ПОТЕНЦИАЛ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОБРАЗА КРУГА

С.Ю. Оревков

Пусть D — область в $\mathbf{C}$, являющаяся образом $q(\Delta)$ единичного круга Δ при отображении $t \mapsto q(t)$, где

$$q(t) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_n t^{n+1}, \qquad a_0 \in \mathbf{R}, \quad |a_0| > 0 \tag{1}$$

— многочлен, однолистный в Δ.

Пусть $p(z) = \pi^{-1} \int_D (z-\zeta)^{-1} d\mu(\zeta)$ — потенциал области D $(d\mu(x+iy) = dx\,dy)$. Обратная задача теории потенциала — это задача восстановления D по ростку p на ∞ (см. [1] и цитированную там литературу). При $|z| \gg 1$

$$p(z) = \sum_{k\ge 0} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \qquad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{\pi}\int_D \zeta^k d\mu(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_\Delta q(t)^k q'(t)\overline{q'(t)}\, d\mu(t). \tag{2}$$

(c_k — моменты области D). При помощи правой части (2) можно задать $p(z)$ для любого многочлена $q(t)$ вида (1), не обязательно однолистного. Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int_\Delta t^k \bar t^m\, d\mu(t) = \begin{cases} 1/(k+1), & \text{при } k=m \\ 0, & \text{при } k\ne m, \end{cases} \tag{3}$$

(2) позволяет выразить c_k как многочлены от $a_0, a_1, \ldots, a_n, \bar a_1, \ldots, \bar a_n$ с рациональными коэффициентами. Из (2), (3) следует, что $c_k = 0$ при $k > n$. Поэтому,

$$p(z) = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + \ldots + c_n z^{-(n+1)}, \qquad c_0 \in \mathbf{R}, \quad |c_0| > 0 \tag{4}$$

Таким образом, мы получили полиномиальное отображение $\eta : V^+ \to W^+$, где V (соотв. W) есть векторное пространство над $\mathbf{R}$, изоморфное $\mathbf{R}\times\mathbf{C}^n$, с координатами $(a_0, \ldots, a_n)$ (соотв. $(c_0, \ldots, c_n)$), V^+ (соотв. W^+) есть полупространство $a_0 > 0$, (соотв. $c_0 > 0$) и η задано как $\eta(q) = p$. Мы отождествляем точки V^+ (соотв. W^+) с многочленами q вида (1) (соотв. вида (4)).

Обозначим через $j(\eta)$ якобиан отображения η относительно форм объема $da_n \wedge \ldots \wedge da_1 \wedge da_0 \wedge d\bar a_1 \wedge \ldots \wedge d\bar a_n$ и $dc_n \wedge \ldots \wedge dc_1 \wedge dc_0 \wedge d\bar c_1 \wedge \ldots \wedge d\bar c_n$. Для $q \in V$ определим $t_1, \ldots, t_n$ формулой $q'(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i t)$.

Теорема. $j(\eta) = 2a_0^{n^2+n+1}\operatorname{Res}_t(t^n \bar q'(t^{-1}),\, q'(t)) = 2a_0^{n^2+3n+1}\prod_{i,j=1}^n (1 - t_i \bar t_j)$.

Замечание. (П. Этингоф) Похожая формула встречается в конформной теории поля как формула для коцикла, задающего центральное расширение комплексификации группы $\operatorname{Diff}(S^1)$.

Пусть $\mathcal{I}_n = \{q \in V^+ \mid q' \text{ не имеет корней в } \Delta\}$.

При частичной поддержке грантов РФФИ-96-01-01218 и DGICYT SAB95-0502

Следствие 1. (см. [1]) *Ограничение η на $\operatorname{Int}\mathcal{I}_n$ — погружение.*

Следствие 2. *Замыканием складки отображения η является (вещественная) гиперповерхность $F = \{q \in V^+ \mid \exists t_i,\ q'(t_i) = 0$ и $|t_i| = 1\}$.*

Следствие 3. *Замыканием множества ветвления отображения η является подмногообразие коразмерности два $B = \{q \in V^+ \mid \exists t_i \neq t_j,\ t_i\bar{t}_j = 1\}$*

Доказательство теоремы. Обозначим $\partial/\partial a_m$ через ∂_m, и $\partial/\partial\bar{a}_m$ через $\bar{\partial}_m$, $m = 0, ..., n$. ($\partial_0 = \bar{\partial}_0$). Положим

$$J = \begin{pmatrix} \bar\partial_n c_n & \dots & \bar\partial_1 c_n & \partial_0 c_n & \partial_1 c_n & \dots & \partial_n c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar\partial_n c_1 & \dots & \bar\partial_1 c_1 & \partial_0 c_1 & \partial_1 c_1 & \dots & \partial_n c_1 \\ \bar\partial_n c_0 & \dots & \bar\partial_1 c_0 & \partial_0 c_0 & \partial_1 c_0 & \dots & \partial_n c_0 \\ \bar\partial_n \bar c_1 & \dots & \bar\partial_1 \bar c_1 & \partial_0 \bar c_1 & \partial_1 \bar c_1 & \dots & \partial_n \bar c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar\partial_n \bar c_n & \dots & \bar\partial_1 \bar c_n & \partial_0 \bar c_n & \partial_1 \bar c_n & \dots & \partial_n \bar c_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{n,n} & & \mathbf{0} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ A_{1,n} & \dots & A_{1,1} & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \bar A_{1,1} & \dots & \bar A_{1,n} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \mathbf{0} & & \bar A_{n,n} \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{2a_0}\begin{pmatrix} & & & -(n+1)\bar a_n & & & \\ & 2a_0E & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ & & & -2\bar a_1 & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 2a_1 & & & \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & 2a_0E & \\ & & & (n+1)a_n & & & \end{pmatrix}$$

где $A_{k,j}$, $j \geq k > 1$ — многочлены от $a_0^{\pm1}, a_m, \bar{a}_m$, такие что $\sum_{j\geq k} A_{k,j}q^j = t^k$. Вычислим AJ. Положим $A_{k,j} = 0$ при $j < k$, $A_{0,0} = 1$, $A_{0,j} = 0$ при $j > 0$, и $a_m = 0$ вне $0 \leq m \leq n$. Обозначим $\frac{1}{\pi}\int_\Delta f(t)\overline{g(t)}\,d\mu(t)$ через $\langle f, g\rangle$. Тогда (3) означает $\langle t^k, t^m\rangle = \delta_{km}/(k+1)$. Заметим, что $\partial_m q = t^{m+1}$, $\partial_m q' = (m+1)t^m$ и

$$(\partial_m q^j)\cdot q' = \frac{dq^j}{dq}\cdot\partial_m q\cdot q' = \frac{dq^j}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}\cdot\partial_m q = \frac{dq^j}{dt}\cdot\partial_m q.$$

Следовательно, при всех $m \geq 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_j A_{k,j}\langle\partial_m(q^jq'), q'\rangle &= \Big\langle(\partial_m q)\cdot\frac{d}{dt}\sum A_{k,j}q^j, q'\Big\rangle + \Big\langle(\partial_m q')\cdot\sum A_{k,j}q^j, q'\Big\rangle \\ &= \langle t^{m+1}\cdot kt^{k-1}, q'\rangle + \langle(m+1)t^m\cdot t^k, q'\rangle \\ &= (m+k+1)\langle t^{m+k}, q'\rangle = (m+k+1)\bar{a}_{m+k}, \end{aligned}$$

$$\sum_j A_{k,j}\langle q^jq', \partial_m q'\rangle = \langle q't^k, (m+1)t^m\rangle = (m-k+1)a_{m-k}$$

Поэтому, элементы верхнего правого квадранта в AJ (соотв. верхнего левого квдранта, верхней части среднего столбца) равны соотв.

$$\begin{aligned} \sum A_{k,j}\partial_m c_j &= \sum A_{k,j}\langle\partial_m(q^jq'), q'\rangle = (m+k+1)\bar{a}_{m+k}, \qquad m > 0, \\ \sum A_{k,j}\bar\partial_m c_j &= \sum A_{k,j}\langle q^jq', \partial_m q'\rangle = (m-k+1)a_{m-k}, \qquad m > 0, \\ \sum A_{k,j}\partial_0 c_j &= \sum A_{k,j}(\langle\partial_0(q^jq'), q'\rangle + \langle q^jq', \partial_0 q'\rangle) = (k+1)\bar{a}_k - (k-1)a_{-k}. \end{aligned}$$

Каждый элемент нижней части AJ сопряжен центрально симметричному элементу верхней части. Значит,

$$AJ = \left(\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & & \mathbf{0} & & \text{(n+1)}\bar{a}_n & & & \mathbf{0} & \\
2a_1 & a_0 & & & n\bar{a}_{n-1} & \text{(n+1)}\bar{a}_n & & & \\
\vdots & 2a_1 & \ddots & & \vdots & n\bar{a}_{n-1} & \ddots & & \\
na_{n-1} & \vdots & \ddots & a_0 & 2\bar{a}_1 & \vdots & \ddots & \text{(n+1)}\bar{a}_n & \\
\text{(n+1)}a_n & na_{n-1} & \dots & 2\bar{a}_1 & 2a_0 & 2\bar{a}_1 & \dots & n\bar{a}_{n-1} & \text{(n+1)}\bar{a}_n \\
 & \text{(n+1)}a_n & \ddots & \vdots & 2a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & n\bar{a}_{n-1} \\
 & & \ddots & n\bar{a}_{n-1} & \vdots & & \ddots & 2\bar{a}_1 & \vdots \\
 & & & \text{(n+1)}\bar{a}_n & na_{n-1} & & & a_0 & 2a_1 \\
 & \mathbf{0} & & & \text{(n+1)}a_n & & \mathbf{0} & & a_0
\end{array}\right)$$

Умножая AJ справа на M, мы заменяем средний столбец на $(0, ..., 0, a_0, 2a_1, ..., (n+1)a_n)^t$ и получаем матрицу с верхней строкой $(a_0, 0, ..., 0)$, и дополнительный минор к a_0 — транспонированная матрица Сильвестра для результанта $a_0 + 2a_1 t + ... + (n+1)a_n t^n$ и $(n+1)\bar{a}_n + n\bar{a}_{n-1}t + ... + \bar{a}_0 t^n$. Значит,

$$\det A \det J \det M = a_0 \operatorname{Res}_t(q', t^n \bar{q}'(t^{-1})).$$

Ясно, что $\det M = 1/2$ и $A_{k,k} = a_0^{-k}$, что влечет $\det A = \prod A_{k,k}^2 = a_0^{-n(n+1)}$. Осталось заметить, что обращение порядка элементов ∂a_m в J меняет знак таким же образом, как и перестановка аргументов результанта.

Я благодарю П. Этингофа и Н.Г. Кружилина за полезные обсуждения.

Список литературы

1. А.И. Прилепко, *Потенциала теория, обратные задачи*, Математическая Энциклопедия, Т. 4.

Математический институт РАН им. В.А. Стеклова, Москва, ул. Губкина, д.8