, 2$. Тогда, как видно из доказательства теоремы 1.2 работы [9], косу X_j можно преобразовать в косу X'_j с минимальным числом нитей одними только сопряжениями и положительными (де)стабилизациями. Поэтому из теоремы 1.1(а) и положительного ответа на [11, вопрос 1] будет следовать квазиположительность косы X'_j, что эквивалентно квазиположительности косы X_j в силу [11] (см. замечание 1.5). Отметим также, что в работах [8, 9] получены некоторые интересные результаты, связанные с вопросом 1 из [11].

Замечание 1.7. Среди прочего, из теоремы 1.3(а) следует, что *коса из n нитей квазиположительна, если при некотором $m \geq n$ квазиположительна коса из m нитей, заданная тем же словом* (см. теорему 3.1 в [12]). Этот факт также является непосредственным формальным следствием инвариантности квазиположительности при дестабилизациях (см. замечание 1.5). В самом деле, пусть $X \in B_n$. Если коса из $n + 1$ нити, заданная тем же словом, квазиположительна, то, очевидно, такова же коса $X\sigma_n \in B_{n+1}$, а значит и X тоже.

Замечание 1.8. Все обсуждавшиеся выше формулировки о (не сильно) квазиположительных косах чисто комбинаторные, в то время как их доказательства используют комплексный анализ, нелинейные уравнения с частными производными и т. п. Единственный частный случай, для которого мне известно комбинаторное доказательство, это утверждение из замечания 1.7; см. [12, §3.3].

Замечание 1.9. Гипотеза 1.4 — это аналог для кос теоремы 1.1(а). Используя теорию Гарсайда в версии Бирман – Ко – Ли [3], несложно доказать разные аналоги для кос теоремы 1.1(б). Однако, на мой взгляд, они не представляют интереса, так как сильная квазиположительность не сохраняется при сопряжениях.

Благодарности. Я признателен Мишелю Буало за привлечение моего внимания к данной теме, а также Н. Г. Кружилину и С. Ю. Немировскому за полезные обсуждения. Я также благодарю рецензента за исправление некоторых ошибок.

2. Квазиположительные зацепления: доказательство частей (a) теорем

Доказательство частей (a) теорем из введения вдохновлены статьей Ерошкина [7], которая основана на технике заполения аналитическими дисками [1, 6, 10]. Более того, теоремы 1.2(a) и 1.3(a) почти непосредственно вытекают из [7] (см. подробнее в [12, теорема 3.2]). Наше доказательство теоремы 1.1(a) есть комбинация уточненной версии теоремы Бедфорда – Клингенберга – Кружилина (с гладкостью Леви-плоской гиперповерхности), сглаживания псевдовыпуклых областей и результата из [4] о том, что зацепление, высекаемое алгебраической кривой на границе гладкого псевдовыпуклого шара, квазиположительно.

Лемма 2.1. *Пусть Ω — ограниченная псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^2$ с гладкой границей. Пусть $B \subset \Omega$ — гладкая Леви-плоская гиперповерхность трансверсальная к $\partial\Omega$, и пусть A — гладкая двумерная поверхность, трансверсальная и к B, и к $\partial\Omega$. Предположим, что $\Omega \setminus B$ имеет две компоненты связности Ω_1 и Ω_2. Тогда для $j = 1, 2$ существует строго псевдовыпуклая область $\Omega_j^- \subset \Omega_j$ с гладкой границей такая, что пары $(\Omega_j, A \cap \Omega_j)$ и $(\Omega_j^-, A \cap \Omega_j^-)$ гомеоморфны.*

Доказательство. Отождествим $\mathbb{C}^2$ с аффинной картой в $\mathbb{CP}^2$. Пусть $j = 1$ или 2. Для $z \in \Omega_j$ обозначим через $d(z)$ расстояние от z до $\partial\Omega_j$ в метрике Фубини – Штуди на $\mathbb{CP}^2$. По теореме [16, теорема 1], функция $h := -\log d$ плюрисубгармонична на Ω_j. Пусть φ — гладкая функция на $\mathbb{C}^2$, положительная в единичном шаре и равная нулю вне его, и пусть $\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z/\varepsilon)/\varepsilon^4$ (т. е. φ_ε стремится к дельта-функции при $\varepsilon \to 0$). Положим $U_\varepsilon = \{p \in \Omega_j \mid d(p) > \varepsilon\}$. Обозначим через h_ε свертку $h * \varphi_\varepsilon$. Это гладкая плюрисубгармоническая функция на U_ε (см., например, [5, теорема 5.5]). Тогда при $a \gg 1$ и $0 < \varepsilon \ll \exp(-a)$ область $\Omega_j^- = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid h_\varepsilon(z) + \varepsilon\|z\|^2 < a\}$ обладает требуемыми свойствами. □

Доказательство теоремы 1.1(a). ($\Leftarrow$) Следует из (1).

($\Rightarrow$) Пусть L — квазиположительное зацепление в сфере S^3, которую мы отождествим с единичной сферой в $\mathbb{C}^2$. По [13] можно считать, что $L = S^3 \cap A$, где A — алгебраическая кривая трансверсальная к S^3. Пусть $\Gamma \subset S^3$ — гладко вложенная двумерная сфера, задающая разложение зацепления L в связную сумму $L_1 \# L_2$. Это значит, что Γ разбивает S^3 на два шара B_1 и B_2, причем для некоторого вложенного отрезка $I \subset \Gamma$ имеет место $(L \cap B_j) \cup I = L_j$, $j = 1, 2$. Из теоремы 1 в статье [1] следует, что после возмущения Γ найдется гладко вложенный Леви-плоский трехмерный шар B трансверсальный[1] S^3 и такой, что $\partial B = \Gamma$. Более того (см. также [6]), существует гладкая функция $F : B \to \mathbb{R}$ со всюду ненулевым градиентом, ограничение которой на Γ (обозначим его через f) есть морсовская функция, у которой все поверхности уровня являются объединением голоморфных дисков и (для некоторых критических уровней) изолированных точек.

Пусть $\{p_1, p_2\} = \partial I = \Gamma \cap L$, где точки p_1 и p_2 занумерованы так, что $f(p_1) \le f(p_2)$.

[1] Трансверсальности нет в формулировке [1, теорема 1], но приведенное там доказательство гладкости шара B есть ни что иное, как доказательство его трансверсальности сфере S^3.

Тогда индексы зацепления L с линиями уровня функции f такие:

$$\operatorname{lk}\bigl(L, f^{-1}(c)\bigr) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(p_1) \le c \le f(p_2), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, $F^{-1}(c)$ трансверсально пересекает A в единственной точке при $f(p_1) \le c \le f(p_2)$, и $F^{-1}(c) \cap A = \varnothing$ в противном случае. Поэтому $B \cap A$ есть незаузленная дуга в B с концами в $p_1, p_2 \in \Gamma = \partial B$ (здесь существенно, что слои $F^{-1}(c)$ являются объединениями дисков, так как иначе дуга, пересекающая каждый слой не более одного раза, могла бы быть заузленной).

Пусть Ω_1 и Ω_2 — две области, на которые B делит единичный шар в $\mathbb{C}^2$. Пусть $j = 1$ или 2. Тогда $\partial\Omega_j = B \cup B_j$ и дуга I изотопна дуге $B \cap A$ в шаре B, причем концы отрезка неподвижны при изотопии. Отсюда вытекает гомеоморфность пар (см. рис. 1):

$$(S^3, L_j) = (S^3, (B_j \cap A) \cup I) \cong (\partial\Omega_j, (B_j \cap A) \cup I) \cong (\partial\Omega_j, \partial(\Omega_j \cap A)).$$

По лемме 2.1 мы можем приблизить Ω_j строго псевдовыпуклой областью Ω_j^- с гладкой границей, диффеоморфной сфере. По теореме Элиашберга [6, теорема 5.1], область Ω_j^- диффеоморфна четырехмерному шару, и значит квазиположительность зацепления $(\partial\Omega_j, \partial(\Omega_j \cap A))$ следует из теоремы 2 статьи [4]. □

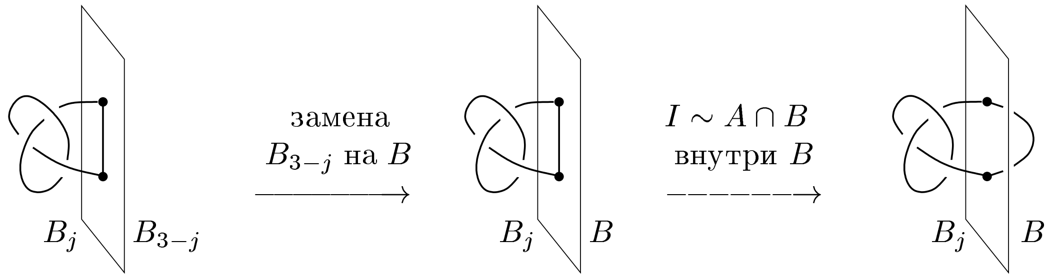

Рис. 1.

3. Сильно квазиположительные зацепления: доказательства частей (b) теорем

Лемма 3.1. *Пусть L есть $L_1 \# L_2$ или $L_1 \sqcup L_2$. Пусть S — поверхность Зейферта для L с максимальной эйлеровой характеристикой. Тогда сферу S^3 можно представить в виде объединения вложенных шаров $S^3 = B_1 \cup B_2$ таких, что:*

(i) *$B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$;*
(ii) *$\partial(S \cap B_j) = L_j$ для $j = 1, 2$;*
(iii) *$S \cap \partial B_1$ является вложенным отрезком в случае $L = L_1 \# L_2$, и пустым множеством в случае $L = L_1 \sqcup L_2$.*

Доказательство. Утверждение леммы доказывается так же, как аддитивность рода узла. А именно, пусть $S^3 = B_1 \cup B_2$ — разбиение S^3 из определения связной или несвязной суммы. Можно считать, что ∂B_1 трансверсально S. Если пара (B_1, B_2) не такая, как требуется, то существует замкнутая кривая C в $S\cap\partial B_1$, ограничивающая диск D в $\partial B_1\setminus S$. Если C ограничивает еще и диск D' в S, то $D\cup D'$ ограничивает шар $B\subset B_j$, $j=1$ или 2, и тогда, заменив B_{3-j} на утолщение объединения $B_{3-j}\cup B$, мы уменьшим число компонент связности множества $S\cap\partial B_1$. В противном случае, мы можем приклеить двумерную ручку к S вдоль D и удалить замкнутую компоненту, если таковая образуется. Но эта операция увеличивает величину $\chi(S)$, что противоречит ее максимальности. $\square$

Если коса из n нитей X является произведением c ленточных образующих, то у представляемого ей зацепления есть поверхность Зейферта специальной формы, эйлерова характеристика которой равна $n-c$. Она получена приклеиванием c положительно перекрученных полосок к n параллельным дискам, причем полоска, соответствующая образующей $\sigma_{i,j}$ соединяет i-й диск с j-м; см. детали в [14]. Такая поверхность называется *квазиположительной поверхностью Зейферта*.

Доказательство теорем 1.1(б) и 1.2(б). ($\Leftarrow$) Следует из (1).

($\Rightarrow$) Пусть L сильно квзиположительно. Пусть S — квазиположительная поверхность Зейферта для L. По неравенству Беннекена [2, гл. II, теорема 3], S имеет наибольшую эйлерову характеристику среди всех поверхностей Зейферта зацепления L. Следовательно, сферу S^3 можно разрезать на два шара $S^3=B_1\cup B_2$, как в лемме 3.1. Тогда $B_j\cap S$ — поверхность Зейферта для L_j, являющаяся полной подповерхностью в S (см. определение [14, p. 231]), следовательно, $B_j\cap S$ изотопна квазиположительной поверхности согласно основному результату статьи [14], из чего вытекает сильная квазиположительность L_j. $\square$

Доказательство теоремы 1.3(б). ($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Пусть S — квазиположительная поверхность Зейферта. Те же рассуждения, что и в доказательстве теорем 1.1(б) и 1.2(б), показывают, что S — несвязное объединение $S_1\cup S_2$, где $\partial S_j=L_j$. Тогда каждая из поверхностей S_j квазиположительна по построению. $\square$

Цитированная литература

1. E. Bedford, W. Klingenberg, *On the envelope of holomorphy of a 2-sphere in* $\mathbb{C}^2$, J. Am. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 623–646.
2. D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque **107-8** (1982), 87–161.
3. J. Birman, K.-H. Ko, S.-J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Adv. Math. **139** (1998), 322–353.
4. M. Boileau and S. Orevkov, *Quasipositivité d'une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **332** (2001), 825–830.
5. J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, Available online at https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜demailly/documents.html.
6. Ya. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its applications*, in: Geometry of Low-Dimensional Manifolds, Vol. 2 (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 151, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, pp. 45–67.
7. О. Г. Ерошкин, *Об одном топологическом свойстве края аналитического подмножества строго псевдовыпуклой области в* $\mathbb{C}^2$, Матем. заметки, **49:5** (1991), 149–151.
8. J. B. Etnyre, J. Van Horn-Morris, *Fibered transverse knots and the Bennequin bound*, Int. Math. Res. Not. IMRN, **2011** (2011), 1483–1509.

9. K. Hayden, *Minimal braid representatives of quasipositive links*, Pac. J. Math. **295** (2018), 421–427.
10. Н. Г. Кружилин, *Двумерные сферы на границах псевдовыпуклых областей в* $\mathbb{C}^2$, Изв. АН СССР, сер. матем., **55:6** (1991), 1194–1237.
11. S. Orevkov, *Markov moves for quasipositive braids*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **331** (2000), 557–562.
12. S. Orevkov, *Some examples of real algebraic and real pseudoholomorphic curves*, In: Perspectives in Analysis, Geometry and Topology, Progr. in Math. 296, Birkhäuser/Springer, N. Y., 2012, pp. 355–387.
13. L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191–201.
14. L. Rudolph, *A characterization of quasipositive Seifert surfaces (constructions of quasipositive knots and links, III)*, Topology **31** (1992), 231–237.
15. L. Rudolph, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29(1)** (1993), 51–59.
16. A. Takeuchi, *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif*, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 159–181.

Математический институт им. В. А. Стеклова. ул. Губкина 8, Москва 119991 Россия

IMT, l'univserité Toulouse-3, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse France