КРИТЕРИЙ ГУРВИЦ-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ КОС ИЗ ТРЕХ НИТЕЙ

С. Ю. Оревков

Вопрос о Гурвиц-эквивалентности наборов кос важен для изучения монодромии в косах алгебраических кривых в $\mathbb{C}^2$. Он рассматривался многими авторами, см. [1,3,4] и ссылки в [3]. Мы даем ответ для частного случая, о котором сказано в заглавии.

Пусть $\mathbf{B}_3 = \langle \mathcal{A} \mid \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_2 \rangle$, $\mathcal{A} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, — копредставление Бирман – Ко – Ли (см. [2]) группы кос из трех нитей. *Квазиположительным разложением* косы $X \in \mathbf{B}_3$ называется набор кос $(X_1, \dots, X_k)$ такой, что $X = X_1X_2\dots X_k$ и каждая коса X_i сопряжена образующей σ_1 (заметим, что σ_0, σ_1, σ_2 сопряжены между собой). Множество квазиположительных разложений косы X обозначим через $\mathcal{Q}(X)$. Коса X называется *квазиположительной*, если $\mathcal{Q}(X) \neq \varnothing$. Группа кос $\mathbf{B}_k$ действует на $\mathcal{Q}(X)$ отображениями $\Sigma_i : (X_1, \dots, X_k) \mapsto (Y_1, \dots, Y_k)$, где $(Y_i, Y_{i+1}) = (X_iX_{i+1}X_i^{-1}, X_i)$ и $Y_j = X_j$ при $j \notin \{i, i+1\}$. Это действие называется *действием Гурвица*. Элементы одной орбиты действия Гурвица будем называть *Гурвиц-эквивалентными*.

В [4] доказано, что каждая орбита действия Гурвица содержит элемент некоторого явно описываемого конечного множества. Цель настоящей заметки — дать легко проверяемый критерий того, что два элемента этого множества лежат в одной и той же орбите. Чтобы дать точные формулировки, удобно ввести следующие обозначения, которые немного отличаются от обозначений в [4]. Расширим алфавит $\mathcal{A}$ до $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{\hat\sigma_0, \hat\sigma_1, \hat\sigma_2\}$ и обозначим через $\mathcal{A}^*$ и $\hat{\mathcal{A}}^*$ свободные моноиды, порожденные множествами $\mathcal{A}$ и $\hat{\mathcal{A}}$ соответственно. Для $U, V \in \hat{\mathcal{A}}^*$ мы будем через $U \equiv V$ обозначать равенство в $\hat{\mathcal{A}}^*$ (т. е. побуквенное равенство слов), а через $U = V$ (если $U, V \in \mathcal{A}^*$) — равенство соответствующих элементов в $\mathbf{B}_3$. Для $U \in \hat{\mathcal{A}}^*$ обозначим через U' слово, полученное из U вычеркиванием всех букв $\hat\sigma_i$, через $\bar U$ — слово, полученное из U заменой каждой буквы $\hat\sigma_i$ на σ_i, а через $\hat U$ — слово, полученное из U заменой каждой буквы σ_i на $\hat\sigma_i$. Например, если $U \equiv \sigma_0\hat\sigma_1\sigma_2\hat\sigma_1$, то $U' \equiv \sigma_0\sigma_2$, $\bar U \equiv \sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_1$, $\hat U \equiv \hat\sigma_0\hat\sigma_1\hat\sigma_2\hat\sigma_1$.

Положим $\delta = \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_2$. Легко проверить, что любая коса $X \in \mathbf{B}_3$ представляется в виде

$$X = U\delta^{-p}, \qquad U \in \mathcal{A}^*, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Если к тому же U не содержит подслова, равного в $\mathbf{B}_3$ косе δ, то такое представление косы X единственно и оно называется *правой гарсайдовой нормальной формой.*

Пусть

$$W = W_1\hat x_1W_2\hat x_2\dots W_k\hat x_kW_{k+1} \in \hat{\mathcal{A}}^*, \quad W_i \in \mathcal{A}^*, \quad x_i \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Если $W' = \delta^p$, то через $[W]$ мы обозначим квазиположительное разложение косы $\bar W\delta^{-p}$ вида $(X_1, \dots, X_k)$, где $X_i = A_ix_iA_i^{-1}$, $A_i = W_1\dots W_i$.

Каждой косе $X \in \mathbf{B}_3$ мы сопоставим граф $\mathcal{G}_0(X)$ следующим образом. Пусть (1) — правая гарсайдова нормальная форма. Множество вершин графа $\mathcal{G}_0(X)$ определим как $\mathcal{V}_0(X) = \{W \in \hat{\mathcal{A}}^* \mid W' = \delta^p, \bar{W} = U\}$. Две вершины соединены ребром, если они имеют вид $A\hat{x}ByC$ и $AxB\hat{y}C$, $x, y \in \mathcal{A}$, где $xB' = B'y$, и при этом для некоторого $q \geq 0$, либо $B' = \delta^q$ (ребро типа (h1)), либо $xB' = \delta^q$ (ребро типа (h2)).

Теорема 1. *Предположим, что правая гарсайдова нормальная форма косы $X \in \mathbf{B}_3$ имеет вид (1) при $p \geq 0$. Тогда каждая орбита действия Гурвица на $\mathcal{Q}(X)$ содержит элемент вида $[W]$, $W \in \mathcal{V}_0(X)$. Два таких элемента принадлежат одной орбите тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины лежат в одной и той же компоненте связности графа $\mathcal{G}_0(X)$.*

Замечание 1. Ограничение $p \geq 0$ в теореме 1 не очень обременительно, так как при $p < 0$ действие Гурвица имеет ровно одну орбиту (см. [4; следствие 4]).

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 1. Пусть $\tau : \hat{\mathcal{A}}^* \to \hat{\mathcal{A}}^*$ — гомоморфизм, заданный на образующих как $\sigma_0 \mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_2 \mapsto \sigma_0$, $\hat{\sigma}_0 \mapsto \hat{\sigma}_1 \mapsto \hat{\sigma}_2 \mapsto \hat{\sigma}_0$. Он индуцирует внутренний автоморфизм $\tau : X \mapsto \delta^{-1}X\delta$ в группе $\mathbf{B}_3$.

Лемма 1. *Если $A, B \in \mathcal{A}^*$, $A = B$ и $A \not\equiv B$, то $A = C\delta = \delta\tau(C)$, $C \in \mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Известно (см. [2; теорема 2.7]), что если $A = B$, то B получается из A применением соотношений без использования элементов, обратных к образующим. Поэтому, если $A \not\equiv B$, то к A можно применить хотя бы одно соотношение, а значит, $A = D\delta E$, $D, E \in \mathcal{A}^*$. Тогда $A = C\delta = \delta\tau(C)$ для $C = \tau(D)E$. $\square$

Определение. Пусть $W \equiv a_1 \dots a_n$, $a_i \in \hat{\mathcal{A}}$, $W' = \delta^q$, $q > 0$. Будем говорить, что буквы a_i и a_j $(i < j)$ являются парными друг к другу в слове W, если $a_i, a_j \in \mathcal{A}$, $(a_i \dots a_j)' \equiv a_i B a_j = \delta^{r+1}$ и $B = \delta^r$, $r \geq 0$.

Строго говоря, в этом определении парными являются, конечно же, не сами буквы a_i и a_j, а их индексы i и j. Однако, допуская некоторую вольность речи, мы будем говорить о парных буквах чтобы не вводить громоздких обозначений.

Лемма 2. (следует из [4; лемма 5]) *Пусть $W \in \mathcal{A}^*$, $W = \delta^q$, $q > 0$. Тогда буквам слова W можно сопоставить скобки так, чтобы получилась правильная скобочная структура, в которой парным скобкам соответствуют парные буквы.* $\square$

Лемма 3. *Пусть $W \equiv AuBCvD \in \mathcal{A}^*$, $W = \delta^q$, и v — парная буква к u в слове W. Пусть $W_1 \equiv CvD\tau^q(AuB)$. Тогда $W_1 = \delta^q$ и $\tau^q(u)$ — парная буква к v в слове W_1.*

Доказательство. Пусть $E = AuB$, $F = CvD$. Тогда $\delta^q = EF$, и значит $W_1 = F\delta^{-q}E\delta^q = F(F^{-1}E^{-1})E(EF) = EF = \delta^q$. То же вычисление с $E = Au$, $F = BCvD$ дает $BCvD\tau^q(Au) = \delta^q$. Учитывая, что $BC = \delta^r$, получаем $vD\tau^q(Au) = \delta^{q-r}$. Аналогично, полагая $E = A$ и $F = uBCvD$, получаем $D\tau^q(A) = \delta^{q-r-1}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $W \equiv ABC \in \mathcal{A}^*$, $W = \delta^q$, $B = \delta^r$. Тогда для любой буквы u слова A найдется буква слова A или C, являющаяся парной к u в слове W.*

Доказательство. Следует из леммы 2, примененной к слову $\tau^q(C)A$, и леммы 3. $\square$

Пусть коса X удовлетворяет условиям теоремы 1. Расширим граф $\mathcal{G}_0(X)$ до графа $\mathcal{G}(X)$ следующим образом. Множество вершин зададим как $\mathcal{V}(X)=\bigcup_{j\ge 0}\mathcal{V}_j$, где $\mathcal{V}_j=\{W\in\hat{\mathcal{A}}^*\mid W'=\delta^{p+j},\bar{W}\delta^{-p-j}=X\}$. Вес вершины $W\in\mathcal{V}_j$ зададим как $\mathrm{wt}(W)=j$. Ребра типа (h1) и (h2) определим так же, как в графе $\mathcal{G}_0(X)$, и добавим еще ребра (W,V) в следующих случаях:

(h3) $W\equiv A\hat{B}_1C$, $V\equiv A\hat{B}_2C$, $B_1,B_2\in\mathcal{A}^*$, $B_1=B_2$;
(v1) $W\equiv APB$, $V\equiv A\tau^{-1}(B)$, $P\in\mathcal{A}^*$, $P=\delta$;
(v2) либо $W\equiv APByC$ и $V\equiv A\tau^{-1}(B\hat{y}C)$, либо $W\equiv AyBPC$ и $V\equiv A\hat{y}B\tau^{-1}(C)$, где $P\in\{u\hat{x},\hat{x}u\}$, $\bar{P}=\delta$, и y — парная буква к u в слове W;
(v3) $\mathrm{wt}(V)=\mathrm{wt}(W)-1$, W соединена ребром типа (h3) с некоторой вершиной, которая соединена с V ребром типа (v2).

Ребра типа (h1–h3) назовем *горизонтальными*, в ребра типа (v1–v3) — *вертикальными*. Обозначение (W,V) для вертикальных ребер будет предполагать, что $\mathrm{wt}(W)>\mathrm{wt}(V)$. Если вершины W и V лежат в одной компоненте связности графа $\mathcal{G}(W)$, мы будем писать $W\sim V$. Если $W\equiv V$ или если есть ребро (W,V) типа, скажем, (h1), то мы будем писать $W\sim_{\mathrm{h1}}V$. Если $\mathrm{wt}\,W=\mathrm{wt}\,V$ и W соединена с V путем в $\mathcal{G}(X)$, проходящим только через вершины веса, не большего $\mathrm{wt}(W)$, мы будем писать $W\sim_{\mathrm{h}}V$.

Зададим отображение $f:(\hat{\mathcal{A}}\cup\mathcal{A}^{-1})^*\to\hat{\mathcal{A}}^*$ как $f(1)=1$, $f(xA)\equiv xf(A)$ для $x\in\hat{\mathcal{A}}$ и $f(x^{-1}A)\equiv\tau(\tau(x)f(A))$ для $x\in\mathcal{A}$. Заметим, что коса $A^{-1}f(A)$ есть степень δ.

Лемма 5. *(a). Пусть $W\in\mathcal{V}(X)$. Тогда $W\sim f(Y_1\dots Y_k)$, $Y_i\equiv A_i\hat{x}_iA_i^{-1}$, для некоторых $A_i\in\mathcal{A}^*$, $x_i\in\mathcal{A}$, $i=1,\dots,k$. (b). Если коса X сопряжена σ_1, то $\mathcal{V}_0(X)$ содержит единственный элемент, и он имеет вид $f(AxA^{-1})$, $A\in\mathcal{A}^*$, $x\in\mathcal{A}$.*

Доказательство. (a). Запишем W в виде (2) и положим $A_i\equiv W_1\dots W_i$. Тогда $f(Y_1\dots Y_k)$ соединено с W цепочкой ребер типа (v1). (b). Следует из леммы 2. □

Лемма 6. [4; леммы 6 и 7]. *Если $W\in\mathcal{V}(X)$, то $W\sim V$ для некоторого $V\in\mathcal{V}_0(X)$.* □

Лемма 7. *Пусть $W,V\in\mathcal{V}(X)$. Тогда $[W]\sim[V]$ равносильно $W\sim V$.*

Доказательство. (⇒) Пусть $[W]=(X_1,\dots,X_i)$. Из леммы 5(a) и лемм 6 и 5(b), примененных к словам Y_i, следует, что $W\sim f(Y_1\dots Y_k)$, где $\mathcal{V}_0(X_i)=\{f(Y_i)\}$, поэтому $[W]=[V]\Rightarrow W\sim V$. Остается заметить, что если $W\equiv f(Y_1\dots Y_k)$, $Y_i\equiv A_i\hat{x}_iA_i^{-1}$, и

$$V\equiv f(\dots Y_{i-1}\bar{Y}_iY_{i+1}\bar{Y}_i^{-1}Y_iY_{i+2}\dots),\qquad W_1\equiv f(\dots Y_{i-1}Y_iY_{i+1}\bar{Y}_i^{-1}\bar{Y}_iY_{i+2}\dots),$$

то $\Sigma_i([W])=[V]$, $W_1\sim_{\mathrm{h2}}V$, и W_1 соединено с W цепочкой ребер типа (v1).

(⇐) (ср. с [4; лемма 6]). Достаточно рассмотреть случаи $W\sim_{\mathrm{h1}}V$ и $W\sim_{\mathrm{h2}}V$. Запишем W в виде (2). Тогда для некоторых m, s, $1\le m<s\le k+1$, мы имеем $W\equiv A\hat{x}_mByC$ и $V\equiv Ax_mB\hat{y}C$, где $A\equiv W_1\hat{x}_1W_2\hat{x}_2\dots W_m$, $B\equiv W_{m+1}\hat{x}_{m+1}\dots W_{s-1}\hat{x}_{s-1}D$, $C\equiv E\hat{x}_sW_{s+1}\hat{x}_{s+1}\dots\hat{x}_kW_{k+1}$ (если $s=k+1$, то $C\equiv E$), $W_s\equiv DyE$.

Пусть $[W]=(X_1,\dots,X_k)$ и $[V]=(Y_1,\dots,Y_k)$. Ясно, что $Y_i=X_i$ при $i<m$.

Если $m\le i<s-1$, то $Y_i=B_ix_{i+1}B_i^{-1}$, где $B_i=A'x_mW_{m+1}W_{m+2}\dots W_{i+1}=(A'x_m(A')^{-1})A'W_{m+1}\dots W_{i+1}=X_mW_1\dots W_{i+1}$, откуда $Y_i=X_mX_{i+1}X_m^{-1}$.

Если $i=s-1$, то $Y_i=A'x_mB'y(A'x_mB')^{-1}$ и, применяя тождество $x_mB'=B'y$, получаем $Y_i=A'x_m(x_mB')(A'x_mB')^{-1}=A'x_m(A')^{-1}=X_m$.

Если $i \ge s$, то $Y_i = B_i x_i B_i^{-1}$, где $B_i = A' x_m B' E F$ и $F = W_{s+1} \dots W_i$. Применяя тождество $x_m B' = B' y$, получаем $B_i = A' B' y E F = W_1 W_2 \dots W_i$, откуда $Y_i = X_i$.

Итак, $[V] = (X_1, \dots, X_{m-1},\ X_m X_{m+1} X_m^{-1}, \dots, X_m X_{s-1} X_m^{-1},\ X_m,\ X_s, \dots, X_k)$ $= \Sigma_{s-2} \dots \Sigma_{m+1} \Sigma_m [W]$. □

Обозначим через $\mathbf{c}_s : \hat{\mathcal{A}}^* \to \hat{\mathcal{A}}^*$ отображение $aW \mapsto W\tau^s(a)$, $a \in \hat{\mathcal{A}}$, $W \in \hat{\mathcal{A}}^*$.

Лемма 8. (следует из леммы 3) *(a). Пусть $e = (W, V) \equiv (aA, bB)$, $a, b \in \hat{\mathcal{A}}$, — ребро графа $\mathcal{G}(X)$ типа (h1) или (h2), $s = p + \mathrm{wt}(W)$. Тогда $e_1 = (\mathbf{c}_s(W), \mathbf{c}_s(V))$ — ребро графа $\mathcal{G}(\mathbf{c}_s(\bar{W})\delta^{-s})$ типа (h1) или (h2). Если $a = b$, то e и e_1 — ребра одного типа. Если $a \ne b$, то разного.*

(b). Пусть $e = (W, V)$ — ребро графа $\mathcal{G}(X)$ типа (v1) или (v2), $s = p + \mathrm{wt}(W)$. Пусть $e_1 = (\mathbf{c}_s^m(W), \mathbf{c}_{s-1}^m(V))$, где $m = 2$ если W начинается со слова P из определения ребра e, и $m = 1$ иначе. Тогда e_1 — ребро графа $\mathcal{G}(\mathbf{c}_s^m(\bar{W})\delta^{-s})$ того же типа, что и e. □

Лемма 9 (diamond-лемма). *Пусть $e_1 = (W, V_1)$ и $e_2 = (W, V_2)$ — вертикальные ребра в графе $\mathcal{G}(X)$. Тогда $V_1 \sim_{\mathrm{h}} V_2$.*

Доказательство. В силу леммы 8 взаимное расположение частей слова W, определяющих ребра, можно рассматривать с точностью до циклических перестановок.

Случай 1. e_1 и e_2 имеют тип (v1). Утверждение очевидно.

Случай 2. e_1 и e_2 имеют тип (v2). Обозначим через $P_i \in \{u_i \hat{x}_i, \hat{x}_i u_i\}$ и y_i, $i = 1, 2$, части слова W, участвующие в определении ребра e_i.

Случай 2.1. P_1 совпадает с P_2, т. е. $W \equiv A y_1 B y_2 C P$, $V_1 \equiv A \hat{y}_1 B y_2 C$, $V_2 \equiv A y_1 B \hat{y}_2 C$, $P \in \{\hat{x}u, u\hat{x}\}$, $\bar{P} = \delta$. По определению ребра типа (v2) мы имеем $B' y_2 C' = \delta^q$, $C' = \delta^r$, $y_1 B' y_2 C' u = \delta^{q+1}$, $y_2 C' u = \delta^{r+1}$. Из первых двух тождеств следует, что $B' y_2 = \delta^{q-r}$, а из двух других — что $y_1 B' = \delta^{q-r}$. Значит $V_1 \sim_{\mathrm{h2}} V_2$.

Случай 2.2. Слова P_1 и P_2 имеют одну общую букву $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}$. Из того что $u_1 x = x u_2 = \delta$, следует, что u_1 и u_2 не могут быть парными. Поэтому y_1 и y_2 не могут с ними совпадать.

Случай 2.2.1. $y_1 = y_2 = y$. $W \equiv A y B u_1 \hat{x} u_2$, $V_1 \equiv A \hat{y} B \tau^{-1}(u_2)$, $V_2 \equiv A \hat{y} B u_1$. Тогда $B' u_1 = \delta^q$ и $B' = \delta^r$, откуда $u_1 = \delta^{q-r}$. Противоречие.

Случай 2.2.2. $W \equiv A y_2 B y_1 C u_1 \hat{x} u_2$, $V_1 \equiv A y_2 B \hat{y}_1 C \tau^{-1}(u_2)$, $V_2 \equiv A \hat{y}_2 B y_1 C u_1$. Из условия $u_1 \delta = u_1 x u_2 = \delta u_2$ следует, что $u_2 = \tau(u_1)$, откуда $V_1 \equiv A y_2 B \hat{y}_1 C u_1$. Из условий $B' y_1 C' u_1 = \delta^q$ (ребро e_2 типа (v2)) и $y_1 C' u_1 = \delta^{r+1}$ (ребро e_1 типа (v2)) следует, что $B' = \delta^{q-r-1}$. Чтобы заключить что $V_1 \sim_{\mathrm{h1}} V_2$, осталось проверить, что $y_1 = \tau^{q-r-1}(y_2)$. Действительно, $y_1 \delta^r u_1 = \delta^{r+1}$ влечет $\tau^r(y_1) u_1 = \delta$, а условие $y_2 \delta^q u_2 = \delta^{q+1}$ влечет $\tau^q(y_2) u_2 = \delta$. Вспоминая, что $u_2 = \tau(u_1)$, получаем $\delta = \tau(\delta) = \tau(\tau^r(y_1) u_1) = \tau^{r+1}(y_1) u_2$, откуда $\tau^{r+1}(y_1) = \delta u_2^{-1} = \tau^q(y_2)$.

Случай 2.2.3. $W \equiv A y_1 B y_2 C u_1 \hat{x} u_2$, $V_1 \equiv A \hat{y}_1 B y_2 C \tau^{-1}(u_2)$, $V_2 \equiv A y_1 B \hat{y}_2 C u_1$. Из того, что e_2 — ребро типа (v2), следует, что $C' u_1 = \delta^q$. Поэтому по лемме 2 мы имеем $C u_1 \equiv C_1 z_1 C_2 u_1$, где z_1 — буква, парная к u_1 в слове $C u_1$. Пусть $V_3 \equiv A y_1 B y_2 C_1 \hat{z}_1 C_2 u_1$. Тогда $e_3 = (W, V_3)$ — ребро типа (v2), причем пара ребер (e_1, e_3) относится к случаю 2.1, а пара ребер (e_3, e_2) — к случаю 2.2.2.

Случай 2.3. Слова P_1 и P_2 имеют одну общую букву $u_1 = u_2 = u$, т. е. $W \equiv A \hat{x}_1 u \hat{x}_2$. Поскольку $x_1 \delta = x_1 u x_2 = \delta x_2$, мы имеем $x_2 = \tau^{-1}(x_1)$. Поэтому ребро типа (v2), определяемое парой (P_1, y_2), совпадает с e_2, и задача сводится к случаю 2.1.

Случай 2.4. P_1 и P_2 не пересекаются, $y_1 = u_2$, $y_2 = u_1$. Тогда $W \equiv AP_1BP_2$, $V_1 \equiv A\tau^{-1}(B\hat{P}_2)$, $V_2 \equiv A\hat{P}_1B$, $B' = \delta^q$. Если $q = 0$, то $V_1 \sim_{\rm h3} V_2$. Пусть $q > 0$. Запишем B в виде $\hat{C}zD$, $z \in \mathcal{A}$. Пусть $xy = yz = \delta$. Из $P_1C = \tau^{-1}(C)xy$ вытекает $V_3 \equiv A\tau^{-1}(\hat{C})\hat{x}\hat{y}zD \sim_{\rm h3} V_2$. Тогда $V_1 \equiv E\tau^{-1}(zD\hat{P}_2)$ и $V_3 \equiv E\hat{x}\hat{y}zD$ для $E \equiv A\tau^{-1}(\hat{C})$. Поскольку $zD' = (\hat{C}zD)' = B' = \delta^q$, по лемме 2 в слове zD есть буква u парная к z. Пусть (V_3, U_3) — ребро типа (v2) для пары $(\hat{y}z, u)$. Тогда $D \equiv D_1uD_2$, $U_3 \equiv E\hat{x}\tau^{-1}(D_1\hat{u}D_2)$. Мы имеем $D_1' = \delta^r$ и $zD_1'u = \delta^{r+1}$. Напомним, что $zD_1'uD_2' = \delta^q$. Следовательно, $D_2' = \delta^{q-r-1}$. Пусть $v = \tau^{q-r-1}(u)$ и $vw = \delta$. Можно считать, что $P_2 \equiv vw$ (иначе добавим ребро типа (h3)). Тогда $V_1 \sim_{\rm h1} V_4 \equiv E\tau^{-1}(zD_1\hat{u}D_2v\hat{w})$. Покажем, что $\tau^{-1}(z)$ и $\tau^{-1}(v)$ — парные буквы в V_4. Действительно, $D_1'D_2' = \delta^r\delta^{q-r-1} = \delta^{q-1}$ и $uD_2' = D_2'v$ (в силу выбора v), откуда $zD_1'D_2'v = zD_1'uD_2' = B' = \delta^q$. Пусть (V_4, U_4) — ребро типа (v2) для пары $(\tau^{-1}(v\hat{w}), \tau^{-1}(z))$. Тогда $U_4 \equiv E\tau^{-1}(\hat{z}D_1\hat{u}D_2)$. Остается заметить, что $x\delta = xyz = \delta z$, откуда $x = \tau^{-1}(z)$ и, следовательно, $U_3 \equiv U_4$.

Случай 2.5. P_1, P_2 и y_2 не пересекаются: $W \equiv D_1D_2$, где $D_1 \equiv AP_1B$ и $D_2 \equiv y_2CP_2$, причем $C' = \delta^q$ и $D_2' = \delta^{q+1}$. Тогда $D_1' = W'\delta^{-q-1}$ есть степень δ, поэтому по лемме 2 в D_1 есть буква z_1 парная к u_1. Пусть (W, V_3) — ребро типа (v2), отвечающее паре (P_1, z_1). Тогда $V_1 \sim_{\rm h} V_3$ (см. случай 2.1), причем $V_2 \equiv D_1E_2$ и $V_3 \equiv E_1\tau^{-1}(D_2)$, где $D_i \sim_{\rm v2} E_i$ в соответствующих графах. Следовательно, $V_2 \sim_{\rm v2} E_1\tau^{-1}(E_2) \sim_{\rm v2} V_3$.

Случай 3. e_1 имеет тип (v3), а e_2 — тип (v2) или (v3). Пусть $W \sim_{\rm h3} W_i \sim_{\rm v2} V_i$, $i = 1, 2$. Пусть $P_i \in \{\hat{x}_iu_i, u_i\hat{x}_i\}$ и y_i — части слова W_i, участвующие в определении ребра (W_i, V_i). Можно считать, что $W_1 \equiv Eu_1\hat{x}_1\hat{F}_1u_2$ и $W_2 \equiv Eu_1\hat{F}_2\hat{x}_2u_2$, где $x_1F_1 = F_2x_2$ (иначе задача сводится к случаю 2). По лемме 1 мы имеем $x_1F_1 = \delta\tau(D) = D\delta$, $D \in \mathcal{A}^*$, поэтому будем считать, что $x_1F_1 \equiv x_1v_1\tau(D)$ и $F_2x_2 \equiv Dv_2x_2$, где $x_1v_1 = v_2x_2 = \delta$. Без ограничения общности можно предполагать, что $u_1x_1v_1 \equiv \sigma_2\sigma_1\sigma_0$.

Случай 3.1. $y_1 = u_2$ и $y_2 = u_1$. Тогда $u_1(\hat{x}_1\hat{F}_1)'u_2 = u_1u_2 = \delta$. Следовательно, $W_1 \equiv E\sigma_2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_0\tau(\hat{D})\sigma_1$ и $W_2 \equiv E\sigma_2\hat{D}\hat{\sigma}_0\hat{\sigma}_2\sigma_1$, откуда $V_1 \equiv E\tau^{-1}(\hat{\sigma}_0\tau(\hat{D})\hat{\sigma}_1) \equiv E\hat{\sigma}_2\hat{D}\hat{\sigma}_0 \equiv V_2$.

Случай 3.2. $E \equiv E_2y_1E_1$. Тогда $E_1' = \delta^q$ и $y_1E_1'u_1 = \delta^{q+1}$. Следовательно, по лемме 4 в E_2 найдется буква z_2 парная к u_2. Пусть (W_2, V_3) — ребро типа (v2), для пары (P_2, z_2). Тогда $V_2 \sim_{\rm h} V_3$ (см. случай 2.1). Заменяя W на его циклическую перестановку, мы можем считать, что $W_1 \equiv Ay_1Bu_1\hat{x}_1\hat{v}_1\tau(\hat{D})u_2Cz_2$, $W_2 \equiv Ay_1Bu_1D\hat{v}_2\hat{x}_2u_2Cz_2$, $B' = \delta^q$, $y_1Bu_1 = \delta^{q+1}$, $C' = \delta^r$, $u_2C'z_2 = \delta^{r+1}$. Для всех значений u_2 мы укажем V_4 такую, что $V_1 \sim_{\rm h} V_4 \sim_{\rm h} V_3$. (для $u_2 = \sigma_1, \sigma_2$ мы перечисляем индексы, которые надо подставить в формулы для V_1, V_3 и V_4).

$$u_2 = \sigma_0:$$
$$V_1 \equiv A\tau^{-q}(\hat{\sigma}_0)B\tau^{-1}\big(\hat{\sigma}_0\tau(\hat{D})\sigma_0C\tau^r(\sigma_2)\big) \equiv A\tau^{-q}(\hat{\sigma}_0)B\hat{\sigma}_2\hat{D}\sigma_2\tau^{-1}(C)\tau^r(\sigma_1),$$
$$V_3 \equiv A\,\tau^{-q}(\sigma_0)\,B\,\sigma_2\,\hat{D}\,\hat{\sigma}_2\,\tau^{-1}\big(C\,\tau^r(\hat{\sigma}_2)\big) \equiv A\tau^{-q}(\sigma_0)B\sigma_2\hat{D}\hat{\sigma}_2\tau^{-1}(C)\tau^r(\hat{\sigma}_1),$$
$$V_4 \equiv A\tau^{-q}(\sigma_0)B\hat{\sigma}_2\hat{D}\sigma_2\tau^{-1}(C)\tau^r(\hat{\sigma}_1);$$
$$u_2 = \sigma_1\colon V_1(\hat{0}\hat{2}02),\ V_4(02\hat{0}2),\ V_3(020\hat{2});\quad u_2 = \sigma_2\colon V_1(\hat{0}\hat{2}10),\ V_4(\hat{0}21\hat{0}),\ V_3(02\hat{1}\hat{0}).$$

Случай 4. e_1 имеет тип (v1), а e_2 — тип (v2). Пусть $(W, V_1) \equiv (AP_1, A)$, $P_1 = \delta$. Обозначим через P и y части слова W, участвующие в определении ребра e_2.

Случай 4.1. P_1 имеет с P одну общую букву: $W \equiv AyB\hat{x}uv$, $xu = uv = \delta$, $B' = \delta^q$, $yB'u = \delta^{q+1}$, $V_1 \equiv AyB\hat{x}$ и $V_2 \equiv A\hat{y}B\tau^{-1}(v)$. Из $x\delta = xuv = \delta v$ следует $\tau^{-1}(v) = x$, а из $y\delta^q u = \delta^{q+1}$ и $xu = \delta$ следует $x = \tau^q(y)$. Поэтому $V_1 \sim_{\mathrm{v1}} V_2$.

Случай 4.2. P_1 не пересекается с P. По лемме 4 имеем $A \equiv BzCPD$, где z — парная буква к u. Пусть (W, V_3) — ребро типа (v2), отвечающее паре (P, z). Тогда $V_2 \sim_{\mathrm{h}} V_3$ (см. случай 2.1) и есть вертикальные ребра (V_1, V_4) и (V_3, V_4), где $V_4 \equiv B\hat{z}C\tau^{-1}(D)$.

Случай 5. e_1 имеет тип (v1), а e_2 — тип (v3). Пусть $W \sim_{\mathrm{h3}} W_1 \sim_{\mathrm{v2}} V_2$. Легко видеть, что тогда $W_1 \sim_{\mathrm{v1}} V_1$, что сводит задачу к случаю 4. □

Лемма 10. *Пусть $e = (W_1, W_2)$ — горизонтальное ребро графа $\mathcal{G}(X)$. Если $\mathrm{wt}(W_1) > 0$, то существуют вертикальные ребра (W_1, V_1) и (W_2, V_2) такие, что $V_1 \sim_{\mathrm{h}} V_2$.*

Доказательство. Из условия $\mathrm{wt}(W_1) > 0$ следует, что в $\bar{W}_1$ есть подслово P, равное δ. По лемме 8 достаточно рассмотреть ребра типа (h1) и (h3).

Случай 1. e типа (h1). Пусть x и y будут как в определения ребра типа (h1). Ясно, что $P \not\equiv xy$. Если P, x и y не пересекаются, утверждение леммы очевидно.

Случай 1.1. $W_1 \equiv A\hat{y}Bux$, $W_2 \equiv AyBu\hat{x}$, $ux = \delta$. Положим $V_1 = A\hat{y}B$. Тогда $W_1 \sim_{\mathrm{v1}} V_1$. Поскольку e — ребро типа (h1), мы имеем $B'u = \delta^q$, $x = \tau^q(y)$. Следовательно, по лемме 2, в слове Bu есть буква z, парная к u, т. е. $B \equiv B_1 z B_2$, $B_2' = \delta^r$, $zB_2'u = \delta^{r+1}$, и значит, $W_2 \sim_{\mathrm{v2}} V_2 \equiv AyB_1\hat{z}B_2$. Докажем, что $V_1 \sim_{\mathrm{h1}} V_2$. Действительно, из $B_1' z B_2' u = B'u = \delta^q$ и $zB_2'u = \delta^{r+1}$ вытекает $B_1' = \delta^{q-r-1}$, а из $z\delta^r u = \delta^{r+1}$ и $ux = \delta$ вытекает $x = \tau^{r+1}(z)$, что вместе с $x = \tau^q(y)$ дает $z = \tau^{q-r-1}(y)$.

Случай 1.2. $W_1 \equiv A\hat{y}Bxu$, $W_2 \equiv AyB\hat{x}u$, $xu = \delta$, $B' = \delta^q$, $yB' = B'x$. Тогда $yB'u = B'(xu) = \delta^{q+1}$, т. е. $(W_1, A\hat{y}B)$ и $(W_2, A\hat{y}B)$ – ребра типа (v1) и (v2).

Случай 2. e типа (h3). Без ограничения общности можно считать, что $W_1 \equiv Au\hat{B}_1$, $W_2 \equiv Au\hat{B}_2$, $u \in \mathcal{A}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{A}^*$, $B_1 = B_2$. Из леммы 1 следует, что $B_1 = \delta B$. Пусть $W \equiv Au\hat{x}\hat{v}\hat{B}$, где $ux = xv = \delta$. Тогда $W_1 \sim_{\mathrm{h3}} W \sim_{\mathrm{h3}} W_2$. Пусть y — парная буква к u и (W, V) — ребро типа (v2) для пары $(u\hat{x}, y)$. Тогда $W_1 \sim_{\mathrm{v3}} V \sim_{\mathrm{v3}} W_2$. □

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 7 достаточно доказать, что из $W \sim V$ и $\mathrm{wt}(W) = \mathrm{wt}(V)$ следует $W \sim_{\mathrm{h}} V$. Действительно, если путь из W в V в графе $\mathcal{G}(X)$ проходит через вершины веса, большего чем $\mathrm{wt}(W)$, то по леммам 9 и 10 его можно так изменить, чтобы уменьшилось либо число вершин максимального веса, либо число горизонтальных ребер, соединяющих вершины максимального веса.

Цитированная литература

1. E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, J. I. Cogolludo Agustín, *Effective invariants of braid monodromy*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 165–183.
2. J. Birman, K.-H. Ko, S.-J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Adv. Math. **139** (1998), 322–353.
3. Вик. С. Куликов, *Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица II*, Изв. РАН, сер. матем. **76:2** (2012), 151–160.
4. С. Ю. Оревков, *О действии Гурвица на квазиположительных разложениях кос из трех нитей*, ДАН (в печати).

Математический ин-т им. В. А. Стеклова и Университет им. Поля Сабатье (Тулуза-3)
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr