ДВУМЕРНЫЕ ДИФФУЗИОННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ, УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПО ВЗВЕШЕННОЙ СТЕПЕНИ

С. Ю. Оревков

А н н о т а ц и я . Мы рассматриваем следующую задачу: описать все тройки (Ω, g, μ), $\mu = \rho\, dx$, где $g = (g^{ij}(x))$ — (ко)метрика, ассоциированная с симметричным дифференциальным оператором второго порядка $\mathbf{L}(f) = \frac{1}{\rho}\sum_{ij}\partial_i(g^{ij}\rho\,\partial_j f)$, определенным на области Ω в $\mathbb{R}^d$, и таким, что существует ортонормальный базис пространства $\mathcal{L}^2(\mu)$, составленный из многочленов, являющихся собственными векторами оператора $\mathbf{L}$, причем этот базис согласован с фильтрацией пространства многочленов по некоторой взвешенной степени.

В совместной работе с Д. Бакри и М. Зани эта задача была решена в размерности 2 для обычной степени. В настоящей статье эта задача решается по-прежнему в размерности 2, но для произвольной взвешенной степени.

1. Введение

В [3] рассматривалась следующая проблема, поставленная Домиником Бакри (см. также [1], [2], [5], [6]): описать все тройки $(\Omega, \mathbf{L}, \mu)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{L}$ — эллиптический оператор второго порядка вида

$$\mathbf{L}(f) = \sum_{i,j} g^{ij}(x)\partial_{ij} f + \sum_i b^i(x)\partial_i f \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами, непрерывными в Ω, и μ — вероятностная мера на Ω с $\mathcal{C}^1$-гладкой плотностью такая, что существует полиномиальный ортогональный базис пространства $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbf{L}$, который является базисом (в алгебраическом смысле) в $\mathbb{R}[x]$, $x = (x_1, \dots, x_d)$. Ясно, что в этом случае $\mathbf{L}$ симметричен на пространстве многочленов, т. е.

$$\int_\Omega f_1 \mathbf{L} f_2\, d\mu = \int_\Omega f_2 \mathbf{L} f_1\, d\mu \tag{2}$$

для любых двух полиномиальных функций f_1 и f_2.

Предположим, что $e_1, e_2, \dots$ — такой базис, и пусть V_n — подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_n$. Тогда имеется возрастающая последовательность

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 19-11-00316

L-инвариантных подпространств $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$ пространства $\mathbb{R}[x]$, объединение которых есть $\mathbb{R}[x]$, и при этом $\mathbb{R}[x]$ плотно в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$.

Обратно, для любой возрастающей последовательности конечномерных **L**-инвариантных подпространств в $\mathbb{R}[x]$, объединение которых есть $\mathbb{R}[x]$, можно выбрать полиномиальный ортогональный собственный базис в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ при условии, что оператор **L** симметричен на многочленах и $\mathbb{R}[x]$ плотно в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$.

Эту проблему вряд ли можно решить в столь общей постановке — без каких-либо разумных ограничений на фильтрацию $V_1 \subset V_2 \subset \dots$. Так, в [3] дополнительно предполагалось, что для любого n пространство многочленов степени не выше n инвариантно относительно **L** и, значит, является одним из V_i. В [3] также предполагалось, что если область Ω неограниченна, то (2) выполнено для любой пары функций с компактным носителем (для ограниченных областей это условие следует из симметричности **L** на многочленах и из того, что $\mathbb{R}[x]$ плотно в $\mathcal{L}(\Omega, \mu)$). В этих предположениях в [3] получен полный список решений в размерности 2. С точностью до аффинных преобразований $\mathbb{R}^2$ есть одно бесконечное семейство ограниченных областей, а также 19 жестких областей (среди них 10 ограниченных), для которых существует решение. Одна из этих 19 областей пропущена в [3], см. §6.3(2) ниже.

Замечание 1.1. В размерности 1 единственные решения рассматриваемой задачи — это классические системы ортогональных многочленов: Эрмита, Лагерра и Якоби, получающиеся ортогонализацией Грама – Шмидта для мер с плотностью соответственно $Ce^{-x^2/2}$ на $\mathbb{R}$, $C_a x^{a-1} e^{-x}$ при $a > 0$ на $[0, \infty)$ и $C_{p,q}(1-x)^{p-1}(1+x)^{q-1}$ при $p, q > 0$ на $[-1, 1]$ (здесь C, C_a и $C_{p,q}$ — нормирующие константы). Им соответствуют операторы $\partial^2 - x\partial$, $x\partial^2 + (a - x)\partial$ и $J_{p,q} = (1-x^2)\partial^2 - \big((p-q) + (p+q)x\big)\partial$.

Однако фильтрация по обычной степени — черезчур ограничительное условие в размерности $d \geq 2$. Многие естественные системы ортогональных многочленов ему не удовлетворяют. Тем не менее их можно получить описанным способом, если, кроме обычной степени, включить в рассмотрение взвешенную степень (см. [1]). Как обычно, взвешенной степенью многочлена $P = \sum_k a_k x^k$, $k = (k_1, \dots, k_d)$, с вещественными положительными весами $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$ мы называем

$$\deg_{\mathbf{w}}(P) = \max_{a_k \neq 0}(w_1 k_1 + \dots + w_d k_d).$$

В настоящей статье (в §6) для любой пары положительных весов $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ дается полный список двумерных решений при условии, что для любого n пространство многочленов P таких, что $\deg_{\mathbf{w}}(P) \leq n$, инвариантно относительно **L**.

Дадим точные определения. Назовем $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *естественной областью*, если это связное открытое множество, совпадающее с внутренностью своего замыкания.

Определение 1.2. (ср. с [1], [3]) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — естественная область, **L** — эллиптический оператор второго порядка вида (1) с коэффициентами, непрерывными в Ω, и $\mu(dx) = \rho(x)\,dx$ — вероятностная мера на Ω с $\mathcal{C}^1$-гладкой плотностью ρ такие, что пространство всех многочленов плотно в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$. Пусть $\mathbf{w}$ — набор из d положительных вещественных чисел. Скажем, что $(\Omega, \mathbf{L}, \mu)$ является решением *задачи о диффузионных ортогональных многочленах с весами* $\mathbf{w}$ (задачи $\mathbf{w}$-DOP), если для любого n пространство $\{P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d] \mid \deg_{\mathbf{w}}(P) \le n\}$ (рассматриваемое как подпространство в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$) обладает ортогональным собственным базисом для $\mathbf{L}$. Если к тому же равенство (2) выполнено для всех гладких функций на $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем, то $(\Omega, \mathbf{L}, \mu)$ — решение *сильной* задачи $\mathbf{w}$-DOP (задачи $\mathbf{w}$-SDOP).

В [3, предл. 2.11] показано, что если $(\Omega, \mathbf{L}, \mu)$ — решение задачи $\mathbf{w}$-SDOP, то $\mathbf{L}$ однозначно определяется плотностью ρ и кометрикой $g = (g^{ij})$ (где g^{ij} — коэффициенты в (1)), а именно, в этом случае $\mathbf{L}$ есть *оператор диффузии*

$$\mathbf{L}(f) = \frac{1}{\rho} \sum_{i,j} \partial_i \Big(g^{ij} \rho \, \partial_j f \Big). \tag{3}$$

Поэтому тройку (Ω, g, ρ) мы тоже будем называть решением задачи $\mathbf{w}$-SDOP. Заметим, что если $\rho = (\det g)^{-1/2}$, то (3) — оператор Лапласа–Бельтрами для римановой метрики $(g_{ij}) = g^{-1}$.

Как сказано выше, любое решение задачи $\mathbf{w}$-DOP в ограниченной области Ω является решением задачи $\mathbf{w}$-SDOP (см. [3, предл. 2.12]). В [3] также показано, что любое решение задачи SDOP является решением некоторой алгебраической задачи о метрике g^{ij} (задача AlgDOP; см. §2 ниже). Это доказано в [3] для обычной степени, но все доказательства переносятся без изменений и на взвешенную степень. Поэтому для нахождения двумерных решений задачи SDOP мы следуем той же стратегии, что и в [3]: сначала решаем алгебраическую задачу над $\mathbb{C}$, используя свойства особых комплексных алгебраических кривых (см. §§4–5), а затем ищем Ω и ρ (см. §6).

Все ограниченные области, на которых есть решения, уже встречались в литературе, кроме, возможно, одного бесконечного семейства: (B4) при $m \ne n$ в теореме 6.2.

2. Некоторые общие факты о взвешенной задаче DOP/SDOP в произвольной размерности

2.1. Задача AlgDOP. Пусть $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$ и (Ω, g, ρ) — решение задачи $\mathbf{w}$-SDOP в $\mathbb{R}^d$. Положим $\Delta = \det(g^{ij})$. Обозначим через $\mathcal{P}_{\mathbf{w}}(n; \mathbb{K})$ векторное пространство многочленов от $x_1, \dots, x_d$ с коэффициентами в поле $\mathbb{K}$, у которых взвешенная степень с весами $\mathbf{w}$ не выше n. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ будем сокращать это обозначение до $\mathcal{P}_{\mathbf{w}}(n)$.

Пусть $I(\partial\Omega)$ — идеал в $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Поскольку Ω — естественная область, идеал $I(\partial\Omega)$ главный (действительно, $U \cap \partial\Omega$ не может иметь коразмерность ≥ 2 ни для какого открытого множества U). Пусть Γ — образующая идеала $I(\partial\Omega)$, т. е. Γ — наименьший многочлен, обращающийся в нуль на $\partial\Omega$. В частности, если многочлен Γ не равен тождественно нулю, он *приведенный* (square-free), т. е. не содержит кратных множителей. Будем считать, что $I(\varnothing) = \mathbb{R}[x]$, т. е. $\Gamma = 1$, когда $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Предложение 2.1. (См. [3, теорема 2.21].)

(A1) *$g^{ij} \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_i + w_j)$ при всех $i, j = 1, \dots, d$. Тогда $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(2w_1 + \dots + 2w_d)$.*

(A2) *$\partial\Omega \subset \{\Delta = 0\}$, следовательно, Γ делит Δ.*

(A3) *При всех $i = 1, \dots, d$*

$$\sum_j g^{ij} \partial_j \Gamma = \Gamma S^i, \qquad S^i \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_i). \tag{4}$$

Условие (A1) легко следует из инвариантности взвешенной степени, (A3) выводится в [3] из симметричности $\mathbf{L}$, и (A2) вытекает из (A3).

Это приводит к следующему определению (ср. с определением 3.2 в [3]).

Определение 2.2. Пусть $\mathbb{K}$ есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и пусть $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$ — набор положительных вещественных чисел. Решение *алгебраической задачи* $\mathbf{w}$*-SDOP над* $\mathbb{K}$ (задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP над $\mathbb{K}$) — это пара (g, Γ), где $g = (g^{ij})$ — симметричная матрица $d \times d$ с полиномиальными коэффициентами, и Γ — такой многочлен, что

- (A1) $g^{ij} \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_i + w_j; \mathbb{K})$ при всех $i, j = 1, \dots, d$;
- (A2) $\det g$ не равен тождественно нулю, и Γ — его делитель, не имеющий кратных множителей;
- (A3) Γ делит $\sum_j g^{ij} \partial_j \Gamma$ при каждом $i = 1, \dots, d$.

Из предложения 2.1 следует, что если (Ω, g, ρ) — решение задачи $\mathbf{w}$-SDOP и Γ — образующая $I(\partial\Omega)$, то (g, Γ) — решение задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP над $\mathbb{R}$, а значит, и над $\mathbb{C}$. Следующие утверждения вытекают непосредственно из определений.

Предложение 2.3. *Пусть* $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$ *и* $\mathbf{w}' = (w'_1, \dots, w'_d)$ *— два набора положительных весов. Предположим, что* (g, Γ) *— решение задачи* $\mathbf{w}$*-AlgDOP/*$\mathbb{K}$ *и* $g^{ij} \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}'}(w'_i + w'_j; \mathbb{K})$ *при всех* $i, j = 1, \dots, d$. *Тогда* (g, Γ) *— тоже решение задачи* $\mathbf{w}'$*-AlgDOP/*$\mathbb{K}$.

Предложение 2.4. *Если* (g, Γ) *— решение задачи* $\mathbf{w}$*-AlgDOP/*$\mathbb{K}$ *и* Γ_1 *— делитель* Γ*, то* (g, Γ_1) *— тоже решение задачи* $\mathbf{w}$*-AlgDOP/*$\mathbb{K}$.

Если задан приведенный многочлен Γ, то найти все кометрики g, для который (g, Γ) — решение задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP, легко. В самом деле, условие (A3) в определении 2.2 (в форме (4)) дает систему линейных уравнений на коэффициенты многочленов g^{ij} и S^i. В §2.3 мы покажем, как найти все ρ для данных Ω и g.

2.2. Допустимые замены переменных. Назовем $\mathbf{w}$*-допустимой заменой переменных* биективное полиномиальное отображение $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto (y_1(x), \dots, y_d(x))$ такое, что $\deg_{\mathbf{w}}(y_i) = w_i$, $i = 1, \dots, d$. Если $d = 2$, то $(1, w)$-допустимые замены в $\mathbb{R}^2$ при $w = 1$ — аффинно линейные преобразования, а при $w > 1$ — отображения вида

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta,\ \gamma y + p(x)), \qquad \alpha\gamma \neq 0,\ \ \deg(p) \leq w. \tag{5}$$

Следующее предложение доказывается так же, как [3, предл. 2.5].

Предложение 2.5. *(a). Пусть* $(\Omega, \mathbf{L}, \mu)$ *— решение задачи* $\mathbf{w}$*-DOP (соотв.* $\mathbf{w}$*-SDOP) и* Φ *—* $\mathbf{w}$*-допустимая замена. Положим* $\Omega_1 = \Phi(\Omega)$, $\mathbf{L}_1(f) = \mathbf{L}(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ *и* $\mu_1(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$. *Тогда* $(\Omega_1, \mathbf{L}_1, \mu_1)$ *— тоже решение задачи* $\mathbf{w}$*-DOP (соотв.* $\mathbf{w}$*-SDOP).*

(b). Пусть (g, Γ) *— решение задачи* $\mathbf{w}$*-AlgDOP/*$\mathbb{K}$ *и* Φ *—* $\mathbf{w}$*-допустимая замена. Тогда* $(\Phi_*(g), \Gamma \circ \Phi^{-1})$ *— тоже решение задачи* $\mathbf{w}$*-AlgDOP/*$\mathbb{K}$.

Пример 2.6. Пусть $d = 2$. При всех $\mathbf{w}$ замена $\Phi : (x, y) \mapsto (x, -y)$ $\mathbf{w}$-допустима. Если (g, Γ), $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, есть решение задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP/$\mathbb{K}$, то $(\Phi_*(g), \Gamma(x, -y))$, где

$$\Phi_*(g) = \begin{pmatrix} a(x,-y) & -b(x,-y) \\ -b(x,-y) & c(x,-y) \end{pmatrix},$$

тоже является решением задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP/$\mathbb{K}$.

Пример 2.7. Более общо, пусть опять $d = 2$. Любая $(1, w)$-допустимая замена при $w > 1$ имеет вид (5) и является композицией следующих замен $(x, y) \mapsto (X, Y)$:

$$T : (x, y) \mapsto (x + \beta, y), \quad H : (x, y) \mapsto (\alpha x, \gamma y), \quad S : (x, y) \mapsto (x, y + p(x)).$$

Их действие на $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ следующее (см. [3, (2.3)]): $T_*(g) = g(X - \beta, Y - \beta)$,

$$H_*(g) = \begin{pmatrix} a\alpha^2 & b\alpha\gamma \\ b\alpha\gamma & c\gamma^2 \end{pmatrix}_{\substack{x=X/\alpha \\ y=Y/\gamma}} \qquad S_*(g) = \begin{pmatrix} a & p'a + b \\ p'a + b & (p')^2 a + 2p'b + c \end{pmatrix}_{\substack{x=X \\ y=Y-p(X)}}$$

2.3. От AlgDOP к DOP/SDOP. Как было сказано в §2.1, любое решение (Ω, g, μ) задачи $\mathbf{w}$-SDOP дает решение (Γ, g) задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP, где Γ — образующая идеала $I(\partial\Omega)$. В этом пункте обсуждется поиск всех (Ω, g, μ) для данных (Γ, g).

Пусть дано (Γ, g) — решение задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP/$\mathbb{R}$. Сначала надо найти все компоненты связности Ω множества $\mathbb{R}^d \setminus \{\Gamma = 0\}$, на которых форма g положительно определена. Затем надо найти все плотности ρ, для которых оператор $\mathbf{L}$, заданный формулой (3), имеет вид (1), где $b^i \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_i)$ для всех $i = 1, \dots, d$. Это можно сделать следующим образом. Сравнивая (1) и (3), получаем

$$b^i = \sum_j \partial_j g^{ij} + \sum_j g^{ij} \partial_j h, \qquad h = \log \rho. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\partial_j h = \sum_i g_{ij} L^i, \qquad L^i = b^i - \sum_j \partial_j g^{ij}, \tag{7}$$

где $(g_{ij}) = g^{-1}$. При этом $b^i \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_i) \Leftrightarrow L^i \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_i)$. Равенства $\partial_k(\partial_j h) = \partial_j(\partial_k h)$ в совокупности с (7) дают

$$\partial_k \Big(\sum_i g_{ij} L^i \Big) = \partial_j \Big(\sum_i g_{ik} L^i \Big), \tag{8}$$

что является системой линейных уравнений на коэффициенты многочленов L^i. Это наблюдение приводит к следующему способу нахождения всех решений для ρ. Сначала находим многочлены L^i, $\deg_{\mathbf{w}} L^i = w_i$, решая систему линейных уравнений (8) (решение может зависеть от параметров). Затем вычисляем h, интегрируя $\partial_j h$ (выраженные в (7) через L^i), и полагаем $\rho = \exp(h)$. После этого находим значения параметров, при которых функция $Q(x)\rho(x)$, интегрируема по Ω для любого многочлена Q (если Ω ограничена, достаточно потребовать, что $\int_\Omega \rho\, dx < \infty$).

В частности, эти наблюдения позволяют доказать следующий факт.

Предложение 2.8. *Пусть* (Ω, g, ρ) — *решение задачи* $\mathbf{w}$-*SDOP в* $\mathbb{R}^d$ *такое, что* $g = \operatorname{diag}\big(g^{11}(x_1), \dots, g^{dd}(x_d)\big)$. *Тогда для некоторого разбиения* $\{1, \dots, d\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_m$, $J_k = \{j_k(1), \dots, j_k(d_k)\}$, *имеет место:*

- $\rho = \rho_1(\mathbf{x}_1) \dots \rho_m(\mathbf{x}_m)$, *где* $\mathbf{x}_k = (x_{j_k(1)}, \dots, x_{j_k(d_k)})$, $k = 1, \dots, m$;
- *если* $d_k > 1$, *то* $w_i = w_j$ *и* $g^{ii} = \mathrm{const}$ *для всех* $i, j \in J_k$.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $d = 2$. Из него несложно вывести общий случай. Пусть $h = \log \rho$. Достаточно доказать, что либо g постоянна, либо $\partial_{12} h = 0$ и тогда $h = h_1(x_1) + h_2(x_2)$, откуда $\rho = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2)$. Действительно, обратная матрица к g есть $\operatorname{diag}(g_{11}, g_{22})$, где $g_{ii} = 1/g^{ii}$. Тогда из (8) следует, что

$$\partial_{12} h = \frac{\partial_2 L^1(x_1, x_2)}{g^{11}(x_1)} = \frac{\partial_1 L^2(x_1, x_2)}{g^{22}(x_2)}, \qquad \deg_{\mathbf{w}} L^i \le w_i.$$

Поэтому $\partial_{12} h$ — многочлен и g^{ii} делит $\partial_j L^i$ при $i \ne j$. Значит, если $\partial_{12} h$ не равно нулю, то $0 \le \deg_{\mathbf{w}} g^{11} \le \deg_{\mathbf{w}} \partial_2 L^1 = \deg_{\mathbf{w}} L^1 - w_2 \le w_1 - w_2$ и, симметрично, $0 \le \deg_{\mathbf{w}} g^{22} \le w_2 - w_1$, что влечет $w_1 = w_2$ и $\deg_{\mathbf{w}} g = 0$, т. е. g постоянна. $\square$

В завершение этого пункта приведем некоторые условия (необходимые или достаточные) совместимости ρ с данными g и Ω. Они доказаны в [3] для обычной степени, но доказательства легко переносятся на взвешенную степень.

Предложение 2.9. (См. [3, теорема 2.21].) *Пусть* (g, Γ), $\Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_s$ — *решение задачи* $\mathbf{w}$-*AlgDOP*/$\mathbb{R}$ *(напомним, что тогда у* Γ *нет кратных множителей). Пусть* Ω — *ограниченная область такая, что* $\partial\Omega \subset \{\Gamma = 0\}$ *и* g *положительно определена в* Ω. *Пусть* $a_1, \dots, a_s$ — *такие вещественные числа, что* $\mu(\Omega) < \infty$ *для меры* μ *с плотностью* $\rho = \prod_\nu \Gamma_\nu^{a_\nu}$ *(например,* $a_\nu \ge 0$ *при всех* ν*). Тогда* $(\Omega, \mathbf{L}, \mu)$, *где* $\mathbf{L}$ *задан в (3), является решением задачи* $\mathbf{w}$-*DOP.*

Определение 2.10. Решение (g, Γ) задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP называется *максимальным* (и тогда Γ называется *максимальной границей для* g), если Γ_1 делит Γ для любого решения (g, Γ_1). В силу предложения 2.4, максимальное решение единственно для любой фиксированной g.

Предложение 2.11. (См. [3, предл. 2.15, 2.17].) *Пусть* (Ω, g, ρ) — *решение задачи* $\mathbf{w}$-*SDOP в* $\mathbb{R}^d$, *и* $\Delta = \det(g)$. *Пусть* Γ — *максимальная граница для* g, *и пусть* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ — *ее неприводимые (над* $\mathbb{C}$*) множители. Предположим, что каждый множитель* Γ_k *входит в* Δ *с кратностью* 1, *т. е.* Γ_k^2 *не делит* Δ. *Тогда (см. замечание 2.12)*

$$\rho = \Gamma_1^{p_1} \dots \Gamma_s^{p_s} \exp(Q) \tag{9}$$

для некоторых $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{C}$ *и многочлена* Q *таких, что при всех* $j = 1, \dots, d$,

$$w_j \deg_{x_j}(Q\Delta) \le 2w_1 + \dots + 2w_d. \tag{10}$$

Замечание 2.12. В предложении 2.11, если при некотором k многочлен $\lambda\Gamma_k$, $\lambda \in \mathbb{C}$, вещественен, мы предполагаем, что Γ_k вещественен и положителен на Ω; в этом случае $p_k \in \mathbb{R}$. В противном случае $\bar{\Gamma}_k$ — тоже делитель Γ, и он входит в ρ в степени $\bar{p}_k$, так как ρ — вещественная функция. Тогда мы понимаем $\Gamma_k^{p_k}\bar{\Gamma}_k^{\bar{p}_k}$ как однозначную ветвь этой функции на Ω. При другом выборе однозначной ветви изменится только свободный член многочлена Q.

Замечание 2.13. Предложение 2.11 допускает следующее уточнение. Соотношения (9) и (10) для переменной x_j выполнены, даже когда Δ имеет кратные множители Γ_k, при условии, что они зависят только от переменных $(x_i)_{i\in I}$, среди которых нет x_j, т. е. $j \notin I$. Тогда Q — многочлен от $(x_i)_{i\notin I}$, коэффициенты которого суть рациональные функции от $(x_i)_{i\in I}$.

Следствие 2.14. *В условиях предложения 2.11 предположим, что* $mw_d = 2(w_1 + \dots + w_d)$ *и* $w_d = w_i n_i$, $i = 1, \dots, d$, *при некоторых* $m, n_1, \dots, n_d$ (например, $d = 2$ и $(w_1, w_2) = (1, 2)$). *Предположим,* $\deg_{x_d} \Delta = m$. *Тогда* $Q = \mathrm{const}$ *в (9).*

Доказательство. Допустимой заменой $y_d = x_d + \sum_{i=1}^{d-1} a_i x_i^{n_i}$ и $y_j = x_j$ при $j < d$, можно добиться того, что $w_j \deg_{y_j} \Delta = 2 \sum w_i$ при всех j. $\square$

Напомним, что $(g_{ij}) = g^{-1}$, значит, $g_{ij} = \hat{g}_{ij}/\det g$, где $\hat{g}_{ij}$ — многочлен.

Предложение 2.15. (См. [3, следствие 2.19].) *Пусть* $U = \mathbb{R} \times \mathbb{B}^{d-1} = \{x_2^2 + \dots + x_d^2 < 1\}$ *и* $U_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B}^{d-1} = U \cap \{x_1 > 0\}$. *Положим* $M_1 = \max_j \big(\lfloor w_j/w_1 \rfloor + \deg_{x_1} \hat{g}_{1j}\big)$. *Пусть* (Ω, g, ρ) — *решение задачи* **w**-*SDOP,* $\Delta = \det g$. *Предположим, что* $U \subset \Omega$ *(соотв.* $U_+ \subset \Omega$*). Тогда* $\deg_{x_1} \Delta < M_1$ *(соотв.* $\deg_{x_1} \Delta < 1 + M_1$*).*

3. Взвешенная задача AlgDOP в $\mathbb{C}^2$

3.1. Обозначения. В этом разделе и в двух последующих мы решаем задачу **w**-AlgDOP/$\mathbb{C}$ в размерности 2. Ясно, что при умножении **w** на положительное число задача не меняется. Поэтому будем считать, что (g, Γ), — решение задачи **w**-AlgDOP/$\mathbb{C}$ для $\mathbf{w} = (1, w)$, где $w > 1$ (случай $w = 1$ сделан в [3]).

Обозначим переменные через (x, y) и положим $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Обозначим коэффициент при y^m в $a(x, y)$ через $a_m(x)$, а коэффициент при $x^k y^m$ через a_{km} и введем аналогичные обозначения для b и c. Иногда будем писать $(a, b, c; \Gamma)$ вместо (g, Γ), имея в виду решение задачи **w**-AlgDOP.

Как обычно, для многочлена $P(x, y) = \sum p_{km} x^k y^m$ определим его многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(P)$ как выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^2$ конечного множества $\{(k, m) \mid a_{km} \neq 0\}$. Условие (A1) определения 2.2 означает, что многоугольники Ньютона для a, b, c и Δ лежат в многоугольниках, изображенных на рис. 1, 2.

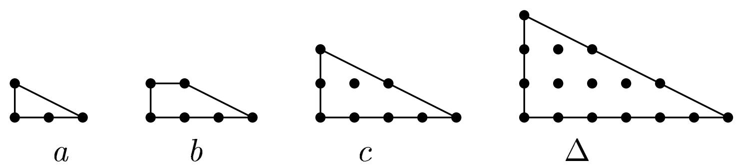


Рис. 1. Многоугольники, содержащие $\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b), \mathcal{N}(c), \mathcal{N}(\Delta)$ при $1 < w \leq 2$.

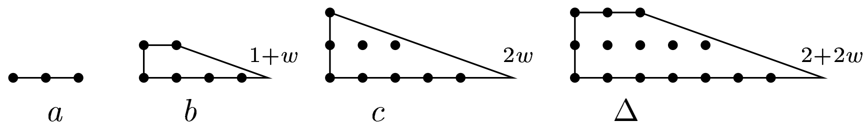


Рис. 2. Многоугольники, содержащие $\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b), \mathcal{N}(c), \mathcal{N}(\Delta)$ при $w > 2$.

3.2. Замена весов и задача $(1,\infty)$-AlgDOP. По предложению 2.3 любое решение задачи $(1,w)$-AlgDOP при $1 < w \le 2$ есть решение задачи $(1,2)$-AlgDOP (см. рис. 1). Аналогично (см. рис. 2), любое решение задачи $(1,w)$-AlgDOP при $w > 2$ есть решение задачи $(1,w')$-AlgDOP для любого $w' > w$.

Поэтому будем говорить, что (g,Γ) есть решение задачи $(1,\infty)$-AlgDOP, если это решение задачи $(1,w)$-AlgDOP при некотором $w > 2$. Замену координат (5) с произвольным многочленом $p(x)$ будем называть $(1,\infty)$-допустимой.

В следующих двух разделах мы находим все решения задачи $(1,\infty)$- и $(1,2)$-AlgDOP с точностью до $(1,\infty)$- и $(1,2)$-допустимых замен.

3.3. Локальные ветви кривой $\Gamma = 0$. Пусть $P(x,y)$ — многочлен без кратных множителей. *Локальной ветвью* многочлена P (или кривой $P = 0$) назовем пару $\gamma = (\xi,\eta)$ ростков мероморфных функций в нуле таких, что $P(\xi(t),\eta(t))$ тождественно обращается в нуль. Любой мероморфный росток $t \mapsto \gamma(t) = (\xi(t),\eta(t))$ задает *нормирование* $v_\gamma : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $v_\gamma(Q) = \operatorname{ord}_t Q(\xi(t),\eta(t))$, где $\operatorname{ord}_t(0) = \infty$ и $\operatorname{ord}_t f(t) = m$, если $f(t) = \sum_{k\ge m} p_k t^k$ и $p_m \ne 0$.

Пусть $(a,b,c;\Gamma)$ — решение задачи $\mathbf{w}$-AlgDOP/$\mathbb{C}$ для $\mathbf{w} = (1,w)$. Условие (A3) определения 2.2 имеет вид

$$a\Gamma'_x + b\Gamma'_y = L_1\Gamma, \qquad b\Gamma'_x + c\Gamma'_y = L_2\Gamma. \tag{11}$$

Легко проверить, что оно равносильно следующему условию:

$$b(\xi,\eta)\dot\xi = a(\xi,\eta)\dot\eta, \qquad c(\xi,\eta)\dot\xi = b(\xi,\eta)\dot\eta \tag{12}$$

для любой локальной ветви многочлена Γ. Из (12) следует, что

$$v_\gamma(a) - v_\gamma(b) = v_\gamma(b) - v_\gamma(c) = \operatorname{ord}_t(\dot\xi) - \operatorname{ord}_t(\dot\eta), \tag{13}$$

если и $\xi(t)$, и $\eta(t)$ непостоянны (см. [3, лемма 3.3]).

Следующее свойство хорошо известно и непосредственно вытекает из определений.

Лемма 3.1. *Пусть F – многочлен от (x,y), и пусть $(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Локальная ветвь γ многочлена F такая, что $\operatorname{ord}_t(\gamma) = (p,q)$, существует тогда и только тогда, когда вектор (p,q) ортогонален одному из ребер многоугольника $\mathcal{N}(F)$ и направлен от этого ребра внутрь $\mathcal{N}(\Gamma)$.* $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $(a, b, c; \Gamma)$ – решение задачи $(1, w)$-AlgDOP при $w > 1$. Предположим, что Γ делится на x. Тогда a и b делятся на x, и тем самым $\deg_y a \leq 1$ и $(a, b, c; \Gamma)$ является решением задачи $(1, \infty)$-AlgDOP.*

Доказательство. Из (12) следует, что $a(0, t) = b(0, t) = 0$. Поэтому x делит a и b, следовательно $\deg_y a \leq 1$ (см. рис. 1). □

Лемма 3.3. *Пусть $w > 1$. Предположим, что Γ имеет локальную ветвь $\gamma = (\xi(t), \eta(t))$ такую, что $v_\gamma(x, y) = \operatorname{ord}_t \gamma = (p, q)$ и $q < 0 < p$. Тогда $b_1 = b_{11}x$ и $a = a_{20}x^2$, и значит, $(g; \Gamma)$ является решением задачи $(1, \infty)$-AlgDOP.*

Proof. По условию $\operatorname{ord}_t \dot{\xi} - \operatorname{ord}_t \dot{\eta} = p - q$, следовательно, $v_\gamma(a) - v_\gamma(b) = v_\gamma(b) - v_\gamma(c) = p - q$ в силу (13). С другой стороны, $v_\gamma(c) \geq v_\gamma(y^2) = 2q$, значит,

$$v_\gamma(b) = v_\gamma(c) + p - q \geq p + q. \tag{14}$$

Если $b_{01} \neq 0$, то $v_\gamma(b) = v_\gamma(y) = q$, что противоречит (14), так как $p > 0$. Поэтому $b_1 = b_{11}x$ (как и требовалось), и из этого следует, что

$$v_\gamma(b) \geq \min(v_\gamma(1), v_\gamma(xy)) = \min(0, p + q),$$

а значит, $v_\gamma(a) = v_\gamma(b) + p - q \geq \min(0, p + q) + p - q = p + \min(-q, p) > p$. Поскольку в a входят только мономы $(y, 1, x, x^2)$ и их γ-нормирования равны $(q, 0, p, 2p)$, мы получаем $a = a_{20}x^2$. □

Лемма 3.4. *Пусть $1 < w \leq 2$ и пусть $\gamma = (\xi(t), \eta(t))$ — локальная ветвь кривой $\Gamma = 0$. Положим $(p, q) = \operatorname{ord}_t \gamma = v_\gamma(x, y)$.*

(a). Если $(p, q) = (2, 1)$, то $a_{00} = a_{01} = b_{00} = 0$, и тогда $\deg_y \Delta \leq 2$ и $(a, b, c; \Gamma)$ — решение задачи $(1, \infty)$-AlgDOP.

(b). Если $q > 0$, то $p \neq 3$.

(c). Если $p = -3$ и $-4 \leq q \leq -1$, то $\deg b_0 \leq 2$, $\deg c_0 \leq 2$ и $\deg c_1 \leq 1$, и тогда $(a, b, c; \Gamma)$ — решение задачи $(1, 1)$-AlgDOP.

(d). Если $q < 2p < 0$, то $a_{01} = 0$, и тогда $(a, b, c; \Gamma)$ — решение задачи $(1, \infty)$-AlgDOP.

Доказательство. (a). Если $(p, q) = (2, 1)$, то $\operatorname{ord}_t(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = (1, 0)$, значит, в силу (13) мы имеем $v_\gamma(b) = v_\gamma(c) + 1 \geq 1$ и $v_\gamma(a) = v_\gamma(b) + 1 = v_\gamma(c) + 2 \geq 2$ и результат вытекает из того, что 1 (соотв. y) — единственный моном в a и в b, у которого γ-нормирование равно 0 (соотв. 1). Из условия $a_{01} = 0$ следует, что $(a, b, c; \Gamma)$ есть решение задачи $(1, \infty)$-AlgDOP (см. рис. 2).

(b). Пусть $p = 3$ и $q > 0$. Используя рассуждения, как в п. (a), покажем, что $\deg_y a \leq 0$, и значит, $\deg_y \Delta \leq 2$, что невозможно при $\operatorname{ord}_t \xi = 3$. Заметим, что $q \leq \deg_x \Delta \leq 6$.

Если $q = 1$, доказательство в точности такое же, как в п. (a).

Если $q = 2$, то $v_\gamma(a) = v_\gamma(b) + 1$ в силу (13). Поскольку $v_\gamma(a) \neq 1$ и $v_\gamma(b) \neq 1$, это возможно лишь при $v_\gamma(a) \geq 3$. А поскольку $v_\gamma(1, y, x, x^2) = (0, 2, 3, 6)$, из этого следует, что $a_{00} = a_{01} = 0$, откуда получаем $\deg_y a \leq 0$.

Случай $q = 3$ сводится к $q > 3$ заменой переменных $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x)$.

Если $q = 4$, то $v_\gamma(a) \in \{0, 3, 4, 6\}$, $v_\gamma(b) \in \{0, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $v_\gamma(c) \in \{0, 3, 4, 6, \dots\}$. Поэтому равенства $v_\gamma(c) - v_\gamma(b) = v_\gamma(b) - v_\gamma(a) = 1$ (это (13)) возможны лишь при $v_\gamma(a) = 6$, следовательно, $\deg_y a \le 0$.

Если $q = 5$, то $v_\gamma(a) \in \{0, 3, 5, 6\}$, $v_\gamma(b) \in \{0, 3, 5, 6, 8, 9\}$, $v_\gamma(c) \in \{0, 3, 5, 6, 8, \dots\}$. Поэтому равенства $v_\gamma(c) - v_\gamma(b) = v_\gamma(b) - v_\gamma(a) = 2$ (это (13)) возможны лишь при $v_\gamma(a) = 6$, следовательно, $\deg_y a \le 0$.

Случай $q = 6$ сводится к $q > 6$ заменой переменных $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^2)$.

(c). Нам надо показать, что мономы x^3, x^4 и $x^2 y$ не входят ни в b, ни в c.

Если $p = -3$ и $-3 \le q \le -1$, то (13) влечет $v_\gamma(c) \ge v_\gamma(b) \ge v_\gamma(a) \ge v_\gamma(x^2) = -6$. С другой стороны, $v_\gamma(x^2 y) = -6 + q \ge -7$, $v_\gamma(x^3) = -9$, $v_\gamma(x^4) = -12$, причем только эти мономы могут входить в b и c, имея такие γ-нормирования.

Если $(p, q) = (-3, -4)$, то (13) влечет $v_\gamma(a) \ge v_\gamma(x^2) = -6$, $v_\gamma(b) = v_\gamma(a) - 1 \ge -7$ и $v_\gamma(c) = v_\gamma(b) - 1 \ge -8$. С другой стороны, $v_\gamma(x^2 y) = -10$, $v_\gamma(x^3) = -9$, $v_\gamma(x^4) = -12$, причем только эти мономы могут входить в b и c, имея такие γ-нормирования.

(d). Условие $q < 2p < 0$ влечет $v_\gamma(b) \ge v_\gamma(xy) = p + q$, а также $p - q > -p$. Условие (13) дает $v_\gamma(a) = v_\gamma(b) + p - q$. Следовательно,

$$v_\gamma(a) = v_\gamma(b) + p - q > v_\gamma(b) - p \ge (p + q) - p = q = v_\gamma(y).$$

Поэтому $a_{01} = 0$, так как y — единственный моном из a, имеющий γ-нормирование, равное q. Условия $a_{01} = 0$ означает, что $(a, b, c; \Gamma)$ — решение задачи $(1, \infty)$-AlgDOP (см. рис. 2). $\square$

4. Решение задачи $(1, w)$-AlgDOP в $\mathbb{C}^2$ при $w > 2$

В этом разделе мы находим все решения задачи $(1, \infty)$-AlgDOP/$\mathbb{C}$ с точностью до $(1, \infty)$-допустимых замен координат. Как отмечалось в §3.2, это дает все решения задачи $(1, w)$-AlgDOP для всех $w > 2$.

Лемма 4.1. *Пусть $(a, b, c; \Gamma)$ —решение задачи $(1, w)$-AlgDOP над $\mathbb{C}$ при $w > 1$. Предположим, что $\deg_y \Gamma = 2$ и что Γ не делится ни на какой непостоянный многочлен от x. Тогда y^2 — единственный моном в Γ, имеющий степень 2 по переменной y.*

Доказательство. Заметим, что $a \ne 0$, так как иначе $\Delta = b^2$, из чего следует, что Γ делит b, а это противоречит условию $\deg_y \Gamma = 2$. Предположим, что коэффициент при y^2 в Γ — непостоянный многочлен от x. Без потери общности можно считать, что 0 — один из его корней. Тогда Γ имеет ветвь $\gamma = (\xi(t), \eta(t))$ такую, что $\operatorname{ord}_t \eta < 0 < \operatorname{ord}_t \xi$. Поэтому по лемме 3.3 мы имеем $a = a_{20} x^2$ и $b = b_{11} xy + b_0(x)$. Поскольку $a \ne 0$, можно считать, что $a = x^2$.

Если $b_{00} = 0$, то x^2 делит ac и b^2, следовательно, x^2 делит Δ. Поскольку в Δ нет мономов вида $y^2 x^k$ при $k > 2$, мы заключаем, что Γ обладает требуемым свойством.

Рассмотрим теперь случай $b_{00} \ne 0$. Тогда постоянный член в Δ есть $-b_{00}^2 \ne 0$. Напомним, что $a = x^2$ и $b_1 = b_{11} x$. Следовательно, $x^2 y^2$ — единственный моном степени 2 по y, который может быть в Δ, значит, Δ не делится ни на один непостоянный многочлен от x, т. е. $\Gamma = \Delta$.

Коэффициенты при y^2 в Δ и в $a\Delta'_x + b\Delta'_y$ равны соответственно $d_{22}x^2$ и $2d_{22}(1+b_{11})x^3$, где $d_{22} = c_{02} - b_{11}^2$. Тогда (11) влечет $L_1 = 2(1+b_{11})x$. Подставляя это выражение обратно в (11), мы приходим к противоречию. В самом деле, мы получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= -b^2 + O(x^2) = -b_{00}^2 - 2b_{00}(b_{10} + b_{11}y)x + O(x^2),\\ b\Delta'_y &= \big(b_{00} + O(x)\big)\big(-2b_{00}b_{11}x + O(x^2)\big) = -2b_{00}^2 b_{11}x + O(x^2),\\ L_1\Delta &= -2b_{00}^2(1+b_{11})x + O(x^2).\end{aligned}$$

Следовательно, $a\Delta'_x + b\Delta'_y - L_1\Delta = 2b_{00}^2 x + O(x^2) \neq 0$. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть $\Gamma = y^2 - p(x)$ и пусть $(a, b, c; \Gamma)$ — решение задачи $(1, w)$-AlgDOP при $w > 2$. Тогда $b_0 = c_1 = 0$, т. е. a и c четны по y, а b нечетно по y (это значит, что соответствующая метрика инвариантна относительно симметрии $(x, y) \mapsto (x, -y)$).*

Доказательство. Положим $\hat a = a$, $\hat b(x,y) = -b(x,-y)$, $\hat c(x,y) = c(x,-y)$ и $\hat g = (\hat a, \hat b, \hat c)$. В силу симметрии многочлена Γ, из предложения 2.5 следует, что $(\hat g; \Gamma)$ тоже есть решение задачи $(1, w)$-AlgDOP (см. пример 2.6). Следовательно, и $(g; \Gamma)$ и $(\hat g; \Gamma)$ удовлетворяют уравнениям (11) и по линейности $\big(\frac12(g - \hat g); \Gamma\big)$ тоже им удовлетворяет. Поскольку $\frac12(g - \hat g) = (0, b_0, c_1 y)$, это означает, что $2yb_0 = (y^2 - p(x))L_1$ и $-b_0 p'(x) + 2y^2 c_1 = (y^2 - p(x))L_2$. Из первого уравнения получаем $b_0 = 0$. Подставляя это во второе уравнение, получаем $2y^2 c_1 = (y^2 - p(x))L_2$. Заметим, что $p \neq 0$, так как Γ не может иметь кратных множителей. Следовательно, из последнего уравнения вытекает $c_1 = 0$, т. е. $g - \hat g = 0$. $\square$

Предложение 4.3. *Приведенные ниже решения (i)–(v) — это полный список решений $(g; \Gamma)$ задачи $(1, \infty)$-AlgDOP/$\mathbb{C}$ с точностью до $(1,\infty)$-допустимой замены переменных при условии, что $\deg_y \Gamma = 2$:*

(i) $\Gamma = (1-x)^m(1+x)^n - y^2$, $m, n \geq 1$,

$$g = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & \frac12\big((n-m) - (n+m)x\big)y \\ * & \frac14\big((n-m) - (n+m)x\big)^2(1-x)^{m-1}(1+x)^{n-1} - c_{02}\Gamma \end{pmatrix};$$

(ii) $\Gamma = x^n - y^2$, $n \geq 1$,

$$g = \begin{pmatrix} x & \frac12 ny \\ \frac12 ny & \frac14 n^2 x^{n-1} - c_{02}\Gamma \end{pmatrix};$$

(iii) $\Gamma = \Gamma_2 x^k$, где $\Gamma_2 = (x_0 - x)^n - y^2$, $n \geq 0$; $k, x_0 \in \{0, 1\}$, $(n, c_{02}) \neq (0, 0)$,

$$g = \begin{pmatrix} x(x_0 - x) & -\frac12 nxy \\ -\frac12 nxy & \frac14 n^2 x(x_0 - x)^{n-1} - c_{02}\Gamma_2 \end{pmatrix};$$

(iv) $\Gamma = x^k(1 - y^2)$, $g = \operatorname{diag}(x^k, -c_{02}(1-y^2))$, $k \in \{0, 1\}$, $c_{02} \neq 0$;

(v) $\Gamma = (1-x^2)(1-y^2)$, $g = \operatorname{diag}(1 - x^2, -c_{02}(1-y^2))$, $c_{02} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma_0\Gamma_2$, где $\deg_y \Gamma_0 = 0$, $\deg_y \Gamma_2 = 2$ и Γ_2 не делится на непостоянный многочлен от x. Тогда в силу леммы 4.1 и предложения 2.4 Γ_2 приводится $(1,\infty)$-допустимой заменой к виду $\Gamma_2 = y^2 + p(x)$. Поскольку Γ не имеет кратных делителей, p не равен тождественно нулю. Более того, масштабируя координату y, можно сделать старший коэффициент в p равным любому наперед заданному комплексному числу. Из леммы 4.2 следует, что $a = a(x)$, $b = b_1(x)y$ и $c = c_2y^2 + c_0(x)$ (где $c_2 = c_{02} = \mathrm{const}$). При этом $a \neq 0$ (см. начало доказательства леммы 4.1). В силу (11),

$$a(\Gamma_2)'_x + b(\Gamma_2)'_y = ap' + 2b_1y^2 = (y^2+p)L_1.$$

Следовательно, $L_1 = 2b_1$, и значит,

$$ap' = 2pb_1. \tag{15}$$

Второе уравнение в (11) имеет вид

$$b(\Gamma_2)'_x + c(\Gamma_2)'_y = b_1yp' + 2y(c_2y^2 + c_0) = (y^2+p)L_2,$$

откуда $L_2 = 2c_2y$, и значит, $c_0 = c_2p - \frac{1}{2}b_1p'$, то есть $c = c_2\Gamma_2 - \frac{1}{2}b_1p'$. В силу (15) из этого следует, что

$$c = c_2\Gamma_2 - b_1^2p/a. \tag{16}$$

Если $b = 0$, то $c = c_{02}\Gamma_2$ в силу (16) и $p = \mathrm{const}$ в силу (15). Поэтому, полагая $p = -1$, мы получаем (iii)–(v), где $n = 0$ в (iii).

Пусть теперь $b \neq 0$. Уравнение (15) можно переписать в виде $(\log p)' = 2b_1/a$. Поскольку p, a и b_1 — многочлены и $\deg(a) \le 2$, имеет место один из следующих трех случаев с точностью до сдвига и растяжения по оси x.

Случай 1. $a = 1 - x^2$.

$$\frac{2b_1}{a} = \frac{p'}{p} = \frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x}, \qquad p = -(1-x)^m(1+x)^n, \qquad m,n > 0$$

(напомним, что старший коэффициент в p можно выбрать произвольно). Тогда $b_1 = \frac{1}{2}(n-m) - \frac{1}{2}(n+m)x$. Учитывая (16), мы получаем (i) коль скоро $\Gamma = -\Gamma_2$. Итак, осталось показать, что Γ совпадает с Γ_2 с точностью до постоянного множителя, иначе говоря, $\Gamma_0 = \mathrm{const}$. Действительно, если $\Gamma_0 \neq \mathrm{const}$, то по лемме 3.2 Γ_0 был бы общим делителем a и b, что невозможно в силу найденного явного вида a и b.

Случай 2. $a = x$, $p'/p = 2b_1/a = n/x$, $p = x^n$, $n \ge 0$, следовательно, $b_1 = n/2$. Поскольку a и b взаимно просты, $\Gamma = \Gamma_2$ и мы приходим к (ii) так же, как в случае 1.

Случай 3. $a = x(x_0 - x)$, $p'/p = 2b_1/a = -n/(x_0 - x)$, $p = -(x_0 - x)^n$, $n \ge 0$, следовательно, $b_1 = -nx/2$. Это дает (iii). $\square$

Предложение 4.4. *Приведенные ниже решения (i)–(vi) – это полный список решений* $(a, b, c; \Gamma)$ *задачи* $(1,\infty)$*-AlgDOP/*$\mathbb{C}$ *с точностью до* $(1,\infty)$*-допустимой замены переменных при условии, что* $\deg_y \Gamma = 1$*. Здесь* a_{10}*,* a_{20}*,* b_{11}*,* c_{02} *– константы, и* a_0*,* b_1*,* c_0*,* c_1 *– многочлены от* x*;* $\deg a_0 \le 2$*,* $\deg b_1 \le 1$*.*

(i) $(x^2,\ -nxy,\ n^2y^2 - c_0\Gamma_1; x^k\Gamma_1)$, $\Gamma_1 = x^ny - 1$, $n \ge 1$, $k = 0{,}1$, $\Delta = -x^2c_0\Gamma_1$;
(ii) $(x^2,\ b_{11}\Gamma - 1,\ y^2 - c_0\Gamma;\ \Gamma)$, $\Gamma = xy - 1$, $\Delta = (xy + 1 - x^2c_0 - b_{11}^2\Gamma + 2b_{11})\Gamma$;
(iii) $(a_0,\ b_1y,\ c_{02}y^2 + c_1y;\ y)$;
(iv) $(a_{10}x + a_{20}x^2,\ b_{11}xy,\ c_{02}y^2 + c_1y;\ xy)$;
(v) $(1 - x^2,\ 0,\ c_{02}y^2 + c_1y;\ (1 - x^2)y)$;
(vi) $(0, 1 - xy, (1 - xy)c_0; 1 - xy)$.

Мы увидим в §6, что только (iii)–(v) дают решения задачи $\mathbf{w}$-SDOP. Более того, это возможно лишь когда (a, b, c) есть $(a_{00}, 0, c_{01}y)$, $(a_{10}x, 0, c_{01}y)$ или $(1 - x^2, 0, c_{01}y)$, что отвечает прямому произведению одномерных решений.

Доказательство. Пусть Γ_1 — неприводимый множитель Γ степени 1 относительно y. Он имеет вид $\Gamma_1 = \gamma_1 y - \gamma_0$, где γ_0 и γ_1 — многочлены от x, причем $\gamma_1 \ne 0$.

Случай 1. $a \ne 0$ и $\gamma_1 \ne \mathrm{const}$. По лемме 3.3, если x_0 — корень γ_1, то x_0 также корень b_1 и кратный корень a. Поскольку a — ненулевой многочлен от x степени не выше 2, он может иметь только один двойной корень, следовательно, γ тоже имеет только один корень (возможно, кратный) в x_0. Мы можем предполагать, что $x_0 = 0$, и значит, $a = x^2$, $b_1 = b_{11}x$ и $\gamma_1 = x^n$, $n \ge 1$. Тогда γ_0/γ_1 — многочлен Лорана. Обозначим его через $p(x) = \sum_k p_k x^k$. Заменой $y = y_1 + p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots$ можно убить все коэффициенты при неотрицательных степенях x. Таким образом, $p = p_{-n}x^{-n} + \cdots + p_{-1}x^{-1}$. Из условия неприводимости Γ_1 следует, что $\gamma_0(0) \ne 0$, а значит, $p_{-n} \ne 0$, т. е. $\operatorname{ord}_x p = -n$. Линейной заменой по оси y можно добиться, что $p_{-n} = 1$. Кривая $\Gamma_1 = 0$ допускает параметризацию $x = x$, $y = p(x)$. Тогда (12) дает

$$b(x,p) = x^2p', \qquad c(x,p) = b(x,p)p', \qquad \text{и значит,} \quad c(x,p) = (xp')^2. \tag{17}$$

Поскольку $b = b_{11}xy + b_0(x)$, первое уравнение в (17) имеет вид

$$b_{11}\big(x^{-n+1} + \cdots + p_{-2}x^{-1} + p_{-1}\big) + b_0 = -nx^{-n+1} - \cdots - 2p_{-2}x^{-1} - p_{-1}. \tag{18}$$

Случай 1.1. $n \ge 2$. Поскольку b_0 — многочлен, из (18) следует, что $b_{11} = -n$, $b_0 = -p_{-1} - b_{11}p_{-1} = (n-1)p_{-1}$ (константа) и $p_{-n+1} = \cdots = p_{-2} = 0$, т. е. $p = x^{-n} + p_{-1}x^{-1}$. Тогда второе уравнение в (17) принимает вид

$$c_{02}\big(x^{-n} + p_{-1}x^{-1}\big)^2 + (x^{-n} + p_{-1})c_1 + c_0 = \big(nx^{-n} + p_{-1}x^{-1}\big)^2. \tag{19}$$

Сравнивая коэффициенты при x^{-2n}, а затем при x^{-n-1}, получаем $c_{02} = n^2$ и $p_{-1} = 0$. Следовательно, $p = x^{-n}$ и $b_0 = 0$. Подставляя $p_{-1} = 0$ в (19), получаем $n^2x^{-2n} + x^{-n}c_1 + c_0 = n^2x^{-2n}$, т. е. $c_1 = -x^nc_0$. Таким образом, $(a, b, c) = (x^2, -nxy, n^2y^2 - x^nc_0y + c_0)$, что отвечает (i) при $k = 0$, если $\Gamma = \Gamma_1$. Если же Γ имеет другой непостоянный делитель Γ_0 (многочлен от x), то из условия (11) следует, что Γ_0 — общий делитель a и b, что отвечает (i) при $k=1$.

Случай 1.2. $n=1$ (и значит, $p=x^{-1}$). Тогда (18) имеет вид $b_{11}+b_0=-1$, а второе уравнение в (17) имеет вид $c_{02}x^{-2}+x^{-1}c_1+c_0=x^{-2}$, откуда $b_0=-b_{11}-1$, $c_{02}=1$ и $c_1=-xc_0$. Следовательно, $b=b_{11}xy+b_0=b_{11}xy-b_{11}-1$ и $c=c_{02}y^2+c_1y+c_0=y^2-xyc_0+c_0$, что отвечает (ii), если $\Gamma=\Gamma_1$. Как и выше, любой дополнительный непостоянный множитель Γ_0 многочлена Γ должен быть делителем a и b. Тогда $\Gamma_0=x$ и x делит $b=b_{11}(xy-1)-1$. Поэтому $b_{11}=-1$, и значит, $b=-xy$. Это отвечает (i) при $n=k=1$.

Случай 2. $\gamma_1=\mathrm{const}$. Тогда с точностью до допустимой замены можно предполагать, что $\Gamma_1=y$. Если $\Gamma=\Gamma_1$, мы получаем (iii). Иначе, как и в предыдущих случаях, Γ/Γ_1 — многочлен от x, делящий a и b, что отвечает (iv) и (v).

Случай 3. $a=0$. Тогда Γ — делитель многочлена $\Delta=-b^2$. Поэтому допустимой заменой b приводится к виду y, xy или $xy-1$. Это дает (iii), (iv) или (vi). $\square$

5. Решения задачи $(1,w)$-AlgDOP в $\mathbb{C}^2$ при $1<w\le 2$

В этом разделе мы находим все решения задачи $(1,2)$-AlgDOP в $\mathbb{C}^2$. Они включают в себя все решения задачи $(1,w)$-AlgDOP при всех w в интервале $1<w\le 2$ (см. §3.2).

5.1. Компактификации $\mathbb{C}^2$. Пусть $(a,b,c;\Gamma)$ — решение задачи $(1,2)$-AlgDOP в $\mathbb{C}^2$, и пусть $\Delta=ac-b^2$. Тогда многоугольник Ньютона $\mathcal{N}(\Delta)$ (и значит, $\mathcal{N}(\Gamma)$) содержится в треугольнике $[(0,0),(6,0),(0,3)]$ (см. рис 1). Поэтому естественно рассматривать $\mathbb{C}^2$ в качестве аффинной карты $Z\ne 0$ (с координатами $x=X/Z$, $y=Y/Z^2$) *взвешенной проективной плоскости* $\mathbb{P}^2_{1,2,1}$, которая определяется как фактор $\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ по отношению эквивалентности $(X,Y,Z)\sim(\lambda X,\lambda^2Y,\lambda Z)$, $\lambda\ne 0$ (мы будем обозначать класс эквивалентности точки (X,Y,Z) через $[X{:}Y{:}Z]$). Это многообразие гладкое вне точки $[0{:}1{:}0]$.

Общий многочлен $P(x,y)$ с $\mathcal{N}(P)=[(0,0),(6,0),(0,3)]$ задает аффинную кривую $\{P=0\}$ в $\mathbb{C}^2$, замыкание которой в $\mathbb{P}^2_{1,2,1}$ — гладкая кривая, не проходящая через особую точку $[0{:}1{:}0]$. Ее линейная проекция из этой точки

$$\mathbb{P}^2_{1,2,1}\setminus\{[0{:}1{:}0]\}\to\mathbb{P}^1,\quad [X{:}Y{:}Z]\mapsto(X{:}Z), \tag{20}$$

является трехлистным разветвленным накрытием $\{P=0\}\to\mathbb{P}^1$. Это объяснение того, почему мы считаем $\mathbb{P}^2_{1:2:1}$ наиболее подходящей компактификацией $\mathbb{C}^2$ в данной ситуации. Однако коэффициенты Δ не обязательно общие, и замыкание кривой $\{\Gamma=0\}$ может быть особым или проходить через $[0{:}1{:}0]$. Для работы с такими кривыми удобно раздуть точку $[0{:}1{:}0]$. Это значит рассматривать $\mathbb{C}^2$ в качестве аффинной карты (x,y) на $\mathcal{F}_2$ — *поверхности Хирцебруха степени* 2, которая есть гладкая комплексная поверхность, склееная из четырех копий $\mathbb{C}^2$ с координатами (x_k,y_k), $k=0,\dots,3$ (где $x_0=x$, $y_0=y$ — координаты на исходном $\mathbb{C}^2$) и с функциями перехода

$$\begin{aligned} &x_1=1/x, &&x_2=x, &&x_3=\ x_1\ =1/x,\\ &y_1=y/x^2, &&y_2=1/y, &&y_3=1/y_1=x^2/y. \end{aligned} \tag{21}$$

Множество вещественных точек поверхности $\mathcal{F}_2$ диффеоморфно тору. На рис. 3 мы изображаем его в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами. В качестве иллюстрации к склеиванию карт мы также показываем на рис. 3, как выглядит замыкание в $\mathcal{F}_2$ неких двух кривых.

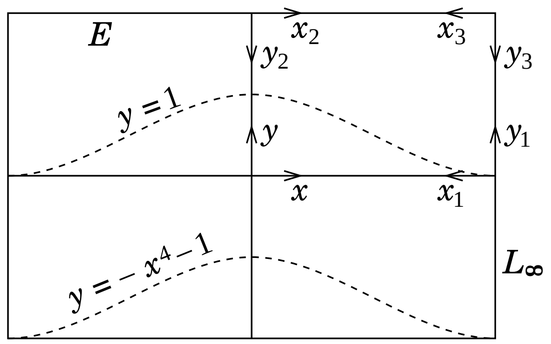


Рис. 3. Оси координат всех четырех карт на $\mathcal{F}_2$ и кривые $\{y=1\}=\{y_1=x_1^2\}$ и $\{y=-x^4-1\}=\{y_3=-x_3^2/(1+x_3^4)\}$.

Проекция (20) продолжается до проекции $\pi:\mathcal{F}_2\to\mathbb{P}^1$, задаваемой в аффинных картах как $(x_k,y_k)\mapsto(x_k:1)$ при $k=0,2$ и $(x_k,y_k)\mapsto(1:x_k)$ при $k=1,3$. Это расслоение со слоем $\mathbb{P}^1$. Его ограничение на замыкание кривой $\{P(x,y)=0\}$ есть разветвленное накрытие степени $\deg_y P$. Прообраз особой точки $[0:1:0]$ при раздутии (мы обозначаем его через E) задается уравнениями $y_2=0$ или $y_3=0$ в соответствующих картах. Его индекс самопересечения равен -2.

Множество $(1,2)$-допустимых замен переменных совпадает с множеством бирегулярных автоморфизмов $\mathcal{F}_2$, сохраняющих $\mathbb{C}^2$.

5.2. Случай, когда Δ неприводим и $\deg_y\Delta=3$. Пусть $(a,b,c;\Gamma)$ — решение задачи $(1,2)$-AlgDOP такое, что $\Gamma=\Delta=ac-b^2$, многочлен Γ неприводим и $\deg_y\Gamma=3$. Мы предполагаем, что $(a,b,c;\Gamma)$ не сводится к решению задачи $(1,1)$-AlgDOP $(1,2)$-допустимой заменой координат. Пусть C — замыкание кривой $\{\Gamma=0\}$ в $\mathcal{F}_2$. Мы отождествляем $\mathbb{C}_2$ (в котором лежит кривая $\Gamma=0$) с аффинной картой, отвечающей системе координат (x,y). Будем называть ее *основной картой*. Обозначим слой $\{x_1=0\}$ через L_∞ (см. рис. 3). Из условия $\deg_y\Gamma=3$ следует, что C не пересекается с E и $\pi|_C$ — трехлистное разветвленное накрытие. Пусть $\nu:\tilde C\to C$ — нормализация (неособая модель) кривой C. Это значит, что $\tilde C$ — гладкая компактная риманова поверхность рода $\mathbf{g}$ и ν — голоморфное отображение, инъективное вне конечного множества точек. Точки кривой $\tilde C$ находятся во взаимно однозначном соответствии с локальными ветвями кривой C.

Формула рода для C имеет вид

$$\mathbf{g}=1+\tfrac12 C(C+K_{\mathcal{F}_2})-\sum_{P\in C}\delta_P=4-\sum_{P\in C}\delta_P; \tag{22}$$

здесь $\delta_P=\delta_P(C)$ – дельта-инвариант пары (C,P), т. е. $2\delta_P=\sum m_i(m_i-1)$, где $m_1,m_2,\ldots$ — кратности всех бесконечно близких точек кривой C в точке P (заметим, что “4” в (22) можно вычислить как число целых точек внутри треугольника

$[(0,0),(6,0),(0,3)])$. Удобно переписать формулу рода (22) в терминах локальных ветвей кривой C, как это сделано в [3, §3.2]. А именно, для $P\in C$ с локальными ветвями $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ положим $n_P=\sum_{1\le i<j\le r}\gamma_1\cdot\gamma_j$. Тогда $\delta_P=n_P+\sum\delta(\gamma_i)$, следовательно, (22) принимает вид

$$\mathbf{g}=4-n-\sum_\gamma\delta(\gamma),\qquad n=\sum_{P\in C}n_P, \tag{23}$$

где первая сумма берется по всем локальным ветвям кривой C.

Для локальной ветви $t\mapsto\gamma(t)=(\xi(t),\eta(t))$ обозначим индекс ветвления ее проекции $\pi\circ\gamma$ через $m_\pi(\gamma)$. Число $m_\pi(\gamma)$ можно также определить как индекс пересечения ветви γ со слоем проекции π, проходящим через центр γ. Если $\operatorname{ord}\xi\ge0$, то $m_\pi(\gamma)=\operatorname{ord}_t(\xi(t)-\xi(0))$. Если $\operatorname{ord}\xi<0$, то $m_\pi(\gamma)=-\operatorname{ord}_t\xi$. По формуле Римана–Гурвица

$$2-2\mathbf{g}=6-\sum_\gamma(m_\pi(\gamma)-1). \tag{24}$$

Лемма 5.1.
(a). Пусть γ — локальная ветвь кривой C в точке P. Тогда $m_\pi(\gamma)\le3$, а также:

- *если $m_\pi(\gamma)=3$, то $P\in L_\infty$ и γ — гладкая ветвь (обозначим число таких ветвей через β_3);*
- *если $m_\pi(\gamma)=2$ и ветвь γ гладкая, то $P\in L_\infty$ (обозначим число таких ветвей через β_2; ясно, что $\beta_2+\beta_3\le1$);*
- *если ветвь γ особа, то это особенность типа A_{2k} и при этом $m_\pi(\gamma)=2$ (обозначим число таких ветвей через α_{2k});*

(b). Кривая C рациональна (т. е. $\mathbf{g}=0$) и имеет место один из следующих случаев (среди чисел n, α_k, β_k мы указываем только ненулевые):

(i) $\alpha_2=\alpha_4=\beta_3=n=1$;
(ii) $\alpha_2=4$;
(iii) $\alpha_2=3$ и $\beta_2=n=1$;
(iv) $\alpha_2=n=2$ и $\beta_3=1$.
(v) $\alpha_4=2$ и $\beta_3=1$;
(vi) $\alpha_2=\alpha_6=\beta_3=1$;
(vii) $\alpha_2=2$ и $\alpha_4=\beta_2=1$.

Доказательство. (a). Следует из леммы 3.4. Единственное, что, возможно, требует пояснения, это гладкость ветви γ в случае, когда $m_\pi(\gamma)=3$, и значит, $P\in L_\infty$. С точностью до допустимой замены можно предполагать, что P имеет координаты $(x_1,y_1)=(0,0)$ (см. рис. 3). Тогда $v_\gamma(y_1)>0$ и условие $m_\pi(\gamma)=3$ означает, что $v_\gamma(x_1)=3$, т. е. $v_\gamma(x)=-3$. Следовательно, $v_\gamma(y)\notin[-4,-1]$ по лемме 3.4(c). Из (21) следует, что $v_\gamma(y_1)=v_\gamma(y)-2v_\gamma(x)=v_\gamma(y)+6$, поэтому $v_\gamma(y_1)\notin[2,5]$. Легко видеть, что $v_\gamma(y_1)<6$. Следовательно, $v_\gamma(y_1)=1$, что дает требуемый результат.

(b). Из неравенства $\beta_2+\beta_3\le1$ и из уравнений (23) и (24) следует, что

$$4=\mathbf{g}+n+\sum_{k\ge1}k\alpha_{2k},\qquad 2\mathbf{g}+4=\beta_2+2\beta_3+\sum_{k\ge1}\alpha_{2k}.$$

Все неотрицательные решения — это (i)–(vii). $\square$

Если кривая в $\mathbb{P}^2$ имеет параметризацию $t \mapsto \big(\xi(t) : \eta(t) : \zeta(t)\big)$, то проективно двойственная кривая имеет параметризацию

$$t \mapsto (\dot\eta\zeta - \dot\zeta\eta : \dot\zeta\xi - \dot\xi\zeta : \dot\xi\eta - \dot\eta\xi). \tag{25}$$

Лемма 5.2. *Случаи (v)–(vii) леммы 5.1 нереализуемы. В остальных случаях кривая C имеет следующую параметризацию $t \mapsto [X : Y : Z]$ во взвешенных однородных координатах, введенных в §5.1:*

(i) $[\,32\,(t+1) : 256\,(5t+3)(t+3) : (t+3)^3\,]$, *таким образом,*

$$\Gamma = y^3 - 20xy^2 + 16y^2 + 45x^3y - 40x^2y - 27x^5 + 25x^4; \tag{26}$$

(ii) $[\,t^2(t+1) : t^2(2t+1) : 3t+1+\alpha t^2(t+1)\,]$, *где* $\alpha^3 - 9\alpha^2 + 27\alpha \neq 0$;

(iii) $[\,(t-1)^2(t-\alpha) : (t-1)^3(2t^3+t^2-\alpha t^2+t-\alpha t-2\alpha) : (t+\alpha)^2(\alpha t+2t-2\alpha-1)\,]$, *где* $\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^2+4\alpha+1) \neq 0$.

(iv) $[\,(t-2)^2(t+1) : (t-2)^3(3t^2+3\alpha t+2\alpha) : 1\,]$, *где* $\alpha \notin \{-3/2, 7/2\}$.

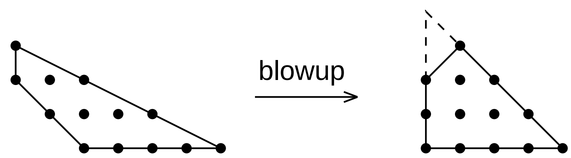


Рис. 4

Доказательство. В каждом из случаев (i)–(vii) мы можем считать, что C особа в начале координат основной карты. Раздуем эту точку и стянем собственный прообраз прямых $x = 0$ и E. В координатах это означает, что мы рассматриваем кривую C_1 на $\mathbb{P}^2$, являющуюся проективным замыканием аффинной кривой $\Gamma(x, xy)/x^2 = 0$. Мы будем рассматривать однородные координаты $(X_1 : Y_1 : Z_1)$ на $\mathbb{P}^2$ такие, что $x = X_1/Z_1$, $y = Y_1/Z_1$.

Тогда C_1 — кривая четвертой степени, касающаяся прямой $X_1 = 0$ в точке (0:1:0) (см. рис. 4). Если C имеет особенность A_{2k} в начале координат, то C_1 имеет особенность A_{2k-2} где-то на прямой $X_1 = 0$ (при $k > 1$) или простое касание с этой прямой (при $k = 1$). Прямая $Z_1 = 0$ есть собственный прообраз прямой L_∞, поэтому C_1 имеет с ней касание того же порядка, что и C с прямой L_∞. С точностью до $(1,2)$-допустимой замены кривая C однозначно задается конфигурацией $C_1 \cup \{X_1Z_1 = 0\}$. Взвешенные однородные координаты из §5.1 выражаются через $(X_1 : Y_1 : Z_1)$ следующим образом:

$$[X : Y : Z] = [X_1 : X_1Y_1 : Z_1]. \tag{27}$$

Рассмотрим по отдельности каждый случай из леммы 5.1.

Случай (i). Будем предполагать, что нод A_1 расположен в начале координат. Тогда C_1 имеет особенности A_2 и A_4. Неприводиная квартика с такими особенностями единственна с точностью до автоморфизма $\mathbb{CP}^2$, и она самодвойственна (см., например, [3, следствие 3.10(iii)]). Такая кривая имеет ровно одну точку перегиба P (так как двойственная кривая имеет ровно один касп A_2), и прямая $Z_1 = 0$ касается в P кривой C_1. Пусть Q — другая точка пересечения кривой C_1 с прямой $\{Z_1 = 0\}$ (см. рис. 5). Тогда $Q = (0{:}1{:}0)$ и прямая $\{X_1 = 0\}$ касается кривой C_1 в Q. Это значит, что $C_1 \cup \{X_1 Z_1 = 0\}$ задана однозначно с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^2$, из чего следует единственность кривой C. Таким образом, достаточно проверить, что кривая, указанная в формулировке леммы обладает требуемыми свойствами. Действительно, она имеет касп в $[\frac{32}{27} : \frac{256}{81} : 1]$ $(t = 0)$, особенность A_4 в $[0{:}0{:}1]$ $(t = \infty)$, нод в $[1{:}1{:}1]$ $(t = -5 \pm 2\sqrt{5})$ и перегиб с касательной L_∞ в $[1{:}0{:}0]$ $(t = -3)$.

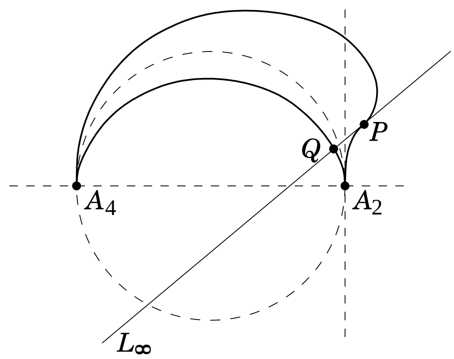


Рис. 5. Квартика с особенностями A_2 и A_4.

Случай (ii). В этом случае кривая C_1 имеет три каспа A_2. Прямая $X_1 = 0$ — ее бикасательная. Хорошо известно, что такая кривая (трехкаспидальная квартика) единственна с точностью до автоморфизма $\mathbb{CP}^2$, у нее ровно одна бикасательная, причем точки касания P и Q автоморфизмом пары $(\mathbb{P}^2, C_1)$ переводятся друг в друга. Таким образом, C однозначно задается выбором прямой $Z_1 = 0$, проходящей через P, в частности, она зависит от одного параметра.

Кривая C_1 проективно двойственна нодальной кубике, и значит, имеет две вещественные формы. Мы выберем ту из них, в которой бикасательная вещественна (и тогда каспы комплексно сопряжены). В некоторых однородных координатах $(X_2 : Y_2 : Z_2)$ такая кривая имеет параметризацию

$$X_2 = t^2(t+1)^2, \qquad Y_2 = 2t + 1, \qquad Z_2 = (t+1)(3t+1),$$

при которой $X_2 = 0$ — бикасательная, а каспы соответствуют $t = (-3 \pm i\sqrt{3})/6$ и $t = \infty$. Согласно изложенному выше, можно положить $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и $Z_1 = Z_2 + \alpha X_2$. Подставляя это в (27), получаем требуемый результат. Корни многочлена $\alpha^3 - 9\alpha^2 + 27\alpha$ исключаются, так как они отвечают случаям, когда L_∞ проходит через касп, что противоречит нашим предположениям (см. лемму 5.1(a)).

Случай (iii). В этом случае кривая C_1 имеет два каспа A_2 и один нод A_1. Будем предполагать, что один из каспов расположен в начале координат. Тогда прямая

$X_1 = 0$ — бикасательная. Пусть кривая $C_2 = \check{C}_1$ — проективно двойственна к C_1. Используя формулы Плюккера (в форме [3, §3.2] или [4]), можно проверить, что класс кривых с двумя каспами, одним нодом и не менее одной бикасательной инвариантен относительно проективной двойственности. Следовательно, C_2 имеет два каспа и один нод. Поэтому в некоторых однородных координатах $(X_3 : Y_3 : Z_3)$ она имеет параметризацию

$$X_3 = t^2, \qquad Y_3 = (t-1)(t-\alpha), \qquad Z_3 = t^2(t-1)(t-\alpha). \tag{28}$$

При этом каспы соответствуют $t = 0$ и $t = \infty$. Нод соответствует $t = 1$ и $t = \alpha$. Будучи двойственной к C_2, кривая C_1 в некоторых координатах имеет параметризацию

$$t \mapsto \varphi(t) = (X_2 : Y_2 : Z_2) = \big(2(t-1)^2(t-\alpha)^2 : \alpha + 1 - 2t : (\alpha+1)t - 2\alpha\big)$$

(см. (25)). Точки, в которых C_2 касается бикасательной, отвечают локальным ветвям кривой C_3 в ноде, и это $\varphi(1)$ и $\varphi(\alpha)$, тем самым $X_1 = X_2$. В координатах $(X_1{:}Y_1{:}Z_1)$ точки касания лежат в (0:0:1) и (0:1:0). С точностью до умножения координаты t на константу, можно считать, что $\varphi(1) = (0{:}1{:}0)$. Тогда прямая $Z_1 = 0$ однозначно задается условием, что она проходит через (0:1:0) и касается кривой C_1, что дает

$$Z_1 = \tfrac{\alpha}{2} X_2 + (\alpha+1) Y_2 + \alpha^2(\alpha+1) Z_2.$$

Прямая $Y_1 = 0$ должна проходить через (0:0:1). Поэтому можно положить $Y_1 = Y_2 + Z_2$ и, используя (27), мы получаем требуемую параметризацию кривой C.

Условие $\alpha \notin \{0, 1\}$ ясно из построения. Если $\alpha = -1$, то C_2 вырождается в удвоенную конику, так как тогда X_3, Y_3 и Z_3 будут функциями t^2 (см. (28)). Если α является корнем многочлена $\alpha^2 + 4\alpha + 1$, то один из каспов лежит на L_∞, что противоречит лемме 5.1.

Случай (iv). Условие $n = 2$ достигается в следующих трех случаях.

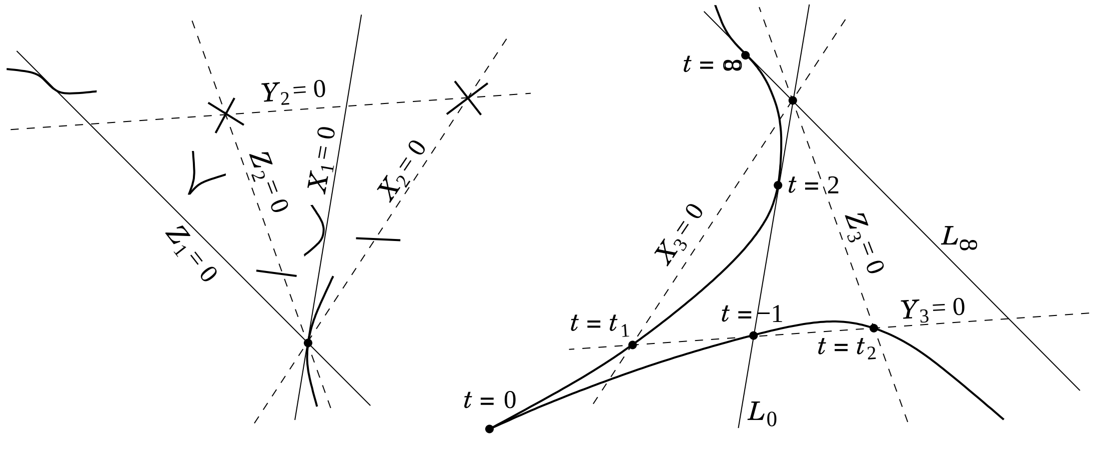


Рис. 6. Случай (iv$_1$) леммы 5.2.

Случай (iv$_1$): $2A_2+2A_1$. Кривая C имеет два каспа и два нода. Мы предполагаем, что один из каспов расположен в начале координат. Тогда C_1 имеет один касп и два нода. Прямая $X_1 = 0$ — бикасательная, и прямая $Z_1 = 0$ — касательная в точке перегиба. Выберем ось $Y_1 = 0$ так, чтобы она проходила через обе точки касания. Затем выберем координаты $(X_2 : Y_2 : Z_2)$, как показано в левой части рисунка 6, и применим преобразование Кремоны $(X_2 : Y_2 : Z_2) \mapsto (X_3 : Y_3 : Z_3) = (Y_2Z_2 : Z_2X_2 : X_2Y_2)$. Тогда прямые $X_1 = 0$ и $Z_1 = 0$ перейдут в прямые, которые мы обозначим через L_0 и L_∞. Образ C_1 — каспидальная кубика C_3, изображенная справа на рис. 6 (два комплексно сопряженных пересечения с прямой $Z_3 = 0$ там не показаны). Прямые $X_2 = 0$ и $Z_2 = 0$ не могут касаться локальных ветвей кривой C_1 в ноде, так как иначе C_3 будет иметь слишком много касательных в пучке прямых через $(0 : 1 : 0)$ (см. рис. 7).

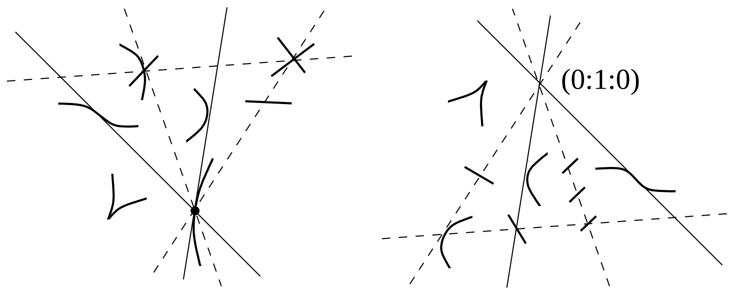


Рис. 7. Нереализуемое касание в A_1 в случае (iv$_1$).

Пусть $(X_4 : Y_4 : Z_4)$ — координаты, в которых C_3 имеет параметризацию $t \mapsto \varphi(t) = (t^2 : t^3 : 1)$. С точностью до диагональной замены кооррдинат можно считать, что C_3 касается L_0 в $\varphi(2) = (4 : 8 : 1)$. Тогда $C_3 \cap L_0 = \varphi(-1) = (1 : -1 : 1)$ (см. рис. 6) и вся конфигурация однозначно задается выбором прямой $Y_3 = 0$, проходящей через $\varphi(-1)$, т. е. она зависит от единственного параметра α такого, что $Y_3 = (Y_4 + Z_4) - \alpha(X_4 - Z_4)$. Пусть $\varphi(t_1)$ и $\varphi(t_2)$ — две другие точки из $C_3 \cap \{X_3 = 0\}$. Тогда t_1 и t_2 — корни уравнения $(t^3 + 1) = \alpha(t^2 - 1)$, отличные от -1, т. е. корни уравнения $t^2 - (\alpha + 1)(t - 1) = 0$. Следовательно, $t_2 = t_1/(t_1 - 1)$ и $\alpha = (t_1^3 + 1)/(t_1^2 - 1)$. Параметризация C_3 имеет вид

$$(X_3{:}Y_3{:}Z_3) = \bigl(t^3 - t_1^3 - 3(t^2 - t_1^2) : (t+1)(t-t_1)(t-t_2) : t^3 - t_2^3 - 3(t^2 - t_2^2)\bigr),$$

и в результате рутинных вычислений мы получаем требуемую параметризацию для C. При $\alpha \in \{-3/2, 7/2\}$ эта параметризация дает кривую, отвечающую случаю (i).

Случай (iv$_2$): $A_2 + D_5$. Кривая C имеет один касп и одну особонность типа D_5 (с уравнением $u(u^2 + v^3) = 0$ в некоторых локальных криволинейных координатах). Мы предполагаем, что особенность D_5 расположена в начале координат. Мы можем также предполагать, что прямая $Y = 0$ касается каспидальной локальной ветви и проходит через точку касания кривой C с прямой $Z = 0$. Тогда $\mathcal{N}(\Gamma) = [(4,0),(5,0),(0,3),(1,2)]$. Следовательно, при раздутии начала координат мы получим кривую в $\mathbb{P}^2$ с многоугольником Ньютона $[(1,0),(2,0),(0,3),(0,2)]$ (ср. с рис. 4). Это каспидальная кубика, имеющая простое (т. е. квадратичное) касание с прямой $X_1 = 0$ и кубическое касание с прямой $Z_1 = 0$. Легко проверить, что эти условия однозначно определяют $C \cup \{X_1 Z_1 = 0\}$ с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^2$. Следовательно, кривая C единственна с точностью до допустимой замены координат. Остается заметить, что параметризация, указанная в формулировке леммы, дает при $\alpha = -1$ требуемую кривую. Она имеет касп в $[0:0:1]$ и особенность D_5 в $[4:16:1]$.

Случай (iv$_3$): $2A_2 + A_3$. Кривая C имеет два каспа A_2 и один таснод A_3 (простое касание двух гладких ветвей). Мы предполагаем, что один из каспов расположен в начале координат. Тогда C_1 имеет один касп A_2, один таснод A_3 и по крайней мере одну бикасательную (прямая $X_1 = 0$). Покажем, что такая комбинация невозможна для квартики в $\mathbb{P}^2$. В данном случае удобно воспользоваться уравнениями Плюккера в форме, приведенной в [4, теорема 1.3]. В обозначениях из [4] мы имеем $d = 4$, $g = 0$, $n_v = 2$, $c_v = 1$, и значит, $\hat{d} = 5$ в силу [4, уравн. (1.6)]. Тогда уравнения [4, (1.8)–(1.9)] принимают вид $\hat{n} + \hat{c} = 6$ и $2\hat{n} + 3\hat{c} = 16$, откуда следует, что $\hat{n} = 2$.

Легко проверить, что ветви, двойственные к ветвям в такноде, образуют такнод двойственной кривой и что он дает вклад 2 в величину $\hat{n}$. Следовательно, у двойственной кривой нет нодов, т. е. у кривой C_1 нет бикасательных. Противоречие.

Случай (v). В этом случае C_1 имеет особенности A_2 (на прямой $X_1 = 0$) и A_4. Неприводимая квартика с такими особенностями единственна с точностью до автоморфизма $\mathbb{CP}^2$, причем она самодвойственна (ср. со случаем (i)). Следовательно, у нее ровно одна точка перегиба, так как у двойственной кривой ровно один касп A_2. В силу единственности можно предполагать, что C_1 есть малое вещественное возмущение двойной вещественной коники, как это объяснено в замечании в доказательстве следствия 3.10 в [3] (см. рис. 5). Прямая $Z_1 = 0$ является касательной в точке перегиба P. Прямая $X_1 = 0$ — касательная в точке Q, в которой C_1 трансверсально пересекает прямую $Z_1 = 0$, причем она (прямая $X_1 = 0$) должна проходить через касп A_2. Мы видим на рис. 5, что это невозможно, так как дуга $A_2 Q A_4$ выпукла.

Случай (vi). Мы предполагаем, что особенность кривой C в начале координат — это A_6. Тогда C_1 имеет особенности A_2 и A_4 и доказательство то же, что и в случае (v) но точки A_2 и A_4 меняются ролями.

Случай (vii). Мы предполагаем, что особенность кривой C в начале координат — это A_2. Тогда $X_1 = 0$ — бикасательная и C_1 имеет особенности A_2 и A_4. Как обсуждалось в сучае (v), такая кривая самодвойственна, следовательно, она не может иметь бикасательной, так как у двойственной кривой нет нодов. Противоречие. $\square$

Предложение 5.3. *Пусть* $(g;\Gamma)$ *— решение задачи* $(1,2)$-*AlgDOP*/$\mathbb{R}$ *такое, что многочлен* Γ *неприводим и* $\deg_y \Gamma = 3$. *Тогда, с точностью до* $(1,2)$-*допустимой замены переменных, либо* $(g;\Gamma)$ *есть решение задачи* $(1,1)$-*AlgDOP, либо* Γ *задается формулой (26) и*

$$g = \begin{pmatrix} y + 8x - 9x^2 & 5(4y - 3xy - x^2) \\ 5(4y - 3xy - x^2) & -25(y^2 - 4xy + 3x^3) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Доказательство. Если дана параметризация $(X(t), Y(t), Z(t))$ во взвешенных однородных координатах из §5.1, то соотношение (12), примененное к $\xi(t) = X(t)/Z(t)$,

$\eta(t) = Y(t)/Z(t)^2$, дает систему линейных однородных уравнений на коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} элементов матрицы g. В каждом из случаев (i)–(iv) леммы 5.2 мы решаем такую систему. В случае (i) единственное с точностью до постоянного множителя решение — это (29).

В случаях (ii)–(iv) система уравнений полиномиально зависит от параметра α. У нее есть ненулевое решение тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель (н.о.д.) определителей максимальных миноров обращается в нуль. Непосредственные вычисления показывают, что н.о.д. есть многочлен от α, все корни которого исключены в лемме 5.2. Например, в случае (ii) н.о.д. есть некоторая степень α, умноженная на некоторую степень многочлена $\alpha^2 - 9\alpha + 27$. $\square$

Замечание 5.4. Решение задачи $(1,2)$-DOP, приведенное в [1, §8] преобразуется (с точностью до постоянного множителя) в наше решение из предложения 5.3 заменой переменных

$$\theta_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{5}(x-1), \qquad \theta_2 = -\frac{\sqrt{5}}{125}(4y - 5x + 1).$$

5.3. Случай, когда Γ имеет множитель степени 2 по переменной y.

Предложение 5.5. *Пусть $(g;\Gamma)$ — решение задачи $(1,2)$-AlgDOP и $\deg_y \Gamma = 2$. Предположим, что оно не является решением задачи $(1,\infty)$-AlgDOP. Тогда $(1,2)$-допустимой заменой переменных $(g;\Gamma)$ приводится либо к решению задачи $(1,1)$-AlgDOP, либо к одному из следующих трех случаев:*

(i) $\Gamma = y^2 - x^3$ *и*

$$g = \begin{pmatrix} 4y & 6x^2 \\ 6x^2 & 9xy + \alpha\Gamma \end{pmatrix} + (\beta x + \mu)\begin{pmatrix} 4x & 6y \\ 6y & 9x^2 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Масштабируя координаты, можно заменить (α,β,μ) на $(\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda^{-1}\mu)$ для любого $\lambda \neq 0$.

(ii) $\Gamma = y(y-x^2)$, $g = g_{(\alpha,\beta,\mu)}$ *при* $(\alpha, \beta-\beta^2, \mu) \neq (0,0,0)$, $\mu \in \{0,1\}$, *где*

$$g_{(\alpha,\beta,\mu)} = (y - x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} + (\beta x + \mu)\begin{pmatrix} x & 2y \\ 2y & 4xy \end{pmatrix}.$$

(iii) $\Gamma = y(y - x^2 + 1)$ *и* $g = g_{(\alpha,\beta)}$ *при* $(\alpha, \beta - \beta^2) \neq (0,0)$, *где*

$$g_{(\alpha,\beta)} = (y - x^2 + 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x^2 - 1 & 2xy \\ 2xy & 4x^2 y \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Доказательство. Из лемм 3.2 и 3.3 следует, что в Γ нет мономов вида $x^k y^2$ при $k > 0$. Локальные ветви Γ соответствуют ребрам $\mathcal{N}(\Gamma)$ (см. лемму 3.1). Поэтому из леммы 3.4(d) следует, что наклон каждого верхнего ребра круче, чем 1:2, а значит, $\mathcal{N}(\Gamma)$ содержится в треугольнике $[(0,0),(4,0),(0,2)]$. Этот факт в сочетании с леммой 3.3 (из которой следует, что аффинная кривая $\Gamma = 0$ не имеет вертикальных касательных) оставляет только пять возможностей для Γ с точностью до допустимой замены координат: три случая (i)–(iii), а также $y(y-x)$ и y^2-1.

В каждом случае условие (12) дает систему линейных однородных уравнений на коэффициенты многочленов a, b, c (элементы матрицы g). Решая эти системы, мы получаем требуемый результат. В двух последних случаях мы получаем $a_1 = 0$, что означает, что это решения задачи $(1,\infty)$-AlgDOP (см. рис. 2). В остальных случаях мы нормализуем решения так, что $a_1 = 1$. Параметр μ в случае (ii) можно сделать равным 0 или 1 диагональной заменой координат (см. пример 2.7). Условия $(\alpha, \beta-\beta^2, \mu) \neq (0,0,0)$ (в случае (ii)) и $(\alpha, \beta-\beta^2) \neq (0,0)$ (в случае (iii)) эквивалентны тому, что $\det g \neq 0$. $\square$

Лемма 5.6. *Пусть $(g;\Gamma)$ — решение задачи $(1,2)$-AlgDOP, не сводящееся к решению задачи $(1,1)$-AlgDOP. Пусть $\Gamma = y(y-p_1(x))(y-p_2(x))$. Тогда многочленl p_1p_2 имеет не более двух корней (возможно, кратных).*

Доказательство. Из предложения 5.5, примененного к $(g, y(y-p_k))$, следует, что a_0 обращается в нуль в корнях многочлена p_k (напомним, что $g^{11} = a_{01}y + a_0(x)$). Остается доказать, что a_0 не может тождественно обращаться в нуль. В самом деле, если это так, то y делил бы каждый элемент матрицы g, следовательно, он делил бы $\det g$, что невозможно, так как в нашем случае $\det g = \Gamma$ (см. рис. 1) и Γ не имеет кратных множителей.

Предложение 5.7. *Пусть $(g;\Gamma)$ — решение задачи $(1,2)$-AlgDOP/$\mathbb{C}$ такое, что многочлен Γ приводим и $\deg_y \Gamma = 3$. Тогда, с точностью до $(1,2)$-допустимой замены координат, либо $(g;\Gamma)$ является решением задачи $(1,1)$-AlgDOP, либо g имеет вид (30) при $(\alpha,\beta,\mu) = (-18,-3/2,1/2)$, а значит, $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$, где $\Gamma_2 = y^2 - x^3$ и $\Gamma_1 = 8y - 3x^2 - 6x + 1$.*

В последнем случае кривая $\Gamma = 0$ имеет особенности типа A_1, A_2, A_5 в точках $(\frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$, $(0,0)$, $(1,1)$ соответственно.

Доказательство. По условию $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$, где $\deg_y \Gamma_k = k$. В силу предложения 2.4, (g,Γ_2) тоже является решением задачи $(1,2)$-AlgDOP. Более того, (g,Γ) сводится к решению задачи $(1,w)$-AlgDOP $(1,2)$-заменой тогда и только тогда, когда это верно для (g,Γ_2). Следовательно, мы можем считать, что (g,Γ_2) такое, как в предложении 5.5.

Случай 1. Γ_2 неприводим. Тогда (g,Γ_2) такое, как в предложении 5.5(i). Вычисление показывает, что $\det g = \Gamma_1\Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \alpha y - f(x)$, и значит, $\alpha \neq 0$. Тогда для параметризации $\xi = t$, $\eta = f(t)/\alpha$ кривой $\{\Gamma_1 = 0\}$ уравнения (12) имеют вид

$$a(\xi,\eta)\dot\eta - b(\xi,\eta)\dot\xi = 6FG/\alpha^2 = 0, \qquad b(\xi,\eta)\dot\eta - c(\xi,\eta)\dot\xi = FGH/\alpha^2 = 0,$$

где $F = At - 3B$, $A = (\alpha - 12\beta)(\alpha - 9\beta)$, $B = 18 + 5\alpha\mu - 36\beta\mu$, $G = (\beta t + \mu)^2 - t$ и $H = (9\beta - \alpha)t + 9\mu$. Поскольку G не может тождественно обращаться в нуль, мы заключаем, что $A = B = 0$.

Если $\alpha = 9\beta$, то $B = -27(2+\beta\mu)$ и это решение задачи $(1,1)$-AlgDOP, обсуждаемое в [3, §4.10].

Если $\alpha = 12\beta$, то $B = -18(3 + 4\beta\mu)$ и это требуемое решение.

Случай 2. Γ_2 приводим. Тогда $\{\Gamma = 0\} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, где $L_k = \{y = p_k(x)\}$, $k = 1, 2, 3$. Пусть $P_1 = L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$, $P_2 = L_2 \cap (L_3 \cup L_1)$, $P_3 = L_3 \cap (L_1 \cup L_2)$. Тогда из леммы 5.6 следует, что в каждом из множеств P_k не более двух точек. По предложению 5.5, если $k \neq m$, то L_k и L_m либо касаются, либо пересекаются в двух точках. Следовательно, сточностью до $(1, 2)$-допустимой замены, $\Gamma = y(y - p(x))(y - \lambda p(x))$, где $\lambda \notin \{0, 1\}$ и $p(x)$ есть x^2 или $x^2 - 1$. Тем самым g такое, как в предложении 5.5 (ii) или (iii). Легко проверить, что условие (12) не выполнено для параметризации $\xi(t) = t$, $\eta(t) = \lambda p(t)$ кривой $y = \lambda p(x)$. $\square$

6. Решение взвешенной задачи DOP/SDOP в $\mathbb{R}^2$

6.1. Компактные решения. Ниже мы приводим плотность меры ρ без нормализующего множителя, который всюду предполагается равным $1/\int_\Omega \rho\, dx$.

Теорема 6.1. *Пусть (Ω, g, ρ) — решение задачи $(1, 2)$-DOP в $\mathbb{R}^2$, не являющееся решением задачи $(1, \infty)$-DOP, такое, что область Ω ограничена. Тогда, с точностью до $(1, 2)$-допустимой замены переменных, либо это решение задачи $(1, 1)$-DOP, либо имеет место один из следующих случаев (см. рис. 8):*

(B1) *(додекаэдральный фактор) g имеет вид (29), $\Gamma = -\frac{1}{25}\det g$ имеет вид (26), Ω — ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma = 0\}$ и $\rho = \Gamma^{p-1}$ при $p > \frac{3}{10}$;*

(B2) *(каспидальная кубика с кубически касающейся параболой) g как в предл. 5.7, т. е.*

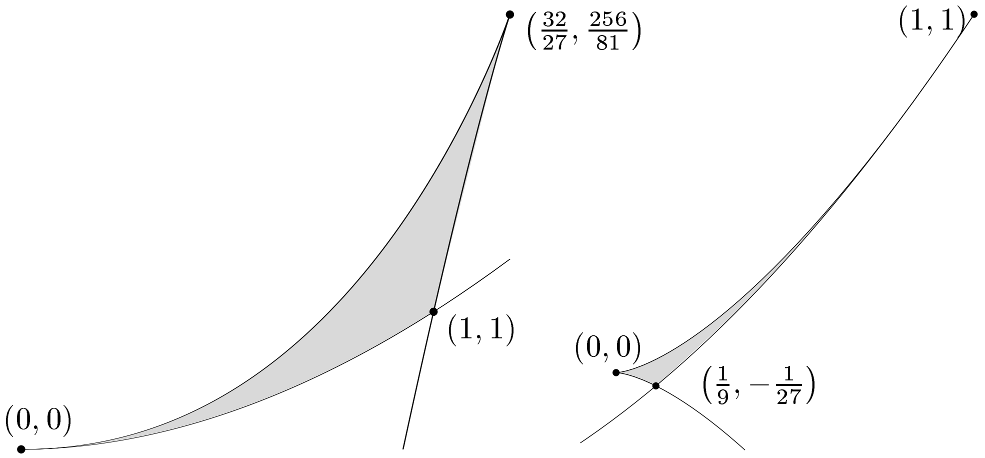
$$g = g_{(-18, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 4(2y - 3x^2 + x) & 6(y - 3xy + 2x^2) \\ 6(y - 3xy + 2x^2) & 9(x^2 + x^3 + 2xy - 4y^2) \end{pmatrix},$$

$\frac{1}{36}\det g = \Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$, где $\Gamma_1 = 8y - 3x^2 - 6x + 1$, $\Gamma_2 = x^3 - y^2$, область Ω — ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma = 0\}$ и $\rho = \Gamma_1^{p-1}\Gamma_2^{q-1}$ при $p > 0$, $q > \frac{1}{6}$, $p + q > \frac{2}{3}$;

(B3) *(параболический двуугольник) $g = g_{(\alpha,\beta)}$ имеет вид (31) при $\alpha < 0$ и $\beta \le 0$; $\Omega = \{x^2 - 1 < y < 0\}$ и $\rho = (-y)^{p-1}(y - x^2 + 1)^{q-1}$ при $p, q > 0$.*

Решение (B3) сводится к решению задачи $(1, 1)$-DOP $(1, 2)$-допустимой заменой тогда и только тогда, когда либо $\alpha = 4\beta$ (тогда оно уже таково), либо $\alpha = 4\beta - 4$. Во втором случае замена переменных $(x, y) \mapsto (x, x^2 - y - 1)$ преобразует $g_{(4\beta-4,\beta)}$ в $-g_{(4-4\beta,1-\beta)}$. Имеет место равенство $g_{(4\beta,\beta)} = -\beta G'_{-1/\beta}$ в обозначениях из [3, §4.5].

Доказательство. Согласно предложениям 5.3, 5.5 и 5.7, только эти решения задачи $(1, \infty)$-AlgDOP имеют ограниченную компоненту множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma = 0\}$ и при этом не являются решениями задачи $(1, \infty)$-AlgDOP. Прямое вычисление (в соответствии с разд. 2.3) показывает, что из решений задачи $(1, 2)$-AlgDOP, являющихся решениями задачи $(1, 1)$-AlgDOP, можно получить только те решения задачи $(1, 2)$-DOP, которые являются решениями задачи $(1, 1)$-DOP.



Додекаэдральный фактор — Кубика $y^2 = x^3$ и парабола

Рис. 8. Первые две области из теоремы 6.1.

Условия на α и β в случае (B3) равносильны положительной определенности матрицы g. В самом деле, поскольку $g(0,y) = \operatorname{diag}\big(y - \beta + 1, \alpha y(1+y)\big)$, из положительности g на $\Omega \cap \{x = 0\}$ следует, что $\alpha < 0$ и $\beta \le 0$. Обратно, пусть $\alpha < 0$ и $\beta \le 0$. Тогда $g > 0$ в $(0, -\frac{1}{2})$, следовательно, достаточно показать, что Δ не обращается в нуль в Ω. Мы имеем $\Gamma = y\Gamma_1$ и $\Delta := \det(g) = y\Gamma_0\Gamma_1$, где

$$\Gamma_0 = \alpha y + (4\beta - \alpha)(1-\beta)x^2 + \alpha(1-\beta), \qquad \Gamma_1 = y - x^2 + 1. \tag{32}$$

Поэтому достаточно показать, что $\{\Gamma_0 = 0\} \cap \Omega = \varnothing$. Если $\beta = 0$, то $\Gamma_0 = \alpha\Gamma_1$ и все доказано. Если $\beta > 0$, то легко проверить, что кривая $\Gamma_0 = 0$ не пересекает $\partial\Omega$.

Вид плотности меры следует из предложения 2.11, кроме случаев, когда у Δ есть кратный множитель. Он есть лишь в случае (B3), причем, как видно из (32), только при $\beta = 0$ (тогда $\Delta = \alpha y \Gamma_1^2$) или при $\beta = 1$ (тогда $\Delta = \alpha y^2 \Gamma_1$). В этих двух случаях можно выполнить вычисления, описанные в начале раздела §2.3 (можно также заметить один из этих двух случаев сводится к другому заменой, упомянутой в формулировке теоремы). Неравенства на p и q — это условия интегрируемости (см. [3, Remark 2.28]). $\square$

Теорема 6.2. *Пусть (Ω, g, ρ) — решение задачи $(1,\infty)$-DOP в $\mathbb{R}^2$ такое, что область Ω ограничена. Тогда имеет место один из следующих случаев с точностью до $(1,\infty)$-допустимой замены переменных.*

(B4) *(g, Γ) такое, как в предложении 4.3(i) при $c_{02} < 0$, $\Omega = \{\Gamma > 0\} \cap \{x^2 < 1\}$ — единственная ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma = 0\}$, и*

- *если одно из m, n нечетно, то* $\rho = \Gamma^{p-1}$ *при* $p > \max\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)$*;*
- *если m и n оба четны, то*

$$\rho = \left((1-x)^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{n}{2}} + y\right)^{p-1}\left((1-x)^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{n}{2}} - y\right)^{q-1}$$

при положительных p и q таких, что $p + q > \max\left(1 - \frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{m}\right)$.

(B5) (g, Γ) *такое, как в предложении 4.3(iii) при* $k = x_0 = 1$, $n \geq 1$, *и* $c_{02} \leq 0$, *(т.е.* $\Gamma = x\Gamma_2$, $\Gamma_2 = (1-x)^n - y^2$*),* $\Omega = \{\Gamma > 0\} \cap \{0 < x < 1\}$ *— единственная ограниченная компонента множества* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma = 0\}$*, и*

- *если n нечетно, то* $\rho = x^{r-1}\Gamma_2^{p-1}$ *при* $r > 0$ *и* $p > \max\left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$*;*
- *если n четно, то* $\rho = x^{r-1}\left((1-x)^{n/2} + y\right)^{p-1}\left((1-x)^{n/2} - y\right)^{q-1}$ *при положительных p, q, r таких, что* $p + q > 1 - \frac{2}{n}$.

Доказательство. В силу предложения 4.3, это единственные решения задачи $(1, \infty)$-AlgDOP, для которых есть ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma = 0\}$.

Случай (B4). Мы имеем

$$\Delta := \det(g) = \Gamma_0\Gamma, \qquad \Gamma_0 = \tfrac{1}{4}\Big((n-m) - (n+m)x\Big)^2 - c_{02}(1-x^2).$$

Условие $c_{02} < 0$ равносильно тому, что g положительно определена. Действительно, предположим, что $c_{02} \geq 0$. Тогда

$$\Gamma_0(x_0) = -\frac{4c_{02}(c_{02} + mn)}{4c_{02} + (m+n)^2} \leq 0 \qquad \text{при} \quad x_0 = \frac{n^2 - m^2}{4c_{02} + (m+n)^2}.$$

Поскольку $|x_0| < 1$, мы имеем $(x_0, 0) \in \Omega$, и значит, $\Gamma(x_0, 0) > 0$. Поэтому $\Delta(x_0, 0) = \Gamma_0(x_0)\Gamma(x_0, 0) \leq 0$, следовательно, g не является положительно неопределенной на Ω. Обратно, если $c_{02} < 0$, то $\Gamma_0(x) \geq -c_{02}(1-x^2) > 0$ при $|x| < 1$, следовательно, $\Delta|_\Omega > 0$, что влечет $g|_\Omega > 0$ по критерию Сильвестра, так как $a|_\Omega > 0$.

Требуемый вид ρ можно вывести из предложения 2.11. В самом деле, Γ – максимальная граница для g (по предложению 4.3) и у Δ нет кратных множителей. Следовательно, по предложению 2.11, ρ имеет требуемый вид, но с дополнительным множителем $\exp h$. В силу (10) мы имеем $\deg_y h = 0$, т. е. $h'_y = 0$. Тогда из (7) следует, что $\deg_{(1,w)} bh'_x \leq w$, откуда $h'_x = 0$, так как $\deg_{(1,w)} b > w$. Поэтому $h'_x = h'_y = 0$, т. е. h — константа, значит, ρ имеет требуемый вид.

Неравенства на p и q — это условия интегрируемости (см. [3, Remark 2.28]).

Случай (B5). Доказательство почти такое же, как в случае (B4). Мы имеем $\Delta := \deg g = \Gamma_0\Gamma$, где $\Gamma_0 = \frac{1}{4}n^2x - c_{02}(1-x)$. Условие $c_{02} \leq 0$ равносильно $g > 0$. Действительно, если $c_{02} > 0$, то $\Gamma(x_0) = 0$ и $0 < x_0 < 1$ при $x_0 = c_{02}/(c_{02} + \frac{1}{4}n^2)$, откуда следует, что $\Delta(x_0, 0) = 0$, и значит, форма $g|_\Omega$ не является положительно определенной. Обратно, если $c_{02} \leq 0$, то $\Gamma_0(x) > 0$ при $0 < x < 1$, следовательно, $\Delta|_\Omega > 0$, и значит, $g|_\Omega > 0$ (так как $a|_\Omega > 0$).

Вид ρ устанавливается так же, как и в случае (B4). $\square$

6.2. Некомпактные решения.

Теорема 6.3. *Любое решение (Ω, g, ρ) задачи $(1,2)$-SDOP в неограниченной области Ω сводится к решению задачи $(1,1)$- или $(1,\infty)$-SDOP $(1,2)$-допустимой заменой переменных.*

Доказательство. Пусть $\Delta = \deg g$ и Γ — максимальная граница для g (см. определение 2.10). Мы предполагаем, что (g, Γ) не сводится к решению задачи $(1,1)$-AlgDOP. В противном случае с помощью классификации [3] (см. также §6.3) можно проверить, что (Ω, g, ρ) сводится к решению задачи $(1,1)$-SDOP. Из условия интегрируемости для меры $\rho\, dx$ следует, что множитель $\exp(Q)$ в предложении 2.11 непостоянен, а значит, $\deg_y \Gamma \le \deg_y \Delta \le 2$ (см. следствие 2.14).

Случай 1. $\deg_y \Gamma = 2$. Тогда g такая, как в предложении 5.5. Условие $\deg_y \Delta < 3$ влечет $\alpha = 0$ во всех трех случаях (i)–(iii), и по алгоритму из §2.3 мы находим, что у ρ нет экспоненциального множителя.

Случай 2. $\deg_y \Gamma = 1$. Тогда $\deg_y a = 1$ и $\Gamma = y$ с точностью до $(1,2)$-допустимой замены координат, так как иначе это было бы решением задачи $(1,\infty)$-AlgDOP (см. леммы 3.2–3.3 и рис. 2) и можно проверить, что это дало бы решение задачи $(1,\infty)$-SDOP. Из равенства $\Gamma = y$ в сочетании с (12) следует, что y делит b и c. Поскольку $\deg_y a = 1$ и $\deg_y b \le 1$, условие $\deg_y(ac - b^2) < 3$ влечет $\deg_y c = 1$, следовательно, $(a, b, c) = (y + a_0, yb_1, yc_1)$ и $\Delta = (c_1 - b_1^2)y^2 + a_0 c_1 y$. Если $\deg c_1 \le 1$, то это решение задачи $(1,1)$-SDOP. Пусть тогда $\deg c_1 = 2$.

Случай 2.1. $a_0 \ne 0$. Тогда y^2 не делит Δ, следовательно, по предложению 2.11, $\rho = e^h y^\alpha$ для многочлена h такого, что $\deg_y h \le 1$, значит, $h = yh_1(x) + h_0(x)$. Из (7) следует, что $L^k \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_k)$, $\mathbf{w} = (1,2)$, где

$$L^1 = (y + a_0)(yh_1' + h_0') + yb_1 h_1, \qquad L^2 = yb_1(yh_1' + h_0') + yc_1 h_1.$$

Условие $L^1 \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_1)$ означает, что $\deg_y L^1 = 0$, $\deg_x L^1 \le 1$. Поэтому $h_1' = 0$ (и тогда $h_1 = \mathrm{const}$) и $h_0' = -h_1 b_1$. Из условия интегрируемости следует, что $h_1 < 0$ (мы здесь предполагаем, что $\Omega = \{y > 0\}$). Масштабируя y, можно добиться, что $h_1 = -1$, следовательно, $h_0' = b_1$. Тогда $L^1 = a_0 b_1$ и $L^2 = (b_1^2 - c_1)y$. Из условия $L^2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}(w_2)$ следует, что $b_1^2 - c_1 = \mathrm{const}$, и значит, $\deg b_1 = 1$ (напомним наше предположение, что $\deg c_1 = 2$). Поскольку $L^1 = a_0 b_1$ и $\deg_x L^1 \le 1$, мы заключаем, что $a_0 = \mathrm{const}$. Сдвигом x можно добиться, что $b_{01} = 0$, и мы получаем $(a, b, c) = (y + \alpha, \beta xy, \beta^2 x^2 y + \gamma y)$ для некоторых констант α, β, γ. Замена $(x, y) \mapsto (x, y - \frac{1}{2}\beta x^2)$ приводит к $(y + \frac{1}{2}\beta x^2 + \alpha, -\alpha\beta x, (\alpha\beta^2 + \frac{1}{2}\beta\gamma)x^2 + \gamma y)$, что является решением задачи $(1,1)$-SDOP (см. [3, §6(2ii)]).

Случай 2.2. $a_0 = 0$. Тогда $\Delta = y^2 \Delta_0$, $\Delta_0 = c_1 - b_1^2$. Будем рассуждать, как в начале §2.3. Пусть

$$L^1 = p(x) = p_0 + p_1 x, \qquad L^2 = q_1 y + q(x) \tag{33}$$

(p_0, p_1, q_1 — константы). Тогда уравнение (8) принимает вид $e_2 y^2 + e_1 y + e_0 = 0$, где $e_2 = q_1 \Delta_0'$. Уравнение $e_2 = 0$ дает $c_1 - b_1^2 = \mathrm{const}$. Это приводит к решению $(1,1)$-задачи с помощью той же замены, что и в случае 2.1 (см. [3, §6(2iii)]).

Случай 3. $\deg_y \Gamma = 0$. Тогда Ω содержитвертикальную полосу Ω_0. Мы имеем $\deg_y a \le 1$. При $\deg_y a = 0$ это решение задачи $(1,\infty)$-SDOP (см. рис. 2). Если $\deg_y a = 1$, то a обращается в нуль в некоторой точке $P \in \Omega_0$, значит, g не является положительно определенной в P. $\square$

Теорема 6.4. *Пусть (Ω, g, ρ) — решение задачи $(1,\infty)$-SDOP в $\mathbb{R}^2$ с неограниченной областью Ω. Тогда имеет место один из следующих случаев с точностью до $(1,\infty)$-допустимой замены переменных.*

(U1) *(g, Γ) такое, как в предложении 4.3(ii), и $\Omega = \{x > 0\} \cap \{x^n > y^2\}$, $n \ge 1$, $c_{02} \le 0$, и ρ имеет вид:*

- *если n нечетно, $\rho = (x^n - y^2)^{p-1} e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $p > \max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n})$;*
- *если n четно, $\rho = (x^{\frac{n}{2}} + y)^{p-1} (x^{\frac{n}{2}} - y)^{q-1} e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $p + q > 1 - \frac{2}{n}$.*

(U2) *(Ω, g, ρ) — произведение одномерных решений, т. е. $g = \operatorname{diag}\big(\alpha g_1(x), \beta g_2(y)\big)$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $(\alpha, \beta) \ne (0, 0)$ и $\rho = \rho_1(x)\rho_2(y)$, где каждое (Ω_k, g_k, ρ_k) — одно из трех одномерных решений из замечания 1.1 (отвечающих многочленам Эрмита, Лагерра и Якоби); см. также §6.3.*

Доказательство. Пусть $w_{\min}$ — минимальное число w такое, что $w \ge 1$ и (Ω, g, ρ) есть решение задачи $(1, w)$-AlgDOP. Если $w_{\min} = 1$, требуемый результат следует из классификации в [3, §§5–6]. Поэтому предположим, что $w_{\min} > 1$. Пусть $\Delta = \deg g$ и Γ — максимальная граница для g (см. определение 2.10). Тогда $\partial\Omega \subset \{\Gamma = 0\}$. Мы имеем $\deg_y \Gamma \le \deg_y \Delta \le 2$ (см. рис. 2).

Случай 1. $\deg_y \Gamma = 2$. Тогда (Γ, g) реализует один из случаев (i)–(v) предложения 4.3. В случае (iii) при $n = 0$ и в случаях (iv)–(v) мы получаем (U2) по предложению 2.8. В случае (i) те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 6.2 доказывают отсутствие экспоненциального множителя у ρ, как и в случае (iii) при $x_0 = 1$, $n > 0$.

В случае (iii) предложения 4.3 при $x_0 = 0$, $n > 0$, эти рассуждения (основанные на предложении 2.11) не применимы буквально, так как Δ может иметь кратные множители, но они дают требуемый результат, если воспользоваться следствием 2.19 из [3].

Нереализуемость данного случая можно также доказать следующим образом. Будем следовать алгоритму из §2.3. Пусть $h = \log \rho$. Перепишем g, заменяя x на $-x$ и меняя знак:

$$g = \begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{2}nxy \\ \frac{1}{2}nxy & \frac{1}{4}n^2x^n - c_{02}\Gamma_2 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 = x^n - y^2, \qquad \Delta = \big(\tfrac{1}{4}n^2 - c_{02}\big)x^2\Gamma_2.$$

Пусть L^i такое, как в (33). Тогда (8) имеет вид $np_0y - nxq(x) + 2x^2q'(x) = 0$. Следовательно, $p_0 = 0$ и $q(x) = Cx^{n/2}$ ($C = 0$ при нечетном n). Подставляя полученное решение в (7) и интегрируя h'_x и h'_y, получаем $\rho = C_1 x^{\alpha}(x^n - y^2)^{\beta}$ при нечетном n, и $\rho = C_1x^\alpha(x^{n/2}+y)^{\beta_1}(x^{n/2}-y)^{\beta_2}$ при четном n, где C_1, α, β, β_1, β_2 — константы. Таким образом, ρ неинтегрируема на любой компоненте $\mathbb{R}^2\setminus\{\Gamma=0\}$.

В случае (ii) предложения 4.3 мы получаем (U1). Действительно, мы имеем $(a,b,c) = (x, \frac{1}{2}ny, \frac{1}{4}n^2x^{n-1} - c_{02}\Gamma)$ и $\Delta = \Gamma_0\Gamma$, где $\Gamma_0 = \frac{1}{4}n^2 - c_{02}x$ и $\Gamma = x^n - y^2$. Ясно, что $n > 0$, так как если $n = 0$, то Δ имеет нули на каждой компоненте $\mathbb{R}^2\setminus\{\Gamma=0\}$, что противоречит положительной определенности $g|_\Omega$. Той же причиной обусловлен выбор вещественной формы кривой $\Gamma = 0$ и выбор области Ω (с точностью до замены $x\mapsto -x$). По предложению 2.11 ρ имеет вид (9), где $\deg_y Q = 0$. Следовательно, $\deg_x(aQ)\le 2$ в силу (6), и значит, $\deg_x Q\le 1$. Неравенства на p, q, λ — это условия интегрируемости (см. [3, Remark 2.28]), а неравенство $c_{02}\le 0$ равносильно $\Gamma_0|_\Omega > 0$, а значит, и $g|_\Omega > 0$. Таким образом, мы получаем (U1).

Случай 2. $\deg_y\Gamma = 1$. Тогда (Γ, g) реализует один из случаев (i)–(vi) предложения 4.4.

Случай 2(i). Тогда $k = 1$, так как иначе Γ не будет g-максимальной границей. Мы имеем $\Gamma = x\Gamma_1$, $\Gamma_1 = x^ny - 1$, $\Delta = -x^2c_0(x)\Gamma_1$, и значит, $c_0\ne 0$. Как и выше, будем следовать §2.3 для нахождения ρ. Пусть L^i будут, как в (33). Тогда (8) принимает вид

$$\Big((np+q_1x)xc_0' + (p_0+2np+2q_1x)nc_0\Big)y + nxqc_0 + x^2(qc_0' - q'c_0) = 0,$$

Приравнивая нулю коэффициент при y^0, получаем $q = C_1x^nc_0$ (здесь и далее α, β, C_1, C_2, C_3 — константы). Приравнивая нулю коэффициент при y^1, получаем два решения. Первое — это $p_0 = 0$, $q_1 = -np_1$ (и тогда c_0 — произвольная функция); второе — это $c_0 = C_2(np+q_1x)/x^{2n+1}$. Первое решение дает $\rho = C_3x^\alpha\Gamma_1^\beta$, что противоречит условию интегрируемости. Во втором решении c_0 не может быть ненулевым многочленом.

Случай 2(ii). Мы имеем $\Gamma = xy - 1$ и $\Delta = (xy + 1 - x^2c_0 - b_{11}^2\Gamma + 2b_{11})\Gamma$. Тогда $c_0\ne 0$ (иначе $w_{\min} = 1$) и $b_{11}\ne -1$ (иначе g такая же, как в 2(i), и значит, многочлен Γ не g-максимален). Следовательно, Γ^2 не делит Δ и в силу предложения 2.11 можно записать ρ в виде (9). В силу (10), $\deg_y Q = 0$, т. е. $Q_y' = 0$. Тогда (7) влечет $\deg_{(1,w)} bh_x' \le w$, откуда $Q_x' = 0$, так как $\deg_{(1,w)} b > w$. Поэтому $Q = \mathrm{const}$, следовательно, ρ неинтегрируема.

Случай 2(iii). Мы имеем $(a,b,c;\Gamma) = (a_0, b_1y, c_2y^2 + c_1y; y)$, $\Delta = (a_0c_2 - b_1^2)y^2 + a_0c_1y$. Если $\deg c_1 < 2$, то $w_{\min} = 1$. Следовательно, $\deg c_1\ge 2$. Предположим, что $\deg a\ge 1$. Тогда $\deg_x ac\ge 3 > \deg_x b^2$, откуда $\deg_x\Delta = \deg_x ac$, что противоречит предложению 2.15 для $w = \deg c_1$. Значит, $0\ne a = \mathrm{const}$ и мы можем положить $a = 1$.

Поскольку $ac_1\ne 0$, то y^2 не делит Δ. Тогда из предложения 2.11 при $\mathbf{w} = (1,w)$, $w\gg 0$, следует, что $\rho = y^pe^h$, где $\deg_y h\le 2-\deg_y\Delta$. Если $\deg_y\Delta = 2$, это противоречит условию интегрируемости, следовательно, $\deg_y\Delta = 1$. Тогда $c_2 = b_1^2$, в частности, $b_1 = \mathrm{const}$, и значит, $(a,b,c) = (1, \beta y, \beta^2y^2 + c_1y)$, $\beta\in\mathbb{R}$. Пусть $h = h_1(x)y + h_0(x)$. Тогда $\deg_y L^1 = 0$ для $L^1 = ah_x' + bh_y' = h_1'y + h_0' + \beta yh_1$, следовательно, $h_1' = \beta h_1$. Если $\beta\ne 0$, то $h_1 = 0$ (поскольку h_1 — многочлен). Если $\beta = 0$, условие $\deg_{(1,w)} L^2\le w$ для $L^2 = bh_x' + ch_y' = yc_1h_1$ тоже влечет $h_1 = 0$, так как $\deg c_1 > 0$. Стало быть, $\deg_y h = 0$, что противоречит условию интегрируемости.

Случай 2(iv). Тогда $(a,b,c;\Gamma)=(x\tilde a_0,\ b_{11}xy,\ c_2y^2+c_1y;\ xy)$, $\Delta=(\tilde a_0c_2-b_{11}x)xy^2+ac_1y$. Как и в случае 2(iii), мы получаем $\deg c_1\ge 2$, $\tilde a_0=1$, y не делит Δ, значит (см. замечание 2.13), $\deg_y\Delta=1$, т. е. $c_2=b_{11}^2x$. Таким образом, $(a,b,c)=(x,\beta xy,\beta y^2+c_1y)$. Поэтому $\rho=x^py^qe^h$, где $h=h_1y+h_0$, причем h_k — рациональная функция от x. Окончание доказательства такое же, как в случае 2(iii).

Случай 2(v). Мы получаем (U2) по предложению 2.8.

Случай 2(vi). $a=0$ невозможно для положительно определенной g.

Случай 3. $\deg_y\Gamma=0$, т. е. $\Gamma=\Gamma(x)$ — многочлен только от x. Тогда $\Omega=I\times\mathbb{R}$ для некоторого конечного или бесконечного (с любой стороны) интервала I. Далее, ρ имеет вид (9) (см. замечание 2.12), где $\deg_y Q\ge 2$ по условию интегрируемости, и значит, $\deg_y Q=2$ и $\deg_y\Delta=0$ в силу (10); запишем $Q=h_2y^2+h_1y+h_0$, где h_k — рациональные функции от x и $h_2\ne 0$. Тогда (см. (7))

$$\begin{array}{lll}\deg_{\mathbf w}L^1=1 & \text{for} & L^1=a(h_2'y^2+h_1'y+h_0')+b(2h_2y+h_1),\\ \deg_{\mathbf w}L^2=w & \text{for} & L^2=b(h_2'y^2+h_1'y+h_0')+c(2h_2y+h_1).\end{array}\tag{34}$$

Поскольку $\deg_y\Gamma=0$, из (12) следуе, что Γ делит a и b, и значит, $\deg_x\Gamma\le 2$. Поскольку $\Omega\subset\{\Gamma=0\}$, из предложения 2.15 следует, что

$$\deg_x\Delta\le\deg_x\Gamma-1+\max\bigl(\lfloor w_{\min}\rfloor+\deg_x b,\ 1+\deg_x c\bigr).\tag{35}$$

Случай 3.1. $\deg_x\Gamma=2$. Тогда, с точностью до масштабирования, $a=\Gamma$ и $b=b_0=\tilde b(x)\Gamma$ для некоторого многочлена $\tilde b$. Поэтому замена $y\mapsto y-p(x)$, где $p'=\tilde b$ (см. пример 2.7) дает $b=0$. Тогда $\deg_y\Delta=0$ влечет $c=c_0$. Поэтому (34) дает $h_2'=0$ и $2h_2c_0=\mathrm{const}$. Поскольку $h_2\ne 0$, мы делаем вывод, что $c_0=\mathrm{const}$ и получаем (U2).

Случай 3.2. $\Gamma=x$. Тогда $a=x\tilde a$ и $b=x\tilde b=x(\beta y+\tilde b_0(x))$ $(\beta=b_{11})$ в силу (12), следовательно, коэффициент при y^2 в Δ равен $ac_2-x^2\beta$. Поскольку $\deg_y\Delta=0$, $a\ne 0$ и $c_2=\mathrm{const}$, то либо $a=a_{20}x^2$ (тогда положим $a_{20}=1$), либо $\beta=0$.

Случай 3.2.1. $a=x^2$. Мы имеем $\Delta=x^2d(x)$ для некоторого многочлена $d=d(x)$, и значит, $c=\tilde b^2+d$. Если $\deg\tilde b_0\le 1$, то либо нарушено (35), либо $w_{\min}=1$. Поэтому предположим, что $\deg\tilde b_0\ge 2$. Замена $y\mapsto y+\lambda x^n$ преобразует b в $b+\lambda(n-\beta)x^{n+1}$ (см. пример 2.7). Следовательно, можно убить все коэффициенты в b_0, кроме случая, когда $\beta=n\in\mathbb{N}$, в котором можно убить все коэффициенты, за исключением $b_{n+1,0}$. Поскольку $\deg\tilde b_0\ge 2$, можно предполагать, что $\tilde b=ny+\alpha x^n$, $n\ge 2$.

Тогда (см. (34)) коэффициент при y^2 в L^1 равен $x^2h_2'+2nxh_2$, следовательно, $h_2'=-2nh_2/x$, и значит, $h_2=Cx^{-2n}$. Это противоречит тому, что $h_2\ne 0$ и h_2 — рациональная функция со знаменателем x (см. [3, предл. 2.15]).

Случай 3.2.2. $\beta=0$. Тогда условие $\deg_y\Delta=0$ влечет $c_2=c_1=0$, т. е. g не зависит от y. Заменой $y\mapsto y+p(x)$ можно добиться, что $\deg_x\tilde b<\deg_x\tilde a$. Если $\deg\tilde a=0$, то $b=0$ и доказательство такое же, как в случае 3.1. Если $\deg\tilde a=1$ и $b\ne 0$, мы приходим к противоречию с (35).

Случай 3.3. $\Gamma=\mathrm{const}$. Тогда $\Omega=\mathbb{R}^2$. Поскольку $a|_\Omega>0$, с точностью до сдвига, $a=x^2+1$ или $a=1$.

Случай 3.3.1. $a = x^2 + 1$. Напомним, что $\deg_y \Delta = 0$, следовательно, $(x^2+1)c_2 = b_1^2$ и $ac_1 = 2b_1b_0$, и значит, $b_1 = c_2 = c_1 = 0$. Заменой $y \mapsto y - p(x)$ можно добиться, что $\deg b \le 1$ (см. пример 2.7), и мы приходим к противоречию с (35).

Случай 3.3.2. $a = 1$. При $b_1 = 0$ доказательство то же, что и в случае 3.1. Если $b_1 \ne 0$, то (34) для L^1 дает $h_2' = -b_1h_2$, что невозможно для ненулевых многочленов. □

6.3. Исправления к статье [3].

(1). В [3, §4.2] ошибочно утверждается, что для каждого решения на квадрате $[-1,1]^2$ кометрика пропорциональна $\operatorname{diag}(1-x^2, 1-y^2)$. На самом деле $g = \operatorname{diag}\big(\alpha(1-x^2), \beta(1-y^2)\big)$, $0 < \alpha \le \beta$. Все соответствующие римановы метрики $(g_{ij}) = g^{-1}$ попарно неизометричны.

(2). В [3, §6(2iii)] ошибочно утверждается, что если $\partial\Omega = \{y = x^2\}$ и $\deg(\det g) = 2$, то единственной кометрикой, для которой существует допустимая мера, является $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4y \end{smallmatrix}\right)$. На самом деле решение существует для любой g из [3, предл. 3.21(3)], т. е.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4y + \gamma(y - x^2) \end{pmatrix}, \qquad \gamma \ne -4.$$

Допустимые плотности меры имеют вид $|y - x^2|^{p-1} \exp\big(\alpha x - \beta(4y + \gamma x^2)\big)$, где $p > 0$ и $\beta(4+\gamma) > 0$. Линейной заменой переменных, сохраняющей g, всегда можно сделать $\alpha = 0$. При $\gamma + 4 > 0$ (соотв. $\gamma + 4 < 0$) это решение задачи $(1,1)$-SDOP на выпуклой области $\Omega_+ = \{y > x^2\}$ (соотв. на невыпуклой области $\Omega_- = \{y < x^2\}$). В частности, надо добавить область Ω_- к списку неограниченных областей допускающих решение задачи $(1,1)$-SDOP. Все эти решения приводятся к прямому произведению одномерных решений $(1,2)$-допустимой заменой переменных $(x,y) \mapsto (x, y - x^2)$.

(3). В [3, Thm. 5.1] пропущено следующее решение:[1]

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda x \\ -2\lambda x & 4\lambda^2x^2 + 2 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \frac{1}{\pi} \exp\Big(-x^2 - (y + \lambda x^2)^2\Big). \tag{36}$$

Заметим, что это решение $(1,2)$-допустимой заменой $(x,y) \mapsto (x, y - \lambda x^2)$ приводится к виду $g = \operatorname{diag}(1,2)$, $\pi\rho = \exp(-x^2 - y^2)$. Ошибка в доказательстве — утверждение “this also requires that $(\partial_X + \partial_Y)P_3 = 0$” (стр. 1060, строка 18).

Докажем, что аффинной заменой любое решение $(\mathbb{R}^2, g, \rho)$ задачи $(1,1)$-SDOP приводится либо к (36), либо к решению из [3, теорема 5.1]. Пусть $\Delta = \det g$. В силу [3, §5.1] достаточно доказать, что при $\Delta = 1$ и $\deg g > 1$ решение сводится к (36). Ввиду [3, §5.2, стр. 1060] можно считать, что $(g^{11}, g^{12}, g^{22}) = (\nu^2l^2 + p_1, \nu l^2 + p_2, l^2 + p_3)$, где l — линейная форма от x, y и $p_k = a_kl + b_k$ (здесь $\nu, a_k, b_k \in \mathbb{R}$). Заменой $(x,y) \mapsto (x - \nu y, y)$ с последующим сдвигом добиваемся, что $\nu = b_2 = 0$ (см. пример 2.7). Условие $\Delta = 1$ влечет $a_1 = a_3 = 0$, $a_2^2 = b_1 = b_3^{-1}$. Масштабируя x, l и g, получаем $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & l \\ l & l^2+1 \end{smallmatrix}\right)$.

[1] В формулировке теоремы также есть опечатка: X^2 и Y^2 надо поменять местами в G.

Мы имеем $\rho = e^h$, где h — многочлен и $\deg h \le 4$ [3, предл. 2.15]. Пусть $h = h_0 + \dots + h_4$, где h_k — форма степени k. Тогда (7) принимает вид

$$\begin{pmatrix} h'_x \\ h'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^2+1 & -l \\ -l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 + c_1 \\ l_2 + c_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

для некоторых линейных форм l_k и констант c_k. Следовательно, $(h_4)'_y = 0$ и $(h_4)'_x = l_1 l^2$. Предположим, что $l_1 = 0$. Тогда (37) дает $(h_4)'_y = (h_4)'_x = 0$, откуда $h_4 = 0$. Поэтому из условия интегрируемости следует, что $h_3 = 0$, и значит, (37) влечет $l_2 = c_1 l$, откуда получаем $h'_y = c_2$, т. е. $h = c_2 y + f(x)$, что противоречит интегрируемости. Стало быть, $l_1 \ne 0$. Тогда равенства $(h_4)'_y = 0$ и $(h_4)'_x = l_1 l^2$ влекут $l = \alpha x$, $\alpha \ne 0$. Решая уравнения (8) и масштабируя координаты, получаем (36).

6.4. Все решения с точностью до $(1, w)$-допустимой замены для любого фиксированного w. Для $w = 1$ все решения с точностью до аффинно линейной замены даны в [3] и в §6.3. Для $w > 1$ ниже мы приводим полный список решений с точностью до $(1, w)$-допустимой замены (здесь p и q — любые положительные числа, λ — любое число):

- все прямые произведения одномерных решений;
- образы решений $\big(\mathbb{R}^2, \operatorname{diag}(1, n), e^{-x^2-y^2}\big)$ и $\big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \operatorname{diag}(1, ny), y^{q-1}e^{x^2-2y}\big)$ при замене $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^n)$, $n = \lfloor w \rfloor + 1$, а если $w \ge n - \frac12$, то еще образы решений $\big(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \operatorname{diag}(x, n), x^{p-1}e^{-2x-y^2}\big)$, $\big(\mathbb{R}^2_+, \operatorname{diag}(x, ny), x^{p-1}y^{q-1}e^{-2x-2y}\big)$ при той же замене;
- если $w \le 2$, решения из [3, §4.7, §4.10–11, §6(2ii)], (B3) (где $\alpha = 4\beta$, когда $w < 2$) и образ $\big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \operatorname{diag}(1, y), y^{p-1}e^{-x^2-2y}\big)$ при замене $(x, y) \mapsto (x + \lambda y, y)$;
- если $3/2 \le w \le 2$, то (B1) и (B2);
- (B4) при $m + n \le 2w$ (ср. с [3, §4.3]), а также (B5) и (U1) при $n \le 2w$;
- (B4) при $m + n \le 2w + 1$ и $4c_{02} = -(m+n)^2$ (ср. с [3, §4.8]);
- образ (B4) при замене $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $c_{02} = -k^2$ и либо $w < k = m = n \le w + 1$ (ср. с [3, §4.5]), либо $2w < 2k = m + n \le 2w + 1$;
- образ (B4) при замене $(x, y) \mapsto \big(x, \frac12(y + (1 - x^2)^k)\big)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $m = n = 2k \le w + 2$ и $c_{02} = -n^2$; в этом случае

  $$g = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & -nxy \\ -nxy & n^2 y\big((1-x^2)^{k-1} - y\big) \end{pmatrix}, \quad \det g = n^2 y\big((1-x^2)^k - y\big);$$

- (B5) (соотв. (U1)) при $n \le 2w + 1$ и $4c_{02} = -n^2$ (соотв. $c_{02} = 0$);
- образ (B5) (соотв. (U1)) при замене $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $2w < n = 2k \le 2w + 1$ и $c_{02} = -k^2$ (соотв. $c_{02} = 0$);
- образ (B5) (соотв. (U1)) при замене $(x, y) \mapsto \big(x, \frac12(y + (1-x)^k)\big)$ (соотв. $(x, y) \mapsto (x, \frac12(y + x^k)))$, $k \in \mathbb{Z}$, где $n = 2k \le 2w + 2$ и $c_{02} = -k^2$ (соотв. $c_{02} = 0$); в этих случаях (ср. с (Ω_6, Γ_6) в [1])

  $$g = \begin{pmatrix} x(1-x) & -kxy \\ -kxy & k^2 y\big((1-x)^{k-1} - y\big) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g = \begin{pmatrix} x & ky \\ ky & k^2 x^{k-1} y \end{pmatrix}$$

  соответственно и $\det g = k^2 xy((1-x)^k - y)$ (соотв. $\det g = k^2 y(x^k - y)$).

7. Реализация решений образами оператора Лапласа

Пусть M_1 и M_2 — гладкие многообразия и $\Phi : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, являющееся субмерсией в общей точке на M_1. Пусть $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ — дифференциальные операторы на M_1 и на $\Omega = \Phi(M_1)$ соответственно. Скажем, что $\mathbf{L}_2$ есть *образ* $\mathbf{L}_1$ *при отображении* Φ, если $\mathbf{L}_2(f) = \mathbf{L}_1(f \circ \Phi)$. Образ $\mathbf{L}_1$ при отображении Φ может не существовать, более того, его не существует для $\mathbf{L}_1$ и Φ в общем положении, если Φ не инъективно. Однако он существует, когда $\mathbf{L}_1$ и Φ инвариантны относительно действия группы G на M_1, и тогда Φ отождествляет Ω с пространством орбит M_1/G. Например, для полуцелых p и q оператор Якоби $J_{p,q}$ на интервале $(-1,1)$ (см. замечание 1.1) есть образ оператора Лапласа $\mathbf{\Delta}_{\mathbb{S}^n}$ на сфере $\mathbb{S}^n$, $n = 2p + 2q - 1$, при

$$(x_1, \dots, x_{2p}, y_1, \dots, y_{2q}) \mapsto 2(x_1^2 + \dots + x_{2p}^2) - 1$$

(см. [3, §2.1], а также конец [3, §4.1] и приведенные там ссылки).

В [3, §4] похожие интерпретации найдены для многих значений параметров каждого компактного решения задачи $(1,1)$-DOP. Они реализованы в виде образов оператора Лапласа (Казимира) на $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$, $SO(n)$ или $SU(n)$.

Каждый фактор $\mathbb{S}^2$ или $\mathbb{R}^2$ по группе, порожденной отражениями, можно отождествить с компактной областью Ω, $\partial\Omega \subset \{\Gamma(x,y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, так, что $(\Omega, \mathbf{L}, \Gamma^{-1/2}dx)$ есть решение задачи $(1,w)$-DOP, в котором $\mathbf{L}$ есть образ $\mathbf{\Delta}_{\mathbb{S}^2}$ или $\mathbf{\Delta}_{\mathbb{R}^2}$ при проекции на фактор-пространство. При этом отождествлении вершины фундаментального многоугольника соответствуют особым точкам на $\partial\Omega$ так, что угол π/n отвечает особенности A_{n-1} (уравнение $u^2 = v^n$ в некоторых координатах). Явные формулы для отображений $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, реализующих операторы $\mathbf{L}$ в виде образов оператора Лапласа, приведены в [3] и [1]; см. более подробные ссылки в таблице 1.

Если $\mathbf{L}$ поднимается до $\mathbf{\Delta}_{\mathbb{S}^2}$ или $\mathbf{\Delta}_{\mathbb{R}^2}$, то соответствующая метрика имеет постоянную неотрицательную кривизну. Из классификации, полученной в [3], следует, что кривизна постоянна и неотрицательна для всех решений, для которых $\det(g)$ имеет максимальную степень. Для решений с максимальной степенью Л. А. Суханов [5], [6] доказал, что кривизна постоянна (хотя не доказал ее неотрицательность), не используя классификацию, причем не только для обычной степени, но и для взвешенной, что подтверждается классификацией из настоящей статьи. Он также доказал некоторые обобщения этого результата на произвольную размерность.

Кривизна в решении (B4) из теоремы 6.2 постоянна тогда и только тогда, когда $m = n$ и $c_{02} = -n^2$. В (B5) она постоянна тогда и только тогда, когда $c_{02} = -\frac{1}{4}n^2$. Если $m \neq n$ в (B4), кривизна не может быть постоянной, так как не существует двуугольников постоянной кривизны с различными углами. При $m = n$ в (B4), а также в (B5), кривизна равна

$$\frac{-\lambda n^2\big(2(n^2+\alpha)x^k + \alpha\big)}{\big((n^2+\alpha)x^k - \alpha\big)^2}, \qquad (k,\lambda,\alpha) = \begin{cases} (2, 2, c_{02}), & \text{(B4)}, \ m = n, \\ (1, \frac{1}{2}, 4c_{02}), & \text{(B5)}. \end{cases}$$

Очевидно, что это непостоянная функция при $\alpha \neq -n^2$ (ср. с [3, §4.5]). Сходство формулы для кривизны в случаях (B4) и (B5) не случайно: с точностью до поправочных множителей (B5) является образом (B4) при $(x,y) \mapsto (x^2, y)$.

	Углы	Граница области Ω	w	Ссылка
	2,2,2,2	Прямоугольник (см. также §6.3)	1	[3,§4.2]
$\mathbb{R}^2$	2,4,4	Парабола с двумя касательными	1	[3,§4.7]
	3,3,3	Дельтоид: $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta$, $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$	1	[3,§4.12]
	2,3,6	Кубика $y^2 = x^3$ с кубически касающейся параболой	2	[3, конец §4.12]
	—	Окружность	1	[3,§4.3]
	2,2	Соосные параболы: $y^2 = (1 - x^2)^2$	1	[3,§4.5]
	n, n	$y^2 = (1 - x^2)^n$, $n \geq 2$	n	[1,§6]: $\Omega_1^{(n)}$
	2,2,2	Треугольник	1	[3,§4.4]
$\mathbb{S}^2$	2,2,3	$(y^2 - x^3)(x - 1) = 0$	1	[3,§4.9]
	2,2,4	$y(y - x^2)(x - 1) = 0$	1	[3,§4.6]
	2,2,n	$(y^2 - x^n)(x - 1) = 0$, $n \geq 2$	n	[1,§6]: $\Omega_3^{(n)}, \Omega_6^{(\frac{n}{2})}$
	2,3,3	Ласточкин хвост: $\operatorname{discrim}_t(t^4 - t^2 + xt + y) = 0$	1	[3,§4.11]
	2,3,4	Кубика $y^2 = x^3$ с касательной прямой	1	[3,§4.10]
	2,3,5	Додекаэдральный фактор, см. теорему 6.1(B1)	2	[1,§8]: Ω_{21}

Таблица 1. Факторы $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{S}^2$ по группам отражений; $a, b, \dots$ в графе “Углы” значит: углы фундаментальной области равны $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \dots$

Согласно нашей классификации, единственные ограниченные области, которых нет в таблице 1, это области из теоремы 6.2(B4) при $m \neq n$. Простейшая из них — нодальная кубика $y^2 = x^2 - x^3$, отвечающая случаю $(m, n) = (1, 2)$. Это решение реализовано в [3, §4.8] как образ $\mathbf{\Delta}_{\mathbb{S}^{3c}}$, $c = 1, 2, 4, 8$. Реализация для $c = 1$ непосредственно переносится на все пары (m, n) следующим образом (было бы интересно это сделать также для $c = 2, 4, 8$). Будем рассматривать $\mathbb{S}^3$ как единичную сферу в $\mathbb{C}^2$ с координатами (z_1, z_2). Тогда образ оператора $\frac{1}{4}\mathbf{\Delta}_{\mathbb{S}^3}$ при отображении

$$(z_1, z_2) \mapsto (X, Y) = \big(\, |z_1|^2,\ \operatorname{Re}(z_1^n \bar{z}_2^m)\,\big)$$

есть оператор на области, ограниченной кривой $(1 - X)^m X^n - Y^2 = 0$. Его образ при аффинном преобразовании $(X, Y) \mapsto (x, y) = (\,2X - 1,\ 2^{(m+n)/2} Y\,)$ — оператор, соответствующий решению (B4) при $p = q = \frac{1}{2}$ и $c_{02} = -\frac{1}{4}(m + n)^2$.

Цитированная литература

1. D. Bakry, X. Bressaud, *Diffusions with polynomial eigenvectors via finite subgroups of O(3)*, Ann. fac. sci. Toulouse, Math. (6) **25** (2016), no. 2–3, 683–721.
2. D. Bakry, O. Zribi, *Curvature dimension bounds on the deltoid model.*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6) **25** (2016), no. 1, 65–90.
3. D. Bakry, S. Orevkov, M. Zani, *Orthogonal polynomials and diffusion operators*, Ann. fac. sci. Toulouse, Math. (6) **30** (2021), no. 5, 985–1073.
4. Vik. S. Kulikov, *A remark on classical Plueckers formulae*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6) **25** (2016), no. 5, 959-967.
5. L. Soukhanov, *On the phenomena of constant curvature in the diffusion-orthogonal polynomials*, arXiv:1409.5332.

6. L. Soukhanov, *Diffusion-orthogonal polynomial systems of maximal weighted degree*, Ann. fac. sci. Toulouse, Math. (6) **26** (2017), no. 2, 511–518.

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr