МНОГОГРАННИК АГНИХОТРИ–ВУДВАРДА–БЕЛКАЛЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСОВ КЛЯЧКО

С.Ю. Оревков, $\boxed{\text{Ю.П. Оревков}}$

Многогранник Агнихотри–Вудварда–Белкале Δ (соответственно, конус Клячко $\mathcal{K}$) — это множество решений мультипликативной (соответственно, аддитивной) задачи Хорна, т.е. множество троек спектров специальных унитарных (соответственно, эрмитовых с нулевым следом) $n \times n$ матриц, удовлетворяющих соотношению $AB = C$ (соответственно, $A + B = C$). $\mathcal{K}$ является касательным конусом многогранника Δ в начале координат. Группа $G = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$ естественным образом действует на Δ.

В настоящей заметке мы сообщаем о результатах компьютерных вычислений, показывающих, что Δ совпадает с пересечением $g\mathcal{K}$, $g \in G$, при $n \leq 14$ и не совпадает при $n = 15$.

Нашей мотивировкой была попытка понять, как на практике решать мультипликативную задачу Хорна для заданных классов сопряженности в $SU(n)$.

Введение

Для специальной унитарной матрицы $A \in SU(n)$ обозначим через $\lambda(A)$ ее *спектр*, т.е. вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, однозначно задаваемый теми условиями, что

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0, \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq \lambda_1 - 1, \tag{1}$$

и $\exp(2\pi i \lambda_1), \dots, \exp(2\pi i \lambda_n)$ — собственные числа матрицы A. Отображение $\lambda : SU(n) \to \mathbb{R}^n$ отождествляет классы сопряженности в $SU(n)$ с точками $(n-1)$-мерного симплекса $\mathfrak{A}$, заданного условиями (1). Этот симплекс называется *альковом Вейля* группы $SU(n)$. Он лежит в *камере Вейля* $\mathfrak{t}_+$, задаваемой условиями (1) без последнего неравенства.

Агнихотри – Вудвард [1] и Белкале [2] получили необходимые и достаточные условия на три вектора α, β, γ для существования матриц $A, B, C \in SU(n)$, таких что $\alpha = \lambda(A)$, $\beta = \lambda(B)$, $\gamma = \lambda(C)$ и $AB = C$. Они доказали, что образ отображения $\Lambda : SU(n)^2 \to \mathfrak{A}^3$, $(A, B) \mapsto (\lambda(A), \lambda(B), \lambda(AB))$, есть многогранник $\Delta \subset \mathfrak{A}^3$, явно описываемый в терминах квантового исчисления Шуберта (см. §1).

Этот результат является обобщением решения задачи Хорна, которое получил Клячко [8] (см. прекрасный обзор [7]). А именно, Клячко описал множество $\mathcal{K}$ всех троек n-мерных векторов, реализуемых в качестве спектров эрмитовых матриц A, B и $A+B$ с нулевым следом. Ясно, что $\mathcal{K}$ является касательным конусом многогранника Δ в начале координат O пространства $\mathbb{R}^{3n}$. Его гиперграни описываются в терминах классического исчисления Шуберта. Мы будем называть Δ и $\mathcal{K}$ *многогранником Агнихотри–Вудварда–Белкале* и *конусом Клячко* соответственно.

Как применять эти результаты на практике? Допустим, для конкретной матрицы C требуется узнать, реализуема ли она в виде произведения матриц из данных классов сопряженности (такая задача возникает, например, в [12]). Хотя надо проверить конечное число неравенств, это число растет так быстро, что для матриц, скажем, 30×30 нет никаких шансов сгенерировать все неравенства за сколь-нибудь разумное время. Это касается как аддитивной, так и мультипликативной задачи. Однако для аддитивной задачи имеется описание конуса $\mathcal{K}$ в терминах сот (honeycombs), открытое Кнутсоном и Тао [9, 10]. Оно сводит задачу к существованию решения системы из $3\binom{n}{2}$ линейных неравенств с $\binom{n-1}{2}$ переменными (см. также [6]). Та же проблема с k матрицами (вместо трех) сводится к совместности системы $3(k-2)\binom{n}{2}$ линейных неравенств с $(k-2)\binom{n-1}{2}+(k-3)(n-1)$ переменными. Для мультипликативной задачи, по-видимому, такое сведение пока неизвестно (см. [14]). Поэтому мы хотели выяснить, когда мультипликативная задача сводится к аддитивной.

Обозначим через I единичную $n \times n$ матрицу и положим $\omega = \exp(2\pi i/n)$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}$ является выпуклой оболочкой множества $\lambda(Z)$, где $Z = \{\omega^k I\}$ — центр группы $SU(n)$. Действие группы Z на $SU(n)$ умножением индуцирует аффинно линейные действия группы Z на $\mathfrak{A}$ и группы $G = Z \times Z$ на Δ. Это дает очевидные нижнюю и верхнюю оценки для Δ:

$$\operatorname{conv}(GO) \subset \Delta \subset \Delta_{\mathcal{K}}, \qquad \text{где} \quad \Delta_{\mathcal{K}} = \bigcap_{g\in G} g\mathcal{K} \tag{2}$$

(“conv” означает выпуклую оболочку; $GO = \{gO \mid g \in G\} = \Lambda(G)$). Точны ли эти оценки? Для нижней оценки этот вопрос поставлен в [2; Sect. 7] и там же на него дан ответ, заключающийся в том, что равенство $\operatorname{conv}(GO) = \Delta$ выполнено при $n \le 3$ и не выполнено при $n = 4$. Для верхней оценки этот вопрос мы ставим в настоящей заметке и даем на него ответ, заключающийся в том, что равенство $\Delta = \Delta_{\mathcal{K}}$ выполнено при $n \le 14$ и не выполнено при $n = 15$.

Агнихотри и Вудвард [1; Sect. 8] обсуждают действие группы G на Δ и его связь со скрытой симметрией инвариантов Громова–Виттена. В частности, они отмечают, что действие G позволяет свести инварианты степени d к инвариантам нулевой степени при малых значениях n (откуда следует, что $\Delta = \Delta_{\mathcal{K}}$ при таких n), но при $n = 10$ они дают пример, в котором такое сведение невозможно. В терминах многогранников Δ и $\Delta_{\mathcal{K}}$ это означает, что при $n = 10$ среди неравенств, используемых в [1] для задания Δ, по крайней мере одно не сводится действием группы G к однородному неравенству. Однако это неравенство не входит в меньшую систему, которой, как доказал Белкале [2], достаточно для задания многогранника Δ. Для этой меньшей системы подобные примеры появляются лишь при $n \ge 15$.

1. Описание Δ и $\mathcal{K}$ через (квантовое) исчисление Шуберта

Зафиксируем положительные целые числа r, k, такие что $r+k = n$. Пусть $QH^*(G_r(\mathbb{C}^n))$ — кольцо квантовых когомологий грассманиана r-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$. Это алгебра над кольцом $\mathbb{Z}[q]$ (q — переменная), порожденная как $\mathbb{Z}[q]$-модуль элементами $\{\sigma_a\}$, где a пробегает множество разбиений $\mathcal{P}_{r,k} = \{\, (a_1, \dots, a_r) \mid k \ge a_1 \ge \dots \ge a_r \ge$

$0\,\}$. Обозначим через $N^c_{ab}(r,k)=\sum_{d=0}^{\infty}N^{c,d}_{ab}(r,k)\,q^d$ структурные константы этой алгебры, т.е.

$$\sigma_a\cdot\sigma_b=\sum_{c\in\mathcal{P}_{r,k}}\sum_{d=0}^{\infty}N^{c,d}_{ab}(r,k)\,\sigma_c q^d.$$

Квантовое умножение становится однородным, если положить $\deg q=n$, $\deg\sigma_a=|a|:=a_1+\cdots+a_r$, т.е. $N^{c,d}_{ab}(r,k)$ не равно нулю только при $nd=|a|+|b|-|c|$. Если $d=0$, то $N^{c,d}_{ab}(r,k)$ совпадает с классическим коэффициентом Литтлвуда–Ричардсона N^c_{ab} (в частности, он не зависит от r и k). В [4] дан алгоритм вычисления $N^{c,d}_{ab}(r,k)$. Он реализован в [5].

Пусть $\bar{\mathcal{I}}=\{\,(r,k;a,b,c;d)\;\mid\;r+k=n,\;\;(a,b,c)\in\mathcal{P}^3_{r,k}\,\}$. Для $t=(r,k;a,b,c;d)\in\mathcal{I}$ обозначим $N^{c,d}_{ab}(r,k)$ через N_t. Положим $\mathcal{I}=\{t\in\bar{\mathcal{I}}\,|\,N_t=1\}$ и обозначим через $\mathcal{I}_0$ подмножество в $\mathcal{I}$, определяемое условием $d=0$.

При $t=(r,k;a,b,c;d)\in\mathcal{I}$ определим $H_t=H^{c,d}_{ab}(r,k)$ как полупространство в $\mathbb{R}^{3n}$, заданное неравенством $h_t(\alpha,\beta,\gamma)\ge 0$, где

$$h_t(\alpha,\beta,\gamma)=d+\sum_{i=1}^{r}\gamma_{k+i-c_i}-\sum_{i=1}^{r}\alpha_{k+i-a_i}-\sum_{i=1}^{r}\beta_{k+i-b_i},$$

Как обычно, мы рассматриваем элементы $a=(a_1,\dots,a_r)$ множества $\mathcal{P}_{r,k}$ как *диаграммы Юнга*, вписанные в прямоугольник $r\times k$, имеющий r строк (занумерованных сверху вниз) и k столбцов (занумерованных слева направо). Диаграмма Юнга a есть объединение a_1 самых левых клеток в первой строке, a_2 самых левых клеток во второй строке и т.д. Ее площадь равна $|a|$.

Пусть $\lambda: SU(n)\to\mathfrak{A}$, $\Lambda: SU(n)^2\to\Delta$, $\mathfrak{t}^+$ и $\mathcal{K}$ означают то же, что и во введении. Результаты Клячко и Агнихотри–Вудварда–Белкале, обсуждавшиеся во введении, можно сформулировать следующим образом:

$$\mathcal{K}=\mathfrak{t}^3_+\cap\Big(\bigcap_{t\in\mathcal{I}_0}H_t\Big),\qquad \Delta=\mathfrak{A}^3\cap\Big(\bigcap_{t\in\mathcal{I}}H_t\Big).$$

2. Действие группы G

Напомним, что $G=Z\times Z$, где через Z обозначен центр группы $SU(n)$. Обозначим через $\Omega:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ аффинно-линейное преобразование

$$\Omega(x_1,\dots,x_n)=(x_2,x_3,\dots,x_n,\,x_1-1)+(1/n,\,\dots,\,1/n).$$

Легко проверить, что $\mathfrak{A}=\bigcap_{j=0}^{n-1}\Omega^j(\mathfrak{t}_+)=\operatorname{conv}\{\,\Omega^j(\vec{0})\,|\,0\le j<n\}$. Действие группы G, о котором шла речь во введении, имеет вид

$$g(\alpha,\beta,\gamma)=\big(\Omega^i(\alpha),\Omega^j(\beta),\Omega^{i+j}(\gamma)\big)\qquad\text{при}\quad g=(\omega^i,\omega^j).$$

Ясно, что Δ инвариантно относительно G. Действительно, $AB=C$ эквивалентно $(\omega^iA)(\omega^jB)=\omega^{i+j}C$.

В [1; Sect. 8] показано, что это действие группы G на Δ согласовано с действием группы G на $\mathcal{I}$, которое мы сейчас опишем. Из квантовой формулы Пьери (см. [3]) следует, что

$$\sigma_k\sigma_a = \begin{cases} \sigma_{k,a_1,\dots,a_{r-1}}, & a_r = 0, \\ q\sigma_{a_1-1,\dots,a_r-1}, & a_r \neq 0. \end{cases}$$

Значит, при всех $a, b, c \in \mathcal{P}_{r,k}$ и $i, j \in \mathbb{Z}$ мы имеем

$$\sigma_k^i\sigma_a = \sigma_{a'}q^{d'_a}, \quad \sigma_k^j\sigma_b = \sigma_{b'}q^{d'_b}, \quad \sigma_k^{i+j}\sigma_c = \sigma_{c'}q^{d'_c}$$

для некоторых $d'_a, d'_b, d'_c \geq 0$ и $a', b', c' \in \mathcal{P}_{r,k}$, однозначно определяемых по a, b, c и i, j. Поэтому для $t = (r, k; a, b, c; d)$ и $t' = (r, k; a', b', c'; d')$, где $d' = d + d'_c - d'_a - d'_b$, мы имеем $N_t = N_{t'}$. Другими словами, квантовые коэффициенты Литтлвуда – Ричардсона симметричны относительно действия группы G на $\bar{\mathcal{I}}$, имеющего вид $gt = t'$ при $g = (\omega^i, \omega^j)$ (это действие корректно определено, поскольку $\sigma_k^n = q^k$). В частности, $\mathcal{I}$ инвариантно относительно G. Как показано в [1], эти два действия группы G (на $\mathcal{I}$ и на Δ) согласованы, т.е. $gH_t = H_{gt}$.

3. Симметрии многогранника Δ, оставляющие $\mathcal{K}$ инвариантным

Действие любого нетривиального элемента $g \in G$ таково, что $g\mathcal{K} \neq \mathcal{K}$. Имеются также очевидные симметрии, общие для Δ и $\mathcal{K}$.

Поскольку $AB = C \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} = C^{-1}$ и $A + B = C \Leftrightarrow (-A) + (-B) = -C$, и Δ, и $\mathcal{K}$ инвариантны относительно инволюции $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^* = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1)$. При $t \in \bar{\mathcal{I}}$ обозначим образ полупространства H_t при отображении $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ через H_t^*. Это действие на гипергранях многогранника Δ соответствует следующей симметрии (квантовых) коэффициентов Литтлвуда – Ричардсона, возникающей вследствие изоморфизма между $G_r(\mathbb{C}^n)$ и $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Обозначим через $t \mapsto t^*$ инволюцию $\bar{\mathcal{I}} \to \bar{\mathcal{I}}$

$$(r, k;\ a, b, c;\ d)^* = (k, r; a^*, b^*, c^*; d),$$

где

$$(a_1, \dots, a_r)^* = (a_1^*, \dots, a_k^*), \qquad a_i^* = \max\{j \mid a_j \geq i\}$$

(диаграммы Юнга a и a^* симметричны относительно главной диагонали). Для любого $t \in \bar{\mathcal{I}}$ имеет место $N_t = N_{t^*}$ и $H_t^* = H_{t^*}$.

При $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{P}_{r,k}$ положим $\bar{a} = (k - a_r, \dots, k - a_1)$. Тогда $\bar{\mathcal{I}}$ инвариантно относительно $t \mapsto (r, k;\ b, a, c;\ d)$ и $t \mapsto (r, k;\ b, \bar{c}, \bar{a};\ d)$ (коммутативность и двойственность Пуанкаре). Эти симметрии отвечают очевидным симметриям многогранника Δ, возникающим из-за того, что $AB \sim BA$ и $AB = C \Leftrightarrow BC^{-1} = A^{-1}$.

Пусть G_0 — группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{3n}$, порожденная всеми симметриями, обсуждаемыми в данном пункте, и пусть $\tilde{G}$ — группа аффинных преобразований, порожденная группами G и G_0. Ясно, что $|G_0| = 12$ и $|\tilde{G}| = 12n^2$.

4. Результаты

Предложение 1. *Если* $n \leq 14$, *то* $\mathcal{I} = G\mathcal{I}_0 = \bigcup_G g\mathcal{I}_0$. *В частности,* $\Delta = \Delta_{\mathcal{K}}$.

Предложение 2. *Если* $n = 15$, *то* $\mathcal{I} = G\mathcal{I}_0 \cup \tilde{G}t_0$ *и* $t_0 \notin G\mathcal{I}_0$, *где*

$$t_0 = (6, 9;\ 663300, 663300, 666300;\ 1).$$

В частности, $\Delta = \Delta_{\mathcal{K}} \cap \big(\bigcap_{\tilde{G}} gH_{t_0}\big)$.

Более того, $\Delta \neq \Delta_{\mathcal{K}}$, *в частности* $p = (\alpha, \beta, \gamma) \in (\Delta_{\mathcal{K}} \setminus H_{t_0}) \subset (\Delta_{\mathcal{K}} \setminus \Delta)$ *при*

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{17}\,(6, 6, 6, 6, 6,\ 0, 0, 0, 0, 0,\ -6, -6, -6, -6, -6),$$

$$\gamma = \tfrac{1}{17}\,(8, 8, 8,\ 1, 1, 1, 1, 1, 1,\ -3, -3, -3, -3,\ -9, -9).$$

Минимум функции h_{t_0} *на* $\Delta_{\mathcal{K}}$ *достигается в точке* p.

Следствие 3. *Если* $n \leq 15$, *то система неравенств* $h_t \geq 0$, $t \in \mathcal{I}$, *задающих* Δ, *минимальна, т.е. для любого* $t' \in \mathcal{I}$ *мы имеем*

$$\mathfrak{A}^3 \cap \Big(\bigcap_{t \in \mathcal{I} \setminus \{t'\}} H_t\Big) \neq \Delta$$

Доказательство. Следует из предложений 1 и 2, а также из результата Кнутсона, Тао и Вудварда [11] о минимальности системы неравенств $\{h_t \geq 0\}_{t \in \mathcal{I}_0}$, задающих $\mathcal{K}$. $\square$

Предложение 4. *Если* $n = 16$, *то* $\mathcal{I} = G\mathcal{I}_0 \cup \tilde{G}\mathcal{I}'$, *где*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}' = \{\, &(6, 10;\ 553300, 663300, 663300;\ 1),\\
&(7, 9;\ 5533000, 6633000, 6633000;\ 1),\ (7, 9;\ 5533300, 6633000, 6633300;\ 1),\\
&(7, 9;\ 5553000, 6443000, 6553000;\ 1),\ (7, 9;\ 6433300, 6633000, 6633300;\ 1),\\
&(8, 8;\ 44431000, 54441100, 54441100;\ 1),\ (8, 8;\ 44431000, 54442000, 54442000;\ 1),\\
&(8, 8;\ 44440000, 55441100, 55441100;\ 1),\ (8, 8;\ 44441000, 54441100, 55441100;\ 1),\\
&(8, 8;\ 44441100, 54431000, 54441100;\ 1),\ (8, 8;\ 44441100, 54441000, 55441100;\ 1),\\
&(8, 8;\ 44441100, 54441100, 55441110;\ 1)\,\}.
\end{aligned}$$

Мы не умеем «вручную» доказывать предложения 1, 2 и 4. Они получены в результате компьютерных вычислений. Для проверки предложения 1 мы использовали программу `lrcalc` (см. [5]). А именно, при помощи этой программы при $n \leq 14$ мы генерировали все элементы $t \in \mathcal{I}$ и для каждого t убеждались в том, что его орбита Gt (см. §2) содержит некоторый элемент, для которого $d = 0$.

Выполняя те же вычисления при $n = 15$, мы нашли элемент t_0, орбита которого не пересекается с $\mathcal{I}_0$. Единственная орбита группы $\tilde{G}$, не пересекающаяся с $\mathcal{I}_0$, это $\tilde{G}t_0$.

Для проверки того, что неравенство $h_{t_0} \geq 0$ не зависит от остальных, мы минимизировали (используя [13]) функцию h_{t_0} при ограничениях (1) и $h_t \circ g \geq 0$, $t \in \mathcal{I}_0$,

$g \in G$. Это 3 135 129 030 ограничений на 30 неизвестных (поскольку $a = b$ в t_0, можно положить $\alpha = \beta$). Мощности доступных нам компьютеров было недостаточно для «прямолинейного» решения данной задачи. Оставшаяся часть данного пункта посвящена описанию способа, при помощи которого мы сократили количество ограничений до 148 295.

Рассмотрим следующие диагональные 15×15 матрицы:

$$A = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,\,-1,\dots,-1),$$
$$B_1 = \mathrm{diag}(1,1,1,\,-1,\dots,-1,\,1,1),$$
$$B_2 = \mathrm{diag}(1,1,\,-1,\dots,-1,\,1,1,1).$$

Легко видеть, что

$$\lambda(A) = \lambda(B_1) = \lambda(B_2) = \tfrac{1}{2}(-1,-1,-1,-1,-1,\,0,0,0,0,0,\,1,1,1,1,1),$$
$$\lambda(AB_1) = \tfrac{1}{2}(-1,-1,\,0,\dots,0,\,1,1), \text{ и } \lambda(AB_2) = \tfrac{1}{2}(-1,-1,-1,\,0,\dots,0,\,1,1,1).$$

Пусть $p_i = \Lambda(A, B_i)$, $i = 1,2$. По определению, $p_1, p_2 \in \Delta$. Также имеют место равенства $h_{t_0}(p_1) = h_{t_0}(p_2) = 0$. Положим

$$\Delta' = \bigcap_{t \in \mathcal{I}'} H_t, \qquad \mathcal{I}' = \{t \in \mathcal{I} \mid t \neq t_0,\ h_t(p_1) = h_t(p_2) = 0\}$$

Лемма. *Если* $\min_{\Delta'} h_{t_0} < 0$, *то* $\Delta \neq \Delta_{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Предположим, что $\min_{\Delta'} h_{t_0} < 0$. Выберем $p' \in \Delta'$ так, что $h_{t_0}(p') < 0$. Положим $p_0 = (p_1 + p_2)/2$. Пусть $\mathcal{I}'' = \mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}' \cup \{t_0\})$ и $Q = [p', p_0] \cap \Big(\bigcap_{t \in \mathcal{I}''} \{h_t = 0\}\Big)$. При всех $t \in \mathcal{I}''$, значения функции h_t в p_1 и p_2 неотрицательны и по крайней мере одно из них положительно, следовательно, $h_t(p_0) > 0$. Поэтому $p_0 \notin Q$. Обозначим через q точку из Q, ближайшую к p_0. Тогда $h_t(q) \geq 0$ при всех $t \in \mathcal{I}''$. С другой стороны, $h_t(q) \geq 0$ при всех $t \in \mathcal{I}'$, потому что $q \subset \Delta'$. Таким образом, $q \in \Delta_{\mathcal{K}} \setminus \Delta$. $\square$

Итак, чтобы показать, что $\Delta \neq \Delta_{\mathcal{K}}$, достаточно найти минимум функции h_{t_0} только при ограничениях из $\mathcal{I}'$. Это множество более, чем в 30 000 меньше множества $\mathcal{I}$. Минимум достигается в точке $p = (\alpha, \beta, \gamma)$, о которой говорится в предложении 2 и при этом $h_{t_0}(p) = -\frac{1}{17} < 0$. Поэтому из леммы следует, что $\Delta_{\mathcal{K}} \neq \Delta$. Однако из этого еще не следует, что $\min_{\Delta_{\mathcal{K}}} h_{t_0} = \min_{\Delta} h_{t_0}$. Чтобы в этом убедиться, а также, чтобы гарантировать, что не возникло ошибок в результате приближенных вычислений, используемых в [13], мы проверили, что $p \in \Delta_{\mathcal{K}}$ (с использованием программы `lrcalc` это занимает всего несколько минут). А именно, мы убедились в том, что $h_t(p) < 0$ только при $t = t_0$, и что $h_t(p) = 0$ только в следующих случаях (с точностью до перестановки a и b):

(1) $r = 3$, $a = b = (8,4,0)$, $c = (9,0,0)$;
(2) $r = 5$, $a = (7,7,3,0,0)$, $b = (7,7,4,4,0)$, $c = (8,8,6,1,1)$;
(3) $r = 7$, $a = (5,5,2,2,0,0,0)$, $b = (6,6,6,3,3,0,0)$, $c = (5,5,5,5,3,0,0)$;
(4) $r = 7$, $a = (5,5,3,3,3,0,0)$, $b = (5,5,3,3,3,0,0)$, $c = (5,5,5,5,3,0,0)$;
(5) $r = 13$, $a^* = b^* = (9,5)$, $c^* = (11,2)$;

во всех этих случаях $d = 1$.

References

1. S. Agnihotri, C. Woodward, *Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus*, Math. Research Letters **5** (1998), 817–836.
2. P. Belkale, *Local systems on $\mathbb{P}^1 - S$ for S a finite set*, Compos. Math. **129** (2001), 67–86.
3. A. Bertram, *Quantum Schubert calculus*, Adv. Math., **128** (1997), 289–305.
4. A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, W. Fulton, *Quantum multiplication of Schur polynomials*, J. Algebra **219** (1999), 728–746.
5. A.S. Buch, `lrcalc` – *Littlewood-Richardson Calculator*, Software available on `http://home.imf.au.dk/~abuch/lrcalc` and on `http://www-math.mit.edu/~abuch/lrcalc`.
6. В.И. Данилов, Г.А. Кошевой, *Дискретная выпуклость и эрмитовы матрицы*, Труды мат. инст. им. В.А. Стеклова **241** (2003), 68–89.
7. W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (2000), 209–249.
8. A.A. Klyachko, *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), 419–445.
9. A. Knutson, T. Tao, *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 1055–1090.
10. A. Knutson, T. Tao, *Honeycombs and sums of Hermitian matrices*, Notices Amer. Math. Soc. **48** (2001), no. 2, 175–186.
11. A. Knutson, T. Tao, C. Woodward, *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products II: puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2003), 19–48.
12. S.Yu. Orevkov, *Quasipositivity test via unitary representations of braid groups and its application to real algebraic curves*, J. Knot Theory and Ramifications **10** (2001), 1005–1023.
13. S.Yu. Orevkov, Yu.P. Orevkov, *Simplex-method* (*linear programming*), Software available on `http://picard.ups-tlse.fr/~orevkov/simplex`.
14. T. Tao, *Open question: What is a quantum honeycomb?* `http://terrytao.wordpress.com/2007/04/19`.

Математический институт РАН им. В.А. Стеклова (Москва) и Лаборатория им. Эмиля Пикара, университет Тулуза-3

Экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова