Проективные коники и M-квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов

С.Ю.Оревков

Получена изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. Для запретов использована теория зацеплений (неравенство Мурасуги — Тристрама).

Настоящая работа продолжает исследование плоских вещественных приводимых кривых степени 7, начатое в [1–3]. В ней дается изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. Мы используем те же методы, что и в [4, 3]. При этом, как оказалось, случай коники и квинтики более "регулярен", чем случай кубики и квартики: все запреты удается доказать по одной схеме. То же относится и к построениям. Мы придерживаемся тех же обозначений, что и в [3], и часто будем опускать подробности, которые можно найти в [3].

Автор благодарит Г.М. Полотовского за полезные обсуждения. Автор благодарит математический институт им. Макса Планка за гостеприимство.

1. Формулировка результата. Ниже C_n обозначает множество вещественных точек M-кривой степени n на $\mathbb{R}P^2$. Напомним, что M-квинтика C_5 состоит из 7 гладких окружностей. Среди них 6 *овалов* (изотопны конике), расположенных вне друг друга, и одна *нечетная ветвь* J_5 (изотопна прямой). В данной работе мы всюду предполагаем, что один из овалов M-квинтики C_5 (обозначим его O_5) имеет 10 различных точек пересечения с коникой C_2. Тогда по теореме Безу все пересечения должны быть трансверсальными, и остальные 5 овалов не могут пересекаться с C_2 — мы будем называть эти овалы *свободными*.

Выбирая различными способами две точки в разных компонентах $\mathbb{R}P^2 \setminus (C_2 \cup C_5)$ и учитывая, что проходящая через эти точки прямая не может пересекать C_n более, чем в n точках, несложно проверить (см. [1, 2]), что с точностью до изотопии C_5 должна быть расположена относительно C_2 одним из 10 способов, изображенных на рис. 1, где нечетная ветвь J_5 не нарисована, и α, β — a priori произвольные неотрицательные целые числа, такие что $\alpha + \beta = 5$ (это количества свободных овалов в соответствующих областях).

Цель настоящей статьи в том, чтобы доказать, что реализуемы те и только те расположения, которые отвечают значениям α, перечисленным на рис. 1.

2. Построения. По аналогии с [3], расположения C_5 относительно C_2 (удовлетворяющие условиям, перечисленным в §1) мы будем кодировать следующим образом. Словом $w = \langle s_1 \dots s_n \rangle$, $s_k \in \{+,-\}$ будем кодировать расположение O_5 относительно C_2, составленное из блоков $B(s_1), \dots, B(s_n)$ в соответствии

Работа частично поддержана грантом 98-01-00794 РФФИ

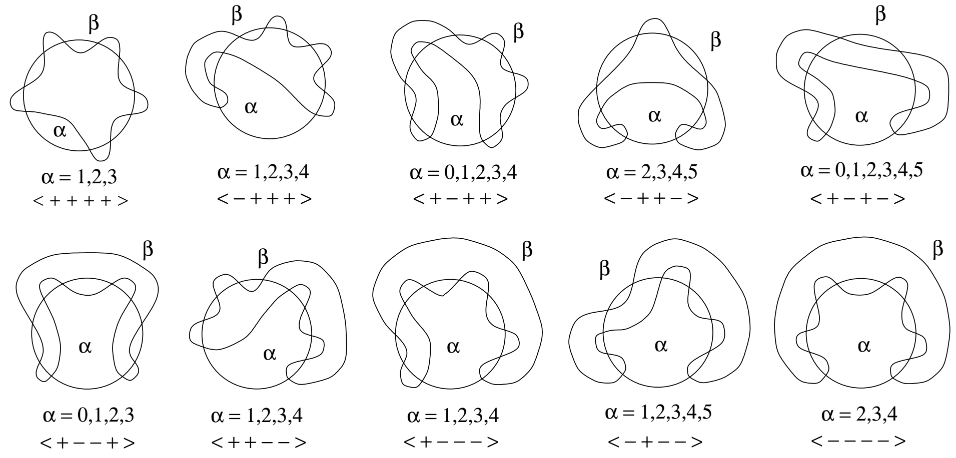

Рис. 1

с рис. 2.1; блоки $B(+)$ и $B(-)$ см. на рис. 2.2. Параметр α будем указывать в фигурных скобках после слова w.

Все реализуемые расположения строятся сглаживанием подходящих особых кривых. Обозначим через $2n\{\alpha\}$, $n = 0, 1, 2$, $\alpha = 0, 1$, расположение особой трехкомпонентной квинтики относительно коники C_2, изображенное на рис. 2.3: квинтика имеет две особые точки типов A_{2n}, A_{8-2n} (по соглашению, A_0 — гладкая точка), лежащие на одной четной ветви, и свободный овал квинтики расположен внутри C_2 при $\alpha = 1$ и снаружи при $\alpha = 0$.

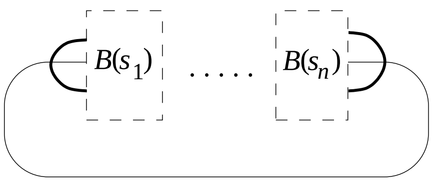

Рис. 2.1

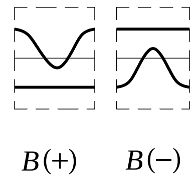

Рис. 2.2

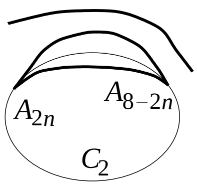

Рис. 2.3

Лемма. *Все шесть расположений $2n\{\alpha\}$, $n = 0, 1, 2$, $\alpha = 0, 1$, реализуемы алгебраическими кривыми.*

Доказательство. Если кривая C в точке p неособа и не имеет перегиба, то обозначим через $f_{C,p}$ квадратичное бирациональное преобразование $(u, v) \mapsto (u, v-u^2)$, где (u, v) — аффинная карта, в которой бесконечно удаленная прямая касается C в точке p, причем C имеет возле p разложение $v = u^2 + O(u)$, $u \to \infty$.

$0\{\alpha\}$ и $2\{\alpha\}$. Пусть $Q := L^2L_0^2 + \varepsilon l_1 l_2 l_3 l_4$, где $|\varepsilon| \ll 1$, — каспидальная трехкомпонентная квартика, и p, q — ее точки касания с двумя из прямых l_i (см. рис. 3.1, 3.2) Тогда $f_{Q,p}(Q) \cup f_{Q,p}(L)$ реализует расположение $0\{1\}$ в случае 3.1 и $0\{0\}$ в случае 3.2, а $f_{Q,q}(Q) \cup f_{Q,q}(L)$ реализует расположение $2\{0\}$ в случае 3.1 и $2\{1\}$ в случае 3.2.

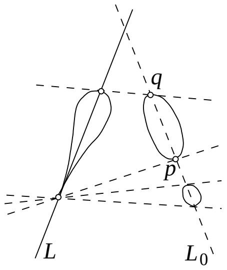

Рис. 3.1

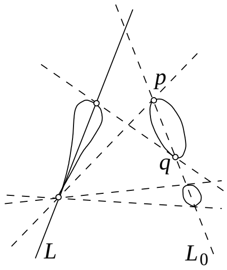

Рис. 3.2

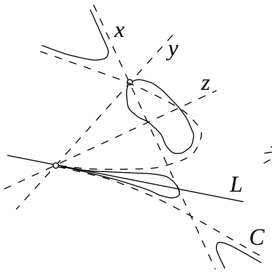

Рис. 3.3

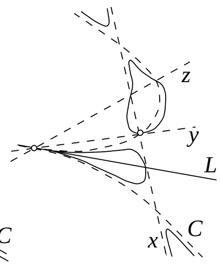

Рис. 3.4

$4\{\alpha\}$. Пусть C — каспидальная кубика, расположенная относительно координатных осей, как показано на рис. 3.3, 3.4, и $Q := xC + \varepsilon yzL^2$ — каспидальная квартика. Пусть hy — гиперболизм, т.е. бирациональное преобразование $\mathrm{hy}(x:y:z) = (x^2 : xy : yz)$. Тогда $\mathrm{hy}(Q) \cup \mathrm{hy}(L)$ реализует расположение $4\{1\}$ в случае 3.3 и $4\{0\}$ в случае 3.4.

В [3] показано, что для любого выбора знаков $s_1, \dots, s_n$, $s'_1, \dots, s'_{4-n}$ существует возмущение кривой $2n\{\alpha\}$, вида $<s_1 \dots s_n s'_{4-n} \dots s'_1>\{\alpha + \alpha_0\}$, где α_0 — число плюсов в последовательности $-s_1, s_2, \dots, (-1)^n s_n, (-1)^n s'_{4-n}, \dots, s'_2, -s'_1$. Несложно проверить, что это дает все расположения на рис. 1.

Замечание. Четыре расположения <++++>$\{\alpha\}$ <---->$\{\alpha+1\}$, $\alpha = 2, 3$ можно построить элементарно: надо в качестве C_5 взять подходящее возмущение двух коник (одна из них будет C_2) и прямой.

3. Запреты. Нереализованные выше значения α для случая <++++> запрещены методом комплексных ориентаций ([1, VII]; см. также [3, 3.1]). Во всех других случаях найдется точка p, лежащая в области α в выпуклой оболочке овала O_5 и, следовательно, вне свободных овалов квинтики (ср. с проекцией III в [3, 3.2.4]). Выберем аффинные координаты (x, y), в которых p — бесконечно удаленная точка прямых $x = \mathrm{cosnt}$ и бесконечно удаленная прямая в 5 точках пересекает O_5. Тогда C_2, O_5 и J_5 расположены относительно этих координат, как показано на рис. 4, где блоки $B(s_i)$ те же, что на рис. 2.2.

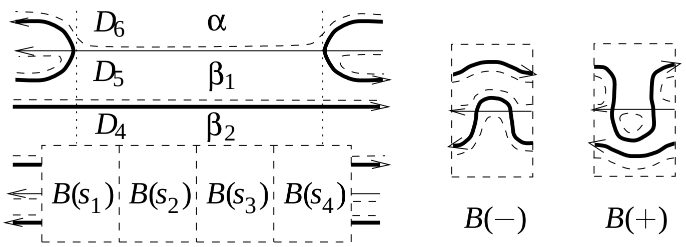

Рис. 4

Поскольку вертикальная прямая не может пересекать C_5 более, чем в 5 точках, свободные овалы квинтики должны лежать в полосе между вертикальными касательными к O_5 (обозначим ее через D). Пусть D_4, D_5, D_6 — три верхние компоненты связности множества $D \setminus (C_2 \cup O_5)$ (см. рис. 4). Тогда α овалов лежат в D_6 и β овалов — в $D_5 \cup D_4$. Занумеруем свободные овалы квинтики слева направо, и пусть D_{i_j} — полоса, в которой лежит j-й овал, $j = 1, \dots, 5$. Положим $\delta\alpha = \sum_{i_j=6}(-1)^j$, $\delta\beta_k = \sum_{i_j=6-k}(-1)^j$, $k = 1, 2$.

Из формулы комплексных ориентаций для C_5 (см. [5]) и теоремы Фидлера о чередовании ориентаций [6] следует, что

$$\delta\alpha + \delta\beta_1 - \delta\beta_2 = 0. \tag{1}$$

Выберем комплексные ориентации на C_2 и C_5 так, чтобы C_2 и O_5 были ориентированы противоположно относительно J_5. Пусть F — кривая степени 7, получающаяся из $C_2 \cup C_5$ сглаживанием двойных точек в соответствии с выбранными ориентациями (изображена пунктиром на рис. 4). Тогда число овалов кривой F равно $2P + 7$, где P — число плюсов в слове $<s_1 s_2 s_3 s_4>$, кодирующем рассматриваемое расположение $C_2 \cup O_5$. Поэтому формула комплексных ориентаций для F дает

$$\varepsilon((1 + 2\varepsilon)\delta\alpha + \delta\beta_1 - \delta\beta_2) = 2P - 5, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ — знак овала O_5 относительно нечетной ветви J_5. Добавляя к (1), (2) очевидное соотношение $\delta\alpha + \delta\beta_1 + \delta\beta_2 = -1$ и решая получившуюся систему уравнений, находим:

$$\delta\alpha = q - 2, \quad \delta\beta_1 = 1 - q, \quad \delta\beta_2 = 0, \qquad \text{где} \quad q = P + (\varepsilon - 1)/2. \tag{3}$$

Для расположений $<s_1 s_2 s_3 s_4>\{\alpha\}$, не реализованных в §2, все наборы чисел $i_1 \dots i_5$, для которых существует $\varepsilon = \pm 1$, при котором выполнены соотношения (3), таковы:[1]

<-+++>{0}	<-++->{1}	<-++->{0}	<+--+>{4}	<++-->{5}	<++++>{0}
<--++>{0}				<+--+>{5}	<++++>{4}
				<+--->{5}	<++++>{5}
44445	44446				<+++->{5}
44544	44556				<++-+>{5}
44555	44644				<+--->{0}
45545	44655				<-+-->{0}
54444	45546	44445			<---->{0}
54455	45645	44544			<---->{1}
54554	54456	44555			<---->{5}
55445	55446	45545			
55544	55556	54455	56666		нет
55555	55655	55555	66566	66666	решений

(В столбцах 2–4 учтена симметричность слов <-++->, <+--+>.) Проверяя для каждого из перечисленных 41 случев неравенство Мурасуги — Тристрама так, как это было сделано в [3], убеждаемся, что все они нереализуемы.

[1] Последней колонке этой таблицы отвечают расположения, запрещенные в [1, VII] методом комплексных ориентаций. В частности, мы видим, что в [1] на рис. 16 была опечатка: вместо $\alpha \neq 2$ для 5-й модели должно быть $\alpha \neq 5$ для 2-й модели.

Список литературы

1. Polotovskii G.M., *On the classification of decomposing plane real algebraic curves*, Lect.Notes in Math. **1524** (1992), 52–74.
2. Polotovskii G.M., *On the classification of decomposable 7-th degree curves*, Contemp. Math. (1999) (to appear).
3. Оревков С.Ю., Полотовский Г.М., *Проективные M-кубики и M-квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов*, Алгебра и анализ (представлено к публикации).
4. Orevkov S.Yu., *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology (to appear).
5. Рохлин В.А., *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых*, Успехи Матем. Наук **33:5** (1978), 77–89.
6. Фидлер Т., *Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых*, Изв. АН СССР, сер. мат. **46** (1982), 853–863.

Математический Институт РАН им.В.А.Стеклова
E-mail address: orevkov@mi.ras.ru