НЕРАВЕНСТВА ПЕТРОВСКОГО–ОЛЕЙНИК И КОМБИНАТОРИКА Т-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ВИРО

С.Ю.Оревков

Введение

Пусть $X \subset \mathbf{RP}^{n-1}$ — гладкая вещественная алгебраическая гиперповерхность, заданная уравнением $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, где f — однородный многочлен степени m с вещественными коэффициентами. Неравенство Петровского – Олейник (в форме, данной Арнольдом [1]) таково:

$$|\chi(S_+^{n-1})| \le \Pi_n(m), \qquad (*)$$

где χ обозначает эйлерову характеристику, $S_+^{n-1} = \{x \in S^{n-1} \mid f(x) \ge 0\}$ (как обычно, S^{n-1} обозначает $(n-1)$-мерную сферу) и $\Pi_n(m)$ — *число Петровского*:

$$\Pi_n(m) = \#\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n \mid 0 < k_i < m;\ k_1 + \dots + k_n = mn/2\}.$$

Это число целых внутренних точек на сечении n-мерного куба со стороной m гиперплоскостью, ортогональной диагонали и проходящей через центр куба. Петровский показал, что (*) точно при $n = 3$; Виро [14] показал, что (*) точно при $n = 4$. Настоящая статья возникла из неудачной попытки доказать, что (*) точно при всех n.

Вещественная алгебраическая гиперповерхность называется *Т-гиперповерхностью Виро* если ее можно построить методом Виро [15] по триангуляции и многочлену, имеющему ненулевые мономы лишь в вершинах триангуляции (см. в §2 точное определение). T-гиперповерхностями Виро были впервые реализованы: контрпримеры к гипотезе Рэгсдэйл [7]; примеры M-гиперповерхностей (и M-полных пересечений) любой степени и любой размерности [8]; примеры $\exp(Cm^{3/2})$ попарно неизотопных плоских M-кривых степени m (см. [12], в построении применена техника из [6]).

В этой статье мы даем комбинаторную интерпретацию неравенств Петровского – Олейник для Т-гиперповерхностей в терминах триангуляций. А именно, мы переписываем каждую часть неравенства (*) в виде некоторой суммы по всем симплексам триангуляции (см. (4.3), (6.2)), и показываем, что каждое слагаемое в левой части не превосходит соответствующего слагаемого в правой части (см. (7.3). Другими словами, мы раскладываем (*) в сумму локальных неравенств.

Во-первых, это дает другое доказательство неравенства Петровского – Олейник в случае Т-гиперповерхностей. Во-вторых, для Т-гиперповерхностей это дает необходимое и достаточное условие для знака равенства в (*): “=” имеет место в (*) если и только если “=” имеет место во всех локальных неравенствах. Вопрос о “=” в локальных неравенствах обсуждается в §§7–9.

Доказательство локальных неравенств основано на относительной версии неравенств Мак-Муллена на числа k-мерных граней симплициального многогранника. Относительные неравенства Мак-Муллена сформулированы и доказаны в Приложении (совместно с Р. Мак-Ферсоном).

Я благодарен А.Г.Хованскому, О.Я.Виро, И.Итенбергу и Е.Шустину за полезные обсуждения.

§1. Определения и обозначения

(1.1). На продолжении всей статьи n и m будут обозначать соответственно размерность и степень (см. введение). Обозначим множество $\{1, 2, \dots, n\}$ через $\bar{n}$. Пусть $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ — симплекс $\Delta = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0;\ x_1 + \dots + x_n = m\}$.

Мы будем обозначать через $[p_1, \dots, p_k]$ выпуклую оболочку точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}^n$.

При $x \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{Z}^n$, обозначим $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ через x^a.

Для конечного множества M обозначим число его элементов через $|M|$ или через $\#M$.

Для многочлена $p(t)$ обозначим через $\operatorname{coef}_\alpha(p)$ коэффициент при t^α.

Аффинной оболочкой множества $A \subset \mathbf{R}^n$ называется минимальная аффинная плоскость, содержащая A. Аффинная плоскость $V \subset \mathbf{R}^n$ называется *целочисленной* если она совпадает с аффинной оболочкой множества $V \cap \mathbf{Z}^n$. Любая k-мерная целочисленная аффинная плоскость будет снабжена *целочисленным k-мерным объемом*, который нормирован условием, что объем фундаментального параллелепипеда решетки $V \cap \mathbf{Z}^n$ равен 1.

(1.2) Триангуляции. *k-Симплекс* в $\mathbf{R}^n$ $(k \le n)$ — это выпуклая оболочка $k+1$ точек в общем положении. Если τ — грань симплекса σ, будем писать $\tau \le \sigma$. Пустой симплекс $\varnothing$ и сам σ всегда считаются гранями симплекса σ. *Внутренность* $\operatorname{Int}\sigma$ симплекса σ — это внутренность по отношению к аффинной оболочке симплекса σ (если $\dim\sigma = 0$, то $\operatorname{Int}\sigma = \sigma$).

Симплициальный комплекс в $\mathbf{R}^n$ — это множество Σ, состоящее из симплексов, удовлетворяющее стандартным аксиомам: (1) если $\sigma \in \Sigma$ и $\tau \le \sigma$, то $\tau \in \Sigma$; (2) если $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, то $\tau \le \sigma_1$ и $\tau \le \sigma_2$. (В частности, пустой симплекс $\varnothing$ всегда является элементом Σ.)

Для симплициального комплекса Σ, обозначим через $[\Sigma]$ его *носитель*: $[\Sigma] = \cup_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ и обозначим через $\operatorname{Som}\Sigma$ множество вершин. Σ называется *триангуляцией* множества $X \subset \mathbf{R}^n$ если $[\Sigma] = X$.

Симплекс (или триангуляция) называется *целочисленным(ой)* если все его (ее) вершины являются целыми точками.

§2. T-гиперповерхности Виро

(2.1) Регулярные триангуляции. Пусть $\Delta \in \mathbf{R}^n$ обозначает то же, что в (1.1). Целочисленная триангуляция Σ симплекса Δ называется *регулярной*, если существует выпуклая функция $\varphi : \Delta \to \mathbf{R}$, которая линейна на каждом $\sigma \in \Sigma$ и нелинейна на $\sigma_1 \cup \sigma_2$ для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $\sigma_1 \ne \sigma_2$, $\dim\sigma_1 = \dim\sigma_2 = n-1$.

Такая функция φ называется Σ-*выпуклой.* Пример нерегулярной триангуляции см. в [4; стр. 119, рис. 3].

(2.2) Индуцированная триангуляция окраэдра. Пусть Σ — регулярная триангуляция симплекса of Δ (см. (2.1)). Обозначим через g_i отражение в координатной гиперплоскости $x_i = 0$ и пусть $G = (\mathbf{Z}/2)^n$ — группа, порожденная отражениями $g_1, ..., g_n$. Ясно, что $G = \{g_I \mid I \subset \bar{n}\}$, где $g_I = \prod_{i\in I} g_i$. Положим $\hat{\Delta} = G\Delta = \bigcup_{g\in G} g\Delta$ и $\hat{\Sigma} = \{g\sigma \mid \sigma \in \Sigma, g \in G\}$. Тогда $\hat{\Delta}$ есть n-мерный октаэдр, и $\hat{\Sigma}$ — его триангуляция.

Лемма. *$\hat{\Sigma}$ комбинаторно эквивалентна комплексу граней некоторого выпуклого многогранника.*

Доказательство. Спроектируем $\mathrm{Graph}(\varphi) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ на $\mathbf{R}^n \times 0$ из точки $(0, -y)$ при $y \gg 1$ и отразим результат относительно всех координатных гиперплоскостей. $\square$

(2.3) T-гипорповерхности Виро. Пусть Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. (2.1)) и s — распределение знаков на Σ. (*Распределение знаков* — это произвольная функция $s : \mathrm{Som}\,\Sigma \to \{-1, +1\}$.) Пусть φ — некоторая Σ-выпуклая функция (см. (2.1)). Тогда *T-гиперповерхностью Виро*, ассоциированной с (Σ, s) называется гиперповерхность $X_{(\Sigma,s)} \subset \mathbf{RP}^{n-1}$, заданная уравнением $f_\varepsilon(x) = 0$, при достаточно малом ε, где

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{a\in\mathrm{Som}\,\Sigma} s(a)\varepsilon^{\varphi(a)}x^a$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$, с точностью до объемлющей изотопии, $X_{(\Sigma,s)}$ не зависит от выбора φ и ε. Топологический тип пары $X_{(\Sigma,s)}$ может быть явно описан следующим образом.

Пусть g_i и g_I как в (2.2). Продолжим распределение знаков s на $\mathrm{Som}\,\hat{\Sigma}$: если $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathrm{Som}\,\hat{\Sigma}$ и $s(a)$ уже заданы, то положим $s(g_i(a)) = (-1)^{a_i}s(a)$. Тогда, при $a \in \mathrm{Som}\,\Sigma$ имеем $s(g_I(a)) = s(a) \cdot \prod_{i\in I}(-1)^{a_i}$. Обозначим: $\hat{\Sigma}_+ = \{\sigma \mid s(v) = +1$ для любой вершины v симплекса $\sigma\}$. Тогда $\mathrm{Som}\,\hat{\Sigma}_+ = \{a \in \mathrm{Som}\,\hat{\Sigma} \mid s(a) = +1\}$.

Пусть $\hat{\Delta}$ и $\hat{\Sigma}$ будут как в (2.2), и пусть $\hat{\Sigma}'$ — барицентрическое подразделение триангуляции $\hat{\Sigma}$. Обозначим: $S^{n-1}_+ = S^{n-1} \cap \{f_\varepsilon \geq 0\}$ (как в (1)) и $\hat{\Delta}_+ = \bigcup_{a\in\mathrm{Som}\,\hat{\Sigma}_+} \mathrm{Star}_{\hat{\Sigma}'}(a)$.

Теорема. (Виро [15]) *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм $(S^{n-1}, S^{n-1}_+) \approx (\hat{\Delta}, \hat{\Delta}_+)$.*

§3. Комбинаторные многочлены

(3.1) Относительный H-многочлен выпуклого многогранника. Пусть $P \in \mathbf{R}^n$ — выпуклый симплициальный многогранник, такой что $\dim P = n$.

Пусть f_k — число его граней размерности k. Зададим H-многочлен[1] многогранника P как

$$H_P(t) = \sum_{i=0}^{n} h_i t^i = (t-1)^n + \sum_{k=1}^{n} f_{k-1} \cdot (t-1)^{n-k} = \sum_{\tau < P} (t-1)^{n-d(\tau)},$$

где $d(\tau) = 1 + \dim \tau$ (Напомним, что $\tau < P$ означает что τ есть грань P; по соглашению, $\varnothing < P$ и $d(\varnothing) = 0$.)

Если $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $k \le n$ — набор гиперплоскостей в общем положении, согласованный с P, то назовем $H^{rel}_{P,\alpha}$ *относительным H-многочленом многогранника P по отношению к α* (см. Приложение).

Примеры. (a) Если P — симплекс, то $H_P(t) = 1 + t + \cdots + t^n$. (b) Если P — октаэдр, то $H_P(t) = (1+t)^n$. (c) Если S — k-кратная надстройка над P, то $H_S(t) = (t+1)^k H_P(t)$.

(3.2) Комбинаторный многочлен грани триангуляции симплекса Δ. Пусть Δ обозначает то же что в (1.1), и Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. (2.1)). Пусть τ — любой симплекс из Σ (возможно, $\tau = \varnothing$). Следуя [1], определим *комбинаторный многочлен грани* τ как

$$R_\tau(t) = \sum_{\sigma \ge \tau} (-1)^{n-k(\sigma)} (t-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)},$$

где $d(\sigma) = 1 + \dim \sigma$ — размерность конуса над σ, и $k(\sigma)$ — размерность минимальной координатной гиперплоскости, содержащей σ.

(3.3) Срез грани. Пусть τ — грань выпуклого симплициального многогранника $P \subset \mathbf{R}^n$, такая что $0 \in \operatorname{Int} P$. Пусть L — линейный функционал, задающий опорную гиперплоскость грани τ, т.е. $L|_P \le 1$ и $L(x) = 1$ если и только если $x \in \tau$. Пусть β_τ — пересечение гиперплоскости $\{L = 1 - \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ с плоскостью размерности $n - \dim \tau$, трансверсальной к τ и пересекающей $\operatorname{Int} \tau$. Определим *срез* грани τ как $\tau^* = P \cap \beta_\tau$. Следующая лемма A — стандартный факт о выпуклых многогранниках, и лемма B доказывается аналогично.

Лемма A. *Отображение $\sigma \mapsto \sigma \cap \beta_\tau$ задает монотонную (т.е. сохраняющую порядок “$\le$”) биекцию множества $\{\sigma \,|\, \tau \le \sigma < P\}$ на множество граней многогранника τ^*.* $\square$

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}$ — набор гиперплоскостей, согласованный с P (см. Приложение). Положим $\alpha_\tau = \{\alpha_i \cap \beta_\tau \,|\, \alpha_i \in \alpha \;\&\; \tau \subset \alpha_i\}$

Лемма B. *α_τ согласован с τ^*.* $\square$

---

[1] В Приложении H-многочлен многогранника называется *многочленом Пуанкаре*. Однако, в основном тексте статьи мы используем термин H-многочлен, так как, следуя Арнольду, [1], мы вводим в §5 многочлен Пуанкаре грани.

(3.4) Обозначения. Пусть $\hat\Delta$, $\hat\Sigma$ обозначают то же, что и в (2.2). Обозначим через

$$\hat{\sum_{cond(\sigma)}} expr(\sigma); \qquad \text{соответственно:} \quad \sum_{cond(\sigma)} expr(\sigma)$$

сумму выражения $expr(\sigma)$ по всем симплексам $\sigma \in \hat\Sigma$ (соответственно: $\sigma \in \Sigma$; вкючая в обоих случаях пустой симплекс!), удовлетворяющим условию $cond(\sigma)$.

Пусть $k(\sigma)$ обозначает то же, что и в (3.2). Следующая лемма очевидна.

Лемма. *Если $\tau \in \Sigma$, то*

$$\hat{\sum_{\sigma \geq \tau;\, cond(\sigma)}} expr(\sigma) = \sum_{\sigma \geq \tau;\, cond(\sigma)} 2^{k(\sigma)-k(\tau)} expr(\sigma)$$

(3.5) Сравнение H^{rel} и R_τ. Пусть Δ обозначает то же, что и в (1.1), и Σ — некоторая регулярная триангуляция симплекса Δ. Пусть $\hat\Delta$ и $\hat\Sigma$ обозначают то же, что и в (2.2). Обозначим через $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$ набор координатных гиперплоскостей $\alpha_i = \{x_i = 0\}$. Пусть τ — одна из граней $\hat\Delta$. Определим τ^* и α_τ как в (3.3), предполагая что P — выпуклая реализация $\hat\Delta$ (см. лемму (2.2)).

Предложение. *Если $\tau \in \Sigma$, то $H^{rel}_{\tau^*,\alpha_\tau}(t) = 2^{n-k(\tau)} R_\tau(t)$.*

Доказательство. Для $I \subset \bar n$ обозначим: $\alpha_I = \bigcap_{i\in I} \alpha_i$ и $k(\alpha_I) = \dim \alpha_I = n - |I|$. Тогда

$$\begin{aligned}
H^{rel}_{\tau^*,\alpha_\tau}(t) &= \sum_{\alpha_I \geq \tau} (-1)^{|I|}(t+1)^{|I|} H_{\tau^*\cap\alpha_I}(t) \\
&= \sum_{\alpha_I \geq \tau} (-1)^{|I|}(t+1)^{|I|} \hat{\sum_{\tau\leq\sigma\leq\alpha_I}} (t-1)^{k(\alpha_I)-d(\sigma)} && \text{по лемме (3.3.A)} \\
&= \sum_{\alpha_I \geq \tau} (-1)^{|I|}(t+1)^{|I|} \sum_{\tau\leq\sigma\leq\alpha_I} 2^{k(\sigma)-k(\tau)}(t-1)^{k(\alpha_I)-d(\sigma)} && \text{по леме (3.4)} \\
&= \sum_{\sigma\geq\tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(t-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)} 2^{k(\sigma)-k(\tau)} \sum_{\alpha_I\geq\sigma} (t+1)^{n-k(\alpha_I)}(1-t)^{k(\alpha_I)-k(\sigma)} \\
&= \sum_{\sigma\geq\tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(t-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)} 2^{k(\sigma)-k(\tau)} \cdot 2^{n-k(\sigma)} = 2^{n-k(\tau)} R_\tau(t). && \square
\end{aligned}$$

Вместе с теоремой 1 Приложения и (2.2), (3.3.B) это дает

(3.6) Следствие. *R_τ симметричен и унимодален* $\square$

§4. Левая часть неравенства Петровского – Олейник для T-гиперповерхностей

(4.1) Обозначения. Пусть $\tau \subset \mathbf{R}^n$ — целочисленный симплекс, вершины которого $v_1, \dots, v_d$ лимнейно независимы. Положим

$$e(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{если } v_1 + \dots + v_d \in 2\mathbf{Z}^n \text{ или если } \tau = \varnothing \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $e(\tau)=1$, мы скажем, что τ *четен*, иначе τ *нечетен*.

Пусть G, $\hat\Delta$, $\hat\Sigma$ обозначают то же, что в (2.2), и пусть $\tau\in\hat\Sigma$. Тогда обозначим: $s(\tau)=\prod_{i=1}^d s(v_i)$, где $v_1,\dots,v_d$ — вершины симплекса τ.

Лемма. *При* $\tau\in\Sigma$ *имеем* $\sum_{\tau'\in G\tau} s(\tau')=2^{k(\tau)}s(\tau)e(\tau)$.

Доказательство. Ясно, что $|G\tau|=2^{k(\tau)}$. Пусть $v_1,\dots,v_d$ — вершины симплекса τ, и пусть $v=(x_1,\dots,x_n)=v_1+\dots+v_n$. Тогда $s(g_I\tau)=(-1)^{x_I}s(\tau)$, где $x_I=\sum_{i\in I}x_i$. Значит, если $e(\tau)=1$, то все x_I четны, и $\sum_{\tau'\in G\tau}s(\tau')=|G\tau|s(\tau)=2^{k(\tau)}s(\tau)$. Если же $e(\tau)=0$, то x_j нечетно при некотором j. Положим $G_j=\{g_I\,|\,j\notin I\subset\bar n\}$. Тогда $\sum_{\tau'\in G\tau}s(\tau)=\sum_{\tau'\in G_j\tau}\big(s(\tau')+s(g_j\tau')\big)=0$. $\square$

Следствие. (см. (3.4)) *Для любого выражения* $expr(\tau)$ *имеем*

$$\hat{\sum_\tau} s(\tau)\,expr(\tau)=\sum_\tau s(\tau)e(\tau)2^{k(\tau)}\,expr(\tau)$$

(4.2) Лемма. *Пусть обозначения будут как в (2.3). Тогда* $[\hat\Sigma_+]$ *— деформационный ретракт пространства* $\hat\Delta_+$ *(см. рис. 1).*

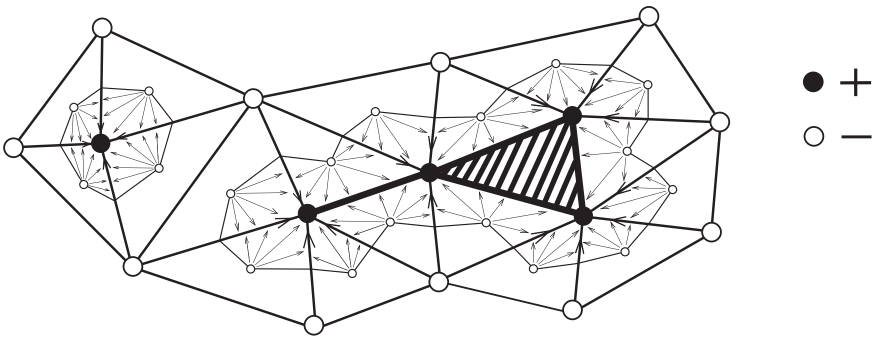

Рис. 1.

Доказательство. Рассмотрим последовательность множеств $[\hat\Sigma_+]=X_0\subset X_1\subset\dots\subset X_n=\operatorname{Int}\hat\Delta_+$, где

$$X_i=[\hat\Sigma_+]\cup\big([\operatorname{Skel}^i\hat\Sigma]\cap\operatorname{Int}\hat\Delta_+\big).$$

Построим последовательность деформационных ретракций $X_n\to X_{n-1}\to\dots\to X_0$ следующим образом.

Если $\sigma\in\hat\Sigma-\hat\Sigma_+$ — i-мерный симплекс, и b — барицентр симплекса σ, то $b\notin X_i$ и значит, $\sigma\cap X_i$ можно выдуть из b на $\partial\sigma\cap X_{i-1}$. Выполнив эту процедуру для всех i-мерных симплексов $\sigma\in\hat\Sigma-\hat\Sigma_+$, получим требуемую ретракцию $X_i\to X_{i-1}$. $\square$

(4.3) Предложение. *Пусть* $X = X_{(\Sigma,s)}$ *— некоторая Т-гиперповерхность Виро (см. (2.3)), заданная уравнением* $f = 0$. *Пусть* $S_+^{n-1} = S^{n-1} \cap \{f \geq 0\}$ *(как и в левой части (*)). Тогда*

$$\chi(S_+^{n-1}) = (-1)^{n-1} \sum_{\tau \in \Sigma} e(\tau)s(\tau)R_\tau(-1),$$

где $e(\tau)$ *и* $s(\tau)$ *определены как в (4.1) и* $R_\tau(t)$ *— комбинаторный многочлен грани* τ *(см. (3.2)).*

Доказательство. Из (2.3) и (4.2) следует, что $\chi(S_+^{n-1}) = \chi(\hat\Delta_+) = \chi([\hat\Sigma_+])$. Пусть $\mathbf{1}_{\hat\Sigma_+} : \hat\Sigma \to \{0,1\}$ и $\mathbf{1}_{\mathrm{Som}\,\hat\Sigma_+} : \mathrm{Som}\,\hat\Sigma \to \{0,1\}$ — характеристические функции множеств $\hat\Sigma_+$ и $\mathrm{Som}\,\hat\Sigma_+$, т.е. $\mathbf{1}_{\hat\Sigma_+}(\sigma) = 1$ если и только если $\sigma \in \hat\Sigma_+$, и $\mathbf{1}_{\mathrm{Som}\,\hat\Sigma_+}(v) = 1$ если и только если $v \in \mathrm{Som}\,\hat\Sigma_+$. Ясно, что $\mathbf{1}_{\mathrm{Som}\,\hat\Sigma_+}(v) = (s(v)+1)/2$. Пусть $d(\sigma)$, $k(\sigma)$ обозначают то же, что в (3.2). Тогда

$$\mathbf{1}_{\hat\Sigma_+}(\sigma) = \prod_{i=1}^{d(\sigma)} \mathbf{1}_{\mathrm{Som}\,\hat\Sigma_+}(v_i) = \prod_{i=1}^{d(\sigma)} \frac{s(v_i)+1}{2} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{d(\sigma)} \sum_{\tau \leq \sigma} s(\tau),$$

где $v_1, ..., v_{d(\sigma)}$ — вершины симплекса σ (напомним, что $\varnothing \leq \sigma$). Пусть $\hat\sum$ и $\sum$ обозначают то же, что и в (3.4). Тогда имеем

$$\begin{aligned}
-\chi(S_+^{n-1}) &= \hat\sum_{\sigma} (-1)^{d(\sigma)} \mathbf{1}_{\hat\Sigma_+}(\sigma) = \hat\sum_{\sigma} (-2)^{-d(\sigma)} \hat\sum_{\tau \leq \sigma} s(\tau) = \hat\sum_{\tau} s(\tau) \hat\sum_{\sigma \geq \tau} (-2)^{-d(\sigma)} \\
&= \sum_{\tau} s(\tau)e(\tau)2^{k(\tau)} \hat\sum_{\sigma \geq \tau} (-2)^{-d(\sigma)} \qquad \text{по следствию (4.1)} \\
&= \sum_{\tau} s(\tau)e(\tau)2^{k(\tau)} \sum_{\sigma \geq \tau} 2^{k(\sigma)-k(\tau)}(-2)^{-d(\sigma)} \qquad \text{по лемме (3.4)} \\
&= (-1)^n \sum_{\tau} s(\tau)e(\tau) \sum_{\sigma \geq \tau} (-1)^{n-k(\sigma)}(-2)^{k(\sigma)-d(\sigma)} \\
&= (-1)^n \sum_{\tau} s(\tau)e(\tau)R_\tau(-1). \qquad \square
\end{aligned}$$

§5. Многочлен Пуанкаре симплекса

(5.1) Определение. Для данного $S \subset \mathbf{R}^n$ и линейного функционала $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определим *ряд Пуанкаре множества* S *относительно* L как $[S]^L = \sum_{a \in S \cap \mathbf{Z}^n} t^{L(a)} = \sum_\alpha c_\alpha t^\alpha$, где c_α — число целых точек на гиперплоском сечении $S \cap \{L = \alpha\}$.

Пусть $\sigma \in \mathbf{R}^n$ — целочисленный симплекс с линейно независимыми вершинами $v_1, ..., v_d$. Пусть $C_\sigma = \mathbf{R}_+\sigma = \{x_1v_1 + ... + x_dv_d \,|\, x_i \geq 0\}$ — замкнутый конус, порожденный симплексом σ, и $\Pi_\sigma = \{x_1v_1 + ... + x_dv_d \,|\, 0 \leq x_i < 1\}$ — "полузамкнутый" параллелепипед.

Пусть L — линейный функционал, такой что $L|_\sigma = 1$. Следуя Арнольду [1],[2] определим *ряд Пуанкаре* p_σ (соотв.: q_σ) и *многочлен Пуанкаре* P_σ (соотв.: Q_σ) *грани* σ (соотв.: *внутренности грани* σ) следующим образом:

$$p_\sigma(t) = [C_\sigma]^L, \qquad q_\sigma(t) = [\operatorname{Int} C_\sigma]^L,$$
$$P_\sigma(t) = [\Pi_\sigma]^L, \qquad Q_\sigma(t) = [\operatorname{Int} \Pi_\sigma]^L$$

(при $\sigma = \varnothing$ положим по определению $p_\varnothing = q_\varnothing = P_\varnothing = Q_\varnothing = 1$).

(5.2) Примеры. (см. [1]) (a). Для Δ из (1.1) имеем

$$p_\Delta(t) = (1 - t^{1/m})^{-n} \qquad q_\Delta(t) = t^{n/m}(1 - t^{1/m})^{-n}$$
$$P_\Delta(t) = \left(\frac{1-t}{1-t^{1/m}}\right)^n \qquad Q_\Delta(t) = \left(\frac{t^{1/m}-t}{1-t^{1/m}}\right)^n$$

(b). Число Петровского (см. введение) равно $\Pi_n(m) = \operatorname{coef}_{n/2} Q_\Delta(t)$.

(5.3) Лемма. (см. [1]).

$$(a) \quad p_\sigma(t) = \sum_{\tau\le\sigma} q_\tau(t), \qquad (b) \quad q_\sigma(t) = \sum_{\tau\le\sigma} (-1)^{d(\sigma)-d(\tau)} p_\tau(t),$$
$$(c) \quad P_\sigma(t) = \sum_{\tau\le\sigma} Q_\tau(t), \qquad (d) \quad Q_\sigma(t) = \sum_{\tau\le\sigma} (-1)^{d(\sigma)-d(\tau)} P_\tau(t),$$

Доказательство. (a), (c) очевидны; (b), (d) вытекают из формулы включений-исключений.

(5.4) Лемма. (см. [1]). $P_\sigma(t) = p_\sigma(t) \cdot (1-t)^{d(\sigma)}$.

Доказательство. Пусть M — полугруппа, порожденная вершинами $v_1, ..., v_d$ симплекса σ. Ясно, что C_σ есть объединение непересекающихся множеств $m + \Pi_\sigma$ по всем $m \in M$. Заметим также, что для любого $m = m_1 v_1 + ... + m_d v_d \in M$ и для любого подмножества $S \subset \mathbf{R}^n$ имеем $[m+S]^L = t^{m_1+\dots+m_d}[S]^L$. Значит,

$$p_\sigma = [C_\sigma]^L = \sum_{m\in M} [m + \Pi_\sigma]^L = P_\sigma \sum_{m\in M} t^{m_1+\dots+m_d} = P_\sigma \cdot (1 + t + t^2 + ...)^d.$$

(5.5) Лемма. *Пусть τ — грань симплекса σ, и a, b — элементы любого коммутативного кольца. Тогда* $\sum_{\tau\le\lambda\le\sigma} a^{d(\sigma)-d(\lambda)} b^{d(\lambda)-d(\tau)} = (a+b)^{d(\sigma)-d(\tau)}$. □

(5.6) Лемма.

$$Q_\sigma(t) = \sum_{\tau\le\sigma} (-t)^{d(\sigma)-d(\tau)} q_\tau(t)\,(1-t)^{d(\tau)}; \quad q_\sigma(t)\,(1-t)^{d(\sigma)} = \sum_{\tau\le\sigma} t^{d(\sigma)-d(\tau)} Q_\tau(t).$$

[2]Наши обозначения рядов и многочленов Пуанкаре отличны от обозначений в [1].

Доказательство.

$$\begin{aligned}
Q_\sigma(t) &\overset{(5.3d)}{=} \sum_{\lambda\le\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}P_\lambda(t) \overset{(5.4)}{=} \sum_{\lambda\le\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}p_\lambda(t)\,(1-t)^{d(\lambda)}\\
&\overset{(5.3a)}{=} \sum_{\lambda\le\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}(1-t)^{d(\lambda)}\sum_{\tau\le\lambda}q_\tau(t)\\
&= \sum_{\tau\le\sigma}q_\tau(t)\,(1-t)^{d(\tau)}\sum_{\tau\le\lambda\le\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}(1-t)^{d(\lambda)-d(\tau)}\\
&\overset{(5.5)}{=} \sum_{\tau\le\sigma}q_\tau(t)\,(1-t)^{d(\tau)}\cdot(-t)^{d(\sigma)-d(\tau)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_\sigma(t)(1-t)^{d(\sigma)} &\overset{(5.3b)}{=} (1-t)^{d(\sigma)}\sum_{\lambda\le\sigma}(-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}p_\lambda(t)\\
&\overset{(5.4)}{=} \sum_{\lambda\le\sigma}(t-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}P_\lambda(t) \overset{(5.3c)}{=} \sum_{\lambda\le\sigma}(t-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)}\sum_{\tau\le\lambda}Q_\tau(t)\\
&= \sum_{\tau\le\sigma}Q_\tau(t)\sum_{\tau\le\lambda\le\sigma}(t-1)^{d(\sigma)-d(\lambda)} \overset{(5.5)}{=} \sum_{\tau\le\sigma}Q_\tau(t)\,t^{d(\sigma)-d(\tau)}.
\end{aligned}$$

§6. Правая часть неравенства Петровского – Олейник для Т-гиперповерхностей

(6.1) Предложение. *Пусть Σ — регулярная триангуляция симплекса Δ (см. (1.1), (2.1)). Тогда $Q_\Delta(t)=\sum_{\tau\in\Sigma}Q_\tau(t)R_\tau(t)$.*

Доказательство. Заметим, что если $\sigma\in\Sigma$ и $\operatorname{Int}\sigma\subset\operatorname{Int}\Delta'$ для некоторой грани Δ' симплекса Δ, то $d(\Delta')=k(\sigma)$. Значит,

$$\begin{aligned}
Q_\Delta(t) &= \sum_{\Delta'\le\Delta}(-t)^{n-d(\Delta')}q_{\Delta'}(t)\,(1-t)^{d(\Delta')} && \text{по (5.6; слева)}\\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma}(-t)^{n-k(\sigma)}q_\sigma(t)(1-t)^{k(\sigma)} && \text{так как } q_{\Delta'}=\sum_{\operatorname{Int}\sigma\subset\operatorname{Int}\Delta'}q_\sigma\\
&= \sum_{\sigma}(-t)^{n-k(\sigma)}(1-t)^{k(\sigma)-d(\sigma)}\sum_{\tau\le\sigma}t^{d(\sigma)-d(\tau)}Q_\tau(t) && \text{по (5.6; справа)}\\
&= \sum_{\tau}Q_\tau(t)\,t^{n-d(\tau)}\sum_{\sigma\ge\tau}(-1)^{n-k(\sigma)}(t^{-1}-1)^{k(\sigma)-d(\sigma)}\\
&= \sum_{\tau}Q_\tau(t)\,t^{n-d(\tau)}R_\tau(t^{-1}) = \sum_{\tau}Q_\tau(t)R_\tau(t) && \text{по симметрии } R_\tau.
\end{aligned}$$

(6.2) Следствие. *Для любой регулярног триангуляции Σ симплекса Δ имеем $\sum_{\tau\in\Sigma}\operatorname{coef}_{n/2}\big(Q_\tau(t)R_\tau(t)\big) = \Pi_n(m)$, где $\Pi_n(m)$ — число Петровского (см. введение). Поэтому, для T-гиперповерхности Виро $X_{(\Sigma,s)}$ (см. §2) (*) эквивалентно неравенству*

$$\left|\sum_{\tau\in\Sigma} e(\tau)s(\tau)R_\tau(-1)\right| \le \sum_{\tau\in\Sigma}\operatorname{coef}_{n/2}\big(Q_\tau(t)R_\tau(t)\big),$$

где $e(\tau)$, $s(\tau)$ определены в (4.1), R_τ — комбинаторный многочлен грани τ (см. (3.2)) и Q_τ — многочлен Пуанкаре внутренности грани τ (см. (5.1)).

Доказательство. Применим (*), (4.3), (5.2b) и (6.1). □

§7. Локальные неравенства

(7.1) Симметричные и унимодальные многочлены. Пусть $H(t)=\sum h_i t^i$ — некоторый многочлен, и $d\in\mathbf{Z}$. Скажем, что H *симметричен с центром* $t^{d/2}$, если $h_i=h_{d-i}$; H *унимодален с центром* $t^{d/2}$, если все его коэффициенты неотрицательны, $h_{i-1}\le h_i$ при $i\le d/2$, и $h_i\ge h_{i+1}$ при $i\ge d/2$.

Если многочлен $H(t)$ симметричен с центром $t^{d/2}$, мы будем обозначать коэффициент при $t^{d/2}$ через $\operatorname{mcoef} H$.

Мы будем следовать соглашению: если о многочлене, записанном в виде $\sum_{i=0}^d h_i t^i$, говорится, что он симметричен и/или унимодален, то центр подразумевается в $t^{d/2}$ даже если $h_d=0$.

Лемма. *Пусть $H(t)=\sum_{i=0}^d h_i t^i$ — симметричен и унимодален. Тогда:*

(a) $|H(-1)|\le h_{d/2}$;

(b) Пусть $d=2k$. Тогда $H(-1)=h_k$ если и только если $h_{2i}=h_{2i+1}$, $i=0,\dots,[(k-1)/2]$;

(c) Пусть $d=2k$. Тогда $H(-1)=-h_k$ если и только если $h_0=0$ и $h_{2i-1}=h_{2i}$, $i=1,\dots,[k/2]$.

Доказательство. Если d нечетно, то обе части в (a) равны нулю. Если $d=2k$, то $h_k-H(-1)=2(h_1-h_0)+2(h_3-h_1)+\dots$ и $h_k+H(-1)=2h_0+2(h_2-h_1)+2(h_4-h_3)+\dots$ □

(7.2) Следствие. *Пусть H_P — H-многочлен выпуклого симплициального многогранника размерности $d=2k$. (см. (3.1)). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a). $|H_P(-1)|=h_k$; *(b). $H_P(-1)=h_k$;* *(c). P — симплекс.*

Доказательство. H_P симметричен и унимодален (см. [13]). Значит, применима лемма (7.1):

(a) $\Longrightarrow$ (b). Иначе (7.1c) дало бы $h_d=0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c). По (7.1b) имеем $1=h_{d-1}$, значит, $f_0=d+1$ (см. (3.1)).

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a). См. пример (3.1a). □

(7.3) Следствие. *Пусть* Σ *— регулярная триангуляция симплекса* Δ, *и* $\tau \in \Sigma$. *Тогда*
$e(\tau)|R_\tau(-1)| \le \operatorname{coef}_{n/2}\big(Q_\tau(t)R_\tau(t)\big)$.

Доказательство. Положим $q = \operatorname{mcoef} Q_\tau$ и $r = \operatorname{mcoef} R_\tau$. Ясно, что $\operatorname{mcoef}(Q_\tau R_\tau) \ge qr$, $q \ge e(\tau)$, а из (3.6) и (7.1a) следует, что $r \ge |R_\tau(-1)|$. □

Вместе с (6.2) это дает комбинаторное доказательство неравенства (*) для Т-гиперповерхностей Виро.

(7.4) Определение. Триангуляция симплекса Δ (см. (1.1)) называется *локально экстремальной*, если она регулярна и для каждого симплекса τ (включая $\tau = \varnothing$) имеем

$$e(\tau)|R_\tau(-1)| = \operatorname{coef}_{n/2}\big(Q_\tau(t)R_\tau(t)\big). \qquad (**)$$

Следствие. *Пусть* $X = X_{(\Sigma,s)}$ *— Т-гиперповерхность Виро. Если имеет место "=" в (*), то* Σ *локально экстремальна.*

Доказательство. Сравните (6.2) и (7.3). □

(7.5) Приведенный многочлен Пуанкаре. Для $Q(t) = \sum_{\alpha\in A} q_\alpha t^\alpha$, $A \subset \mathbf{Q}$ и $\beta \in \mathbf{Q}$, определим β-редукцию многочлена $Q(t)$ как $\operatorname{red}_\beta Q(t) = \sum_{\alpha\in A\cap(\beta+\mathbf{Z})} q_\alpha t^\alpha$

Для Σ из (2.1) и $\tau \in \Sigma$ определим *приведенный многочлен Пуанкаре внутренности грани* τ как $\tilde{Q}_\tau = \operatorname{red}_{n/2} Q_\tau$ (см. §5). Из (6.1) (см. также (5.2b)) легко следует, что

$$\Pi_n(m) = \sum_{\tau\in\Sigma} \operatorname{mcoef}\big(\tilde{Q}_\tau(t)R_\tau(t)\big).$$

§8. Случай примитивной триангуляции

(8.1) Определение. Целочисленный i-мерный симплекс $\tau \in \mathbf{R}^n$ называется *минимальным*, если $\tau \cap \mathbf{Z}^n = \operatorname{Som}\tau$. Он называется *примитивным*, если его i-мерный объем равен $1/i!$. Триангуляция называется *примитивной* (соотв. *минимальной*) если каждый ее симплекс примитивен (соотв. минимален).

Ясно, что каждый примитивный симплекс минимален; если $\dim\tau \le 2$ то минимальность равносильна примитивности; если τ минимален и $\dim\tau \ge 3$, то его объем может быть сколь угодно велик.

Лемма. *Пусть* $\sigma \ne \varnothing$ *— целочисленный примитивный симплекс. Тогда:*

(a) Если σ *четен (см. (4.1)), то* $d(\sigma)$ *нечетно (т.е.* $\dim\sigma$ *четно).*
(b) Если вершины симплекса σ *линейно независимы, то* σ *имеет не более одной четной непустой грани.*
(c) Если $\sigma \subset \Delta$ *(см. (1.1)) и* m *четно, то* σ *имеет в точности одну четную непустую грань.*

Доказательство. Пусть V — линейная оболочка симплекса σ. Поскольку σ примитивен, существует $a \in V$ и базис $e_1, ..., e_d$ решетки $M = \mathbf{Z}^n \cap V$, такие что вершины симплекса σ суть $a+e_1, ..., a+e_d$. Пусть $a = \sum a_i e_i$ и пусть $I = \{i \mid a_i$ нечетно$\}$. Пусть τ — грань симплекса σ, натянутая на $\{a + e_j \mid j \in J\}$.

Предположим, что τ четен. Мы покажем (и из этого будет следовать (b)), что тогда $J = I$. Действительно, обозначим через v сумму вершин симплекса τ. Тогда $v = |J|a + \sum_{j\in J} e_j \in 2M$. Если бы $|J|$ было четным, то $|J|a$ был бы четным вектором, и все x_j, $j \in J$ были бы нечетными, где $v = \sum x_i e_i$ — разложение вектора v по базису $\{e_i\}$. Поэтому, $|J|$ нечетно (это доказывает (a)). Заметим, что $\sum_{i\in I} e_i \equiv a \pmod 2$, значит, $\sum_{i\in I} e_i + \sum_{j\in J} e_j \equiv a + \sum_{j\in J} e_j \equiv v \equiv 0 \pmod 2$. Но $\{e_i\}_{i\in\bar n}$ — базис в $M \otimes \mathbf{Z}_2$, следовательно, $J = I$. Для доказательства (c) заметим, что $J = I = \varnothing$ влечет $a \in 2M$, что противоречит тому, что $m \in 2\mathbf{Z}$. $\square$

(8.2) Предложение. *Пусть $\tau \in \mathbf{R}^n$ — примитивный симплекс с линейно независимыми вершинами. Тогда $\tilde Q_\tau(t) = e(\tau)t^{d(\tau)/2}$. В частности,* $\operatorname{mcoef}(Q_\tau R_\tau) = \operatorname{mcoef}(\tilde Q_\tau R_\tau) = e(\tau)\operatorname{mcoef} R_\tau(t)$.

Доказательство. Если $d(\tau)$ четно, то $\tilde Q(t) = 0$, и утверждение тривиально. Предположим, что $d = d(\tau)$ нечетно. Пусть V — линейная оболочка симплекса τ, L — линейный функционал на V, такой что $L|_\tau = 1$, и $M = \{m \in \mathbf{Z}^n \mid 2L(m) \in \mathbf{Z}\}$. Обозначим через $v_1, \dots, v_d$ вершины симплекса τ, и пусть Π_τ будет как в (5.1). Нам надо показать, что $m \in M \cap \operatorname{Int}\Pi_\tau \implies 2m = \sum v_i$. Действительно, тот факт, что τ примитивен, означает, что существует $a \in M$ с $L(a) = 1/2$ и базис $e_1, \dots, e_d$ в M, такие что $v_i = a + e_i$. Тогда $m = \sum m_i e_i$ с целыми m_i. С другой стороны, если $m \in \operatorname{Int}\Pi_\tau$, то $m = \sum x_i v_i$, где $0 < x_i < 1$. Значит, $a \cdot \sum m_i = \sum (m_i - x_i) v_i$. Но $2a$ лежит в аффинной оболочке симплекса τ, и τ примитивен, из этого следует, что коэффициенты вектора a в базисе $\{v_i\}$ полуцелые. Поэтому, число $m_i - x_i$ полуцело при всех i, значит, $x_i = 1/2$. $\square$

Таким образом, для примитивного симплекса τ условие локальной экстремальности (**) эквивалентно следующему условию:

$$e(\tau) = 1 \quad \implies \quad |R_\tau(-1)| = \operatorname{mcoef} R_\tau\,,$$

и если τ примитивен, $d(\tau) \equiv n \bmod 2$, и τ не содержится в объединении координатных гиперплоскостей, то (**) эквивалентно условию

$$e(\tau) = 1 \quad \implies \quad \tau^* \text{ является симплексом}.$$

Напомним, что τ^* — срез грани τ (см. (3.3))

(8.3). Четная размерность. Пусть n четно и Σ — некоторая примитивная триангуляция симплекса Δ (см. (1.1)). Пусть S_+^{n-1} и $\Pi_n(m)$ обозначают то же, что и в (*) (см. введение) для T-гиперповерхности Виро $X = X_{\Sigma,s}$ (s — произвольное распределение знаков).

Предложение.

$$-\chi(S_+^{n-1}) = R_\varnothing(-1); \qquad \Pi_n(m) = \operatorname{coef}_{n/2} R_\varnothing.$$

В частности, при $n = 4$ имеем $R_\varnothing = c_1t^3 + c_2t^2 + c_1t$, где $c_1 = \binom{m-1}{3}$ и $c_2 = \Pi_4(m) = \frac23 m^3 - 2m^2 + \frac73 m - 1$, значит, $-\chi(S_+^{n-1}) = c_2 - 2c_1 = \frac13 m^3 - \frac43 m + 1$

не зависит от Σ *(ни от* s*). Таким образом, мы имеем "=" в (*) при* $m \le 3$ *и "<" при* $m \ge 4$.

Доказательство. Если $\tau \ne \varnothing$, то либо $R_\tau(-1) = \operatorname{mcoef} R_\tau = 0$ (когда $d(\tau)$ нечетно), либо $e(\tau) = 0$ (когда $d(\tau)$ четно). Поэтому, вклад симплекса τ в обе части (*) равен нулю.

Для вычисления $R_\varnothing$ при $n = 4$, заметим, что число вершин и трехмерных граней известно для примитивной триангуляции, а число ребер и треугольников можно найти из уравнений Дэна – Соммервилля (см. Приложение). □

(8.4). Нечетная размерность. Предположим, что n нечетно, и имеет место "=" в (*) для Т-гиперповерхности Виро $X_{(\Sigma,s)}$, где Σ — некоторая примитивная триангуляция симплекса Δ. Пусть $\tau \in \Sigma$. Если $d(\tau)$ четно (в частности, если $\tau = \varnothing$), то вклад симплекса τ в обе части (*) равен нулю. Таким образом, необходимым условием на примитивную триагнуляцию Σ для "=" в (*) является условие:

Срез τ^* *является симплексом для каждого симплекса* τ*, такого что* $d(\tau)$ *нечетно и* $k(\tau) = n$.

§9. Случай малых размерностей

Напомним (см. 1.1), что все целочисленные плоскости снабжены целочисленным объемом, в частности, длина отрезка $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{Z}^n$ равна $\#\mathbf{Z}^n \cap [a, b)$.

Для данного k-мерного симплекса σ в аффинной целочисленной k-мерной плоскости V и для точки $p \in \mathbf{Z}^n \setminus V$, определим *высоту* h_p симплекса $[p\sigma]$ как длину отрезка $\varphi([p\sigma])$, где через $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-k}$ обозначена проекция вдоль V, такая что $\varphi(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{Z}^{n-k}$. Таким образом, $\operatorname{vol}_{k+1}[p\sigma] = h_p \operatorname{vol}_k \sigma/(k+1)$.

<u>$n = 3$</u>.

(9.1) Локальное условие. Мы дадим интерпретацию локального условия (**) при всех значений $(d(\tau), k(\tau))$. Мы предполагаем, что m (см. (1.1)) четно, так как ((*) принимает вид $0 = 0$ при нечетном m).

$d(\tau) = 0$ (т.е. $\tau = \varnothing$): $Q_\tau = 1$, $R_\tau(-1) = \operatorname{coef}_{3/2} R_\tau = 0$, значит, (**) всегда выполнено.

$d(\tau) = 1$: $\tilde{Q}_\tau = e(\tau)t^{1/2}$. Обозначим число ребер триангуляции $\hat{\Sigma}$, инцидентных с τ, через $\hat{\nu}$.

$k(\tau) = 1, 2$: $2^{3-k(\tau)} R_\tau = (\hat{\nu} - 4)t$, значит, (**) автоматически выполнено;

$k(\tau) = 3$: $R_\tau = 1 + (\hat{\nu} - 2)t + t^2$, значит, (**) выполнено если и только если $e(\tau) = 0$ или $\hat{\nu} = 3$.

$d(\tau) = 2$:

$k(\tau) = 2$: $R_\tau = 0$, значит, (**) всегда выполнено.

$k(\tau) = 3$: $R_\tau = t + 1$, значит, $\operatorname{coef}_{3/2}(Q_\tau R_\tau) = 2 \operatorname{coef}_{1/2} Q_\tau$. Таким образом, (**) выполнено тогда и только тогда, когда $(\operatorname{Int} \tau) \cap 2\mathbf{Z}^3 = \varnothing$.

$d(\tau) = 3, k(\tau) = 3$: $R_\tau = 1$, значит, (**) равносильно $\operatorname{coef}_{3/2} Q_\tau = e(\tau)$. Это так если и только если выполнено одно из следующих условий:

(i) τ примитивен;
(ii) $\tau = [abc]$, причем прямая ac содержит четную точку, и высота h_a равна 1.
(iii) барицентр b симплекса τ четен, и $\tau \cap \mathbf{Z}^3 = \operatorname{Som} \tau \cup \{b\}$.

Анилизируя эти условия, можно легко получить

(9.2) Предложение. *($n = 3$, m четно). (а). Любую локально экстремальную (см. (7.4)) триангуляцию симплекса Δ можно подразбить до примитивной локально экстремальной триангуляции.*

(б). Пусть Σ локально экстремальна и

$$s(a) = \begin{cases} -1, & \text{\it при } k(a) = 2 \text{ \it и } a \notin 2\mathbf{Z}^3, \\ 1, & \text{\it иначе.} \end{cases}$$

Тогда имеет место "=" в (*) для T-гиперповерхности Виро $X = X_{(\Sigma,s)}$.

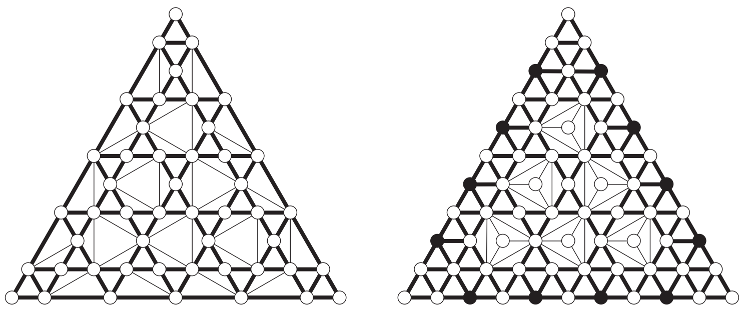

Fig. 2.

Примеры (Σ, s), обеспечивающие "=" в (*), даны на рис. 2, ("+" белый, "−" черный). Регулярность следует из (10.1), (10.2) с применением гексагонального разбиения, изображенного жирными линиями.

$\underline{n = 4}$.

(9.3) Локальное условие. Как и в (9.1), мы исследуем условие локальной экстремальности (**) для каждой пары (d, k).

$d(\tau) = 0$ (т.е. $\tau = \varnothing$): по определению, (см. (3.2)),

$$R_\varnothing(t) = \sum_{0 \le d \le k} (-1)^{4-k} (t-1)^{k-d} f_{k;d},$$

где $f_{k;d} := \#\{\sigma \in \Sigma \mid k(\sigma) = k, d(\sigma) = d\}$. Рассмотрим отдельно следующие два случая:

(9.3.1) $\qquad R_\varnothing(-1) = \operatorname{mcoef} R_\varnothing;$

(9.3.2) $\qquad R_\varnothing(-1) = -\operatorname{mcoef} R_\varnothing.$

Ясно, что $\operatorname{coef}_4 R_\varnothing = 0$ и $\operatorname{coef}_3 R_\varnothing = f_{4;1} = \#\big(\operatorname{Som}(\Sigma)\cap\operatorname{Int}\Delta\big)$. Поэтому, как видно из (7.1b), условие (9.3.1) выполнено если и только если $f_{4;1}=0$. (Это значит, что все вершины триангуляции Σ лежат на $\partial\Delta$.)

Аналогично, (9.3.2) эквивалентно $f_{4;2} = 4f_{4;1} + f_{3;1}$.

$d(\tau)=1$: $\tilde Q_\tau = 0$ и $R_\tau(-1)=0$. Значит, (**) выполнено автоматически;

$d(\tau)=2$: $\tilde Q_\tau = qt$, где $q=\#(\mathbf{Z}^4\cap\operatorname{Int}\tau)$. Пусть $\hat\nu = \#\{\tau<\sigma\in\hat\Sigma \mid d(\sigma)=4\}$.

$k(\tau)=2,3$: $2^{4-k(\tau)}R_\tau = (\hat\nu-4)t$, значит, (**) эквивалентно $(\hat\nu-4)(q-e(\tau)) = 0$. (Заметим, что $q=e(\tau)$ если и только если $q\le 1$).

$k(\tau)=4$: $R_\tau = 1+(\hat\nu-2)t+t^2$, значит, (**) принимает вид $e(\tau)|4-\hat\nu| = q(\hat\nu-2)$. Это условие выполнено если и только если либо (i) $q=0$, либо (ii) $\hat\nu=3$ и $q=1$.

$d(\tau)=3$:

$k(\tau)=3$: $R_\tau=0$, значит, (**) выполнено автоматически.

$k(\tau)=4$: $R_\tau = 1+t$, $\tilde Q_\tau = q+qt$, где $q=\#(\mathbf{Z}^4\cap\operatorname{Int}\tau)$. Значит, (**) эквивалентно $q=0$.

$d(\tau)=k(\tau)=4$: $R_\tau=1$, значит, (**) эквивалентно условию

$$\operatorname{coef}_2 Q_\tau = e(\tau). \tag{9.3.3}$$

Можно перечислить более или менее явно все трехмерные симплексы, удовлетворяющие условию (9.3.3), как мы это сделали для остальных значений (k,d). Однако, ответ достаточно сложен, и мы ограничимся тем, что приведем некоторые следствия из (9.3.3).

(9.4) Многочлен Пуанкаре внутренности трехмерного симплекса . Пусть $\tau\subset\mathbf{R}^4$ — трехмерный целочисленный симплекс. Обозначим через V, S и l, соответственно, его целочисленный объем, сумму целочисленных объемов граней и сумму целочисленных длин ребер. Положим $i=\#(\mathbf{Z}^4\cap\operatorname{Int}\tau)$. Пусть $\tilde Q_\tau(t) = c_1t + c_2t^2 + c_1t^3$ будет как в (7.5).

(9.4.1) Предложение. *(a)* $c_1 = i$; *(b)* $c_2 = 6V - 2S + l - 2i - 3$.

Доказательство. (a). Очевидно. (b). Заменяя при необходимости $\mathbf{Z}^4$ решеткой, порожденной целыми точками аффинной оболочки симплекса τ, можно считать, что $\operatorname{coef}_\alpha p_\tau = 0$ при $\alpha\notin\mathbf{Z}$ (в частности, $\tilde Q_\tau = Q_\tau$). По формуле Эрара [5], имеем

$$\operatorname{coef}_k p_\tau = Vk^3 + (S/2)k^2 + \Delta k + 1,\quad k\ge 0,\qquad \text{где } \Delta = i - V + (S/2) + 1.$$

Суммирование $t^k \operatorname{coef}_k p_\tau$ по $k=0,1,\dots$ дает

$$p_\tau = V\cdot\frac{t^3+4t^2+t}{(1-t)^4} + \frac{S}{2}\cdot\frac{t^2+t}{(1-t)^3} + \frac{\Delta t}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}.$$

Аналогично, найдем $p_{\tau,d} := \sum_{\sigma\le\tau,d(\sigma)=d} p_\sigma$ суммированием выражений

$$\operatorname{coef}_k p_{\tau,3} = Sk^2 + lk + 4,\qquad \operatorname{coef}_k p_{\tau,2} = lk + 6,\qquad \operatorname{coef}_k p_{\tau,1} = 4,$$

и применим $Q_\tau = \sum_{d=0}^4 (t-1)^d p_{\tau,d}$ (см. (5.3d), (5.4)). $\square$

Лемма. *Существует триангуляция симплекса τ с вершинами в* $\mathrm{Som}(\tau)\cup(\mathbf{Z}^4\cap \mathrm{Int}\,\tau)$*, имеющая* $\ge 3i+1$ *тетраэдров.*

Доказательство. Обозначим точки из $\mathbf{Z}^4\cap\mathrm{Int}\,\tau$ через $p_1,...,p_i$. Пусть $\Sigma_0=\{\tau\}$ и пусть Σ_j получен из Σ_{j-1} добавлением точки p_j и подразбиением содержащих ее симплексов. Ясно, что каждый раз мы добавляем ≥ 3 тетраэдров. $\square$

(9.4.2) Следствие. *(a). Если $i>0$, то $6V\ge 2S+3(i-1)$; (b). Если $i>0$, то $c_2\ge i+l-6$; (c). $c_2\ge c_1$.*

Доказательство. (a). В триангуляции из леммы объем четырех тетраэдров, имеющих общую грань с τ, $\ge S/3$. Объем остальных $\ge(\#\text{тетраэдров}-4)/6\ge(3i+1-4)/6$

(b). Подставим (a) в (9.4.1b). (c). Положим $c_1=i$ и $l\ge 6$ в (b). $\square$

Гипотеза. Q_τ унимодален для любого многогранника τ с вершинами в целых точках.

Замечание. Рассуждения как выше доказывают эту гипотезу при $d(\tau)=4$.

(9.4.3) Следствие. *Если τ минимален (см. (8.1)), то $c_2=6V-1$.*

Доказательство. Положим $i=0$, $l=6$, $S=2$ в (9.4.1b). $\square$

(9.4.4) Предложение. *Если τ минимален, то равносильны условия:*
(a) τ удовлетворяет (9.3.3); (b) $V=(1+e(\tau))/6$; (c) $V=1/6$ или $1/3$.

Доказательство. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) по (9.4.3); (b) $\Longrightarrow$ (c) очевидно.
(c) $\Longrightarrow$ (b). При $V=1/6$ это следует из леммы (8.1a). Предположим, что $V=1/3$, и докажем, что $e(\tau)=1$. Пусть $v_0,\dots,v_3$ — вершины симплекса τ. Положим $e_j=v_j-v_0$, $j=1,2,3$. Обозначим через M решетку, порожденную e_1,e_2,e_3. Пусть $M'=\mathbf{Z}^4\cap(M\otimes\mathbf{R})$. Тогда $M':M=2$. Значит, M' порождена e_1,e_2,e_3', и $e_3=a_1e_1+a_2e_2+2e_3'$. Поскольку $v_0+\dots+v_4=4v_0+(a_1+1)e_1+(a_2+1)e_2+2e_3'$, достаточно показать, что оба a_1 и a_2 нечетны. Действительно, если $a_1\equiv a_2\equiv 0 \bmod 2$, то отрезок $[v_0v_3]$ не был бы минимальным; если $a_1+1\equiv a_2\equiv 0\bmod 2$, то $[v_2v_3]$ не был бы минимальным. $\square$

§10. Критерии регулярности

(10.1) Регулярное полиэдральное разбиение. Для некоторого многогранника $\Delta\in\mathbf{R}^n$, определим его *(регулярное) полиэдральное разбиение*, заменяя всюду в (1.2) и (2.1):

“симплекс”	$\longrightarrow$	“выпуклый многогранник”
“симплициальный комплекс”	$\longrightarrow$	“полиэдральный комплекс”
“триангуляция”	$\longrightarrow$	“полиэдральное разбиение”

Предложение. *Пусть Σ — полиэдральное разбиение некоторого выпуклого n-мерного многогранника $\Delta\subset\mathbf{R}^n$. Предположим, что (возможно, после аффинной замены координат) каждую грань $\sigma\in\Sigma$ можно вписать в сферу, центр которой лежит либо в $\mathrm{Int}\,\sigma$, либо в $\mathrm{Int}(\sigma\cap\Delta')$ для некоторой грани Δ' многогранника Δ. Тогда Σ регулярна.*

Доказательство. Положим $\varphi(x)=\sum x_i^2$ при $x\in\mathrm{Som}\,\Sigma$ и продолжим φ линейно на каждую грань. $\square$

(10.2) Полиэдральные подразделения. Пусть Σ, Σ' — полиэдральные разбиения выпуклого многогранника Δ. При $\sigma \in \Sigma$ положим $\Sigma'_\sigma = \{\sigma' \in \Sigma' \,|\, \sigma' \subset \sigma\}$. Скажем, что Σ' является *полиэдральным подразделением* разбиения Σ если $\forall \sigma \in \Sigma$ имеет место $[\Sigma'_\sigma] = \sigma$.

Предложение. *Пусть Σ — регулярное полиэдральное разбиение некоторого выпуклого многогранника Δ, и Σ' — полиэдральное подразделение разбиения Σ. Предположим, что существует непрерывная функция $\psi : \Delta \to \mathbf{R}$, такая что $\forall \sigma \in \Sigma$ ограничение $\psi|_\sigma$ является (Σ'_σ)-выпуклым (т.е. разбиения Σ'_σ “согласованно регулярны”). Тогда Σ' регулярно.*

Доказательство. Если φ является Σ-выпуклой и $0 < \varepsilon \ll 1$, то $\varphi + \varepsilon\psi$ является Σ'-выпуклой. $\square$

Приложение:

Relative MacMullen Inequalities

by R. MacPherson and S. Orevkov

Let P be a convex simplicial polytope in $\mathbf{R}^n$. Define its *Poincaré polynomial* H_P as

$$H_P(t) = (t-1)^n + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(t-1)^{n-i},$$

where f_i is the number of i-dimensional simplices of P.

Necessary and sufficient conditions on a polynomial

$$h_n t^n + h_{n-1} t^{n-1} + \dots + h_1 t + h_0 \tag{1}$$

with $h_n = 1$ for it to be a Poincaré polynomial of a convex simplicial polytope, are

$$h_i = h_{n-i}, \qquad i = 0, \dots, [n/2] \quad \text{(Dehn-Sommerville equations)}; \tag{2}$$

$$h_i \le h_{i-1}, \qquad i = 1, \dots, [n/2]; \tag{3}$$

$$(h_{i+1} - h_i) \le (h_i - h_{i-1})^{<i>}, \qquad i = 1, \dots, [n/2] - 1; \tag{4}$$

where $m^{<k>}$ is some explicitly defined function of the integers m and k.

These conditions were conjectured by MacMullen [11] and proved by Stanley [13] (necessity) and Billera and Lee [3] (sufficiency). The proof of the necessity uses toric varieties and the hard Lefschetz theorem.

A polynomial (1) is said to be *symmetric and unimodal* if $h_n \ge 0$ and the conditions (2), (3) are satisfied.

Here we give a relative version of the inequality (3) (Theorem 1 below) for coefficients of Poincaré polynomials of a polytope and its intersections with hyperplanes in general position. The proof is based on the the relative hard Lefschetz theorem of Beilinson, Bernstein, Deligne, and Gabber.

Let P be a convex simplicial polytope in $\mathbf{R}^n$ and let $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}, k \leq n$ be a set of hyperplanes in general position. Denote $\{1, ..., k\}$ by $\bar{k}$. For $I \subset \bar{k}$, let $\alpha_I = \cap_{i \in I} \alpha_i$, $P_I = P \cap \alpha_I$ (by convention, $\alpha_\varnothing = \mathbf{R}^n$, $P_\varnothing = P$). Say that P *argees* with α if any α_I intersects $\operatorname{Int} P$ and each face of P_I is a face of P. If P agrees with α, we define the *relative Poincaré polynomial of P with respect to α* as

$$H^{rel}_{P,\alpha}(t) = \sum_{I \subset \bar{k}} (-1)^{|I|} (t+1)^{|I|} H_{P_I}(t)$$

Theorem 1. *The polynomial $H^{rel}_{P,\alpha}(t)$ is symmetric and unimodal.*

Proof. Since the hyperplanes $\alpha_1, ..., \alpha_k$ are in general position, we can chose coordinates $(x_1, ..., x_n)$ in $\mathbf{R}^n$ so that α_i is defined by $x_i = 0$. The condition that P agrees with α implies that the origin can be chosen inside P. Since P is simplicial, we may perturb it so that all its vertices are rational. The perturbation can be chosen so that all the incidence relations are preserved.

For any face σ of P consider the cone obtained as the union of all rays with vertex at the origin, which intersect σ. All such cones define a fan Σ in $\mathbf{R}^n$, and let X be the toric variety over $\mathbf{C}$ associated to Σ (see [4]). Let Y be $(\mathbf{CP}^1)^k$, which we shall consider as the toric variety associated to the fan Σ_Y consisting of all coordinate octants in $\mathbf{R}^k$.

The mapping $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ defined by $y_i = x_i$, (where $(y_1, ..., y_k)$ are coordinates in $\mathbf{R}^k$) is simplicial (sends any cone of Σ to a cone of Σ_Y). Hence, it defines a toric morphism $f : X \to Y$ (see [4]).

The structure of toric variety defines the following stratification of Y. Let $Y_0 = \mathbf{C} - \{0\}$ be the 1–dimensional and $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = \{\infty\}$ the 0–dimensional strata of $\mathbf{CP}^1$. Denote by M the set of all k-tuplets $(m_1, ..., m_k)$ where $m_i = 0, 1, 2$. For $m \in M$ let us define

$$Y_m = \{(y_1, ..., y_k\} \in Y \mid y_j = Y_{m_j} \text{ if } m_j > 0\}.$$

We apply the Decomposition theorem [2; Section 5.4.5] (see also [9; Section 12]) to the map f. It expresses the pushforward of the intersection complex of X as a direct sum of intersection complexes of subvarieties of Y. Since P is simplicial, X is rationally smooth, the intersection complex of X is the constant sheaf. By directly examining the map f, one can see that only subvarieties Y_m of Y occur, and that all the intersection complexes involved have un-twisted coefficients. Taking Poincare polynomials, we get the following statement (where the unimodality comes from the relative hard Lefschetz theorem, [2; Section 5.4.10])

Lemma. *There exist symmetric unimodal polynomials φ_m with integral coefficients such that for any open $V \subset Y$,*

$$H(f^{-1}(V)) = \sum_m \varphi_m H(V \cap Y_m)$$

See [10] for a fuller exposition of the Decomposition theorem from this point of view.

Let $U \subset Y_0$ be an open disk. For $I \subset \bar{k}$ put

$$U_I = \{(y_1, ..., y_k) \in Y \mid y_i \in U \text{ if } i \in I\}$$

Define $J(m)$ as $\{j \mid m_j = 0\}$.

Then

$$U_I \cap Y_m = \begin{cases} (\mathbf{CP}^1)^{|J(m)-I|} \times U^{|I|}, & I \subset J(m) \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The lemma applied to U_I gives us

$$H_{P_I} = H(f^{-1}(U_I)) = \sum_{m \in M} \varphi_m(t) H(U_I \cap Y_m) = \sum_{m \in M, I \subset J(m)} \varphi_m(t)(t+1)^{|J(m)-I|}.$$

For $J \in \bar{k}$ put $\varphi_J(t) = \sum_{m \in M, J(m)=J} \varphi_m(t)$. Then $H_{P_I} = \sum_{I \subset J} \varphi_J(t)(t+1)^{|J|-|I|}$, and

$$H^{rel}_{P,\alpha} = \sum_{I \subset \bar{k}} (-1)^{|I|} \sum_{I \subset J \subset \bar{k}} \varphi_J(t)(t+1)^{|J|} = \sum_{J \subset \bar{k}} \varphi_J(t)(t+1)^{|J|} \sum_{I \subset J} (-1)^{|I|} = \varphi_\varnothing(t).$$

□

Список литературы

1. В.И. Арнольд, *Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского – Олейник и смешанная структура Ходжа*, Функц. анал. и его прилож. **12** (1978), 1–14.
2. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Asterisque **100** (1982), 5–171.
3. L.J. Billera, C.W. Lee, *Sufficiency of McMullen's conditions for f-vector of simplicial convex polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **2** (1980), 181–185.
4. В.И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, УМН **33** (1978), 85–134.
5. E. Ehrhart, *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, International Series of Numeric Math., vol. 35, Birkhäuser, 1977.
6. B. Haas, *Real algebraic curves and combinatorial constructions*, Ph.D. Thesis, 1997.
7. I. Itenberg, *Counter-examples to Ragsdale conjecture and T-curves*, in: Proceedings, Michigan 1993, Contemp. Math., vol. 182, 1995, pp. 55–72.
8. I. Itenberg, O.Ya. Viro, *In preparation.*
9. R. MacPherson, *Global questions in the topology of singular spaces*, Proc. I.C.M. Warsaw, p. 213.
10. R. MacPherson, *Intersection homology and perverse sheaves*, (book, to appear).
11. P. McMullen, *The numbers of faces of simplicial convex polytopes*, Israel J. Math. **9** (1971), 559–570.
12. С.Ю. Оревков, В.М. Харламов, *Порядок роста числа классов вещественных плоских алгебраических кривых при возрастании степени*, Записки научных семинаров ПОМИ **266** (2000), 218–233.
13. R.P. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. in Math. **35** (1980).
14. О.Я. Виро, *Построение М-поверхностей*, Функц. анал. и его прилож. **13:3** (1979), 71–72.
15. O.Ya. Viro, *Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees* 6 *and* 7, in: Topology (Leningrad, 1982)., Lecture Notes in Math., vol. 1060, Springer, Berlin – N.Y., 1984.

МИ РАН им. В.А. Стеклова

Университет им. Поля Сабатье (Тулуза)