

## ОДИН ПРИМЕР В СВЯЗИ С ГИПОТЕЗОЙ О ЯКОБИАНЕ

С. Ю. Оревков

**Введение.** Пусть  $F$  и  $G$  — многочлены от двух комплексных переменных  $x$  и  $y$ . Известная гипотеза о якобиане состоит в том, что если  $F_x G_y - F_y G_x = \text{const} \neq 0$ , то многочлены  $F$  и  $G$  задают обратимое отображение  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  (см., например, [1]). В этом случае легко доказать, что обратное отображение тоже полиномиально.

Гипотезу о якобиане можно переформулировать следующим образом. Пусть  $l$  — бесконечно удаленная прямая в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ,  $U$  — ее трубчатая окрестность (внешность большого шара в  $\mathbb{C}^2$ ), и  $f_1, f_2$  — мероморфные на  $U$  функции, голоморфные на  $U - l$  и задающие локально взаимно однозначное отображение  $f: U - l \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Тогда гипотеза о якобиане эквивалентна инъективности этого отображения. Действительно, функции  $f_1$  и  $f_2$  по теореме о стирании компактных особенностей продолжаются до голоморфных функций на всем  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 - l$ . Из мероморфности этих функций на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  и голоморфности на  $\mathbb{C}^2$  следует их полиномиальность, а из того, что якобиан не обращается в нуль вне некоторого шара, следует, что он не обращается в нуль на всем  $\mathbb{C}^2$ .

Если при помощи  $\sigma$ -процессов разрешить точки неопределенности отображения  $f$ , то мероморфность исходного отображения дает довольно сильные ограничения на топологию получившейся поверхности и ее отображения. При этом образ кривой ветвления — бесконечно удаленная прямая и несколько рациональных кривых, каждая с одной ветвью на бесконечности.

Сформулируем основной результат настоящей заметки (его доказательству посвящен § 1).

**Предложение 0. 1.** *Существует гладкая (некомпактная) комплексно-аналитическая поверхность  $X$ , на ней гладкая кривая  $L$ , изоморфная  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , с индексом самопересечения  $+1$ , и две функции  $f_1, f_2$ , мероморфные на  $X$  и голоморфные на  $X - L$ , такие, что отображение  $f: X - L \rightarrow \mathbb{C}^2$ , задаваемое этими функциями, локально взаимно однозначно, но не инъективно.*

Ясно, что если  $\tilde{U}$  — трубчатая окрестность кривой  $L$ , а  $U$  — трубчатая окрестность прямой  $l$  на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , то пары  $(\tilde{U}, L)$  и  $(U, l)$

$C^\infty$ -диффеоморфны. Тем самым существует гладкое погружение в  $\mathbb{C}^2$  внешности некоторого шара, которое по геометрическим свойствам похоже на полиномиальное отображение, и необратимо. Если бы пары  $(\bar{U}, \bar{L})$  и  $(U, l)$  были биголоморфно эквивалентны, то, как указывалось выше, получился бы контрпример к гипотезе о якобиане.

С другой стороны, если бы ограничение отображения  $f$  на границу  $\bar{S}$  трубчатой окрестности кривой  $\bar{L}$  (ясно, что  $\bar{S}$  — трехмерная сфера, и  $f|_{\bar{S}}$  — погружение) продолжалось до погружения четырехмерного шара  $B^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , то очевидно, что на  $B^4 \cup_{\bar{S}} \bar{U}$  можно было бы поднять аналитическую структуру так, чтобы получилась гладкая компактная аналитическая поверхность, содержащая гладкую рациональную кривую с индексом самопересечения  $+1$ , дополнение  $D$  к которой гомеоморфно  $\mathbb{R}^4$ . Как показано в [2, с. 85], в этом случае  $D$  было бы изоморфно  $\mathbb{C}^2$ , и, значит, опять получился бы контрпример к гипотезе о якобиане.

Можно проверить, что степень гауссова отображения  $\bar{S}$  в сферу, полученного из погружения  $f|_{\bar{S}}$ , не равна единице. Поэтому отображение, построенное в настоящей заметке, нельзя продолжить до отображения, дающего контрпример к гипотезе о якобиане. Тот факт, что это отображение не продолжается до контрпримера, является также непосредственным следствием леммы 4.2 из [3].

В § 2 при помощи теоремы Кодаиры [4] показано, что гладкая компактная рациональная кривая с положительным индексом самопересечения на гладкой аналитической поверхности (в частности, кривая  $\bar{L}$  в построенном примере) обладает сколь угодно малой строго псевдогогнутой трубчатой окрестностью. В качестве такой окрестности можно взять объединение кривых, соответствующих точкам достаточно малого шара в многообразии рациональных кривых на данной поверхности. Этот факт, по-видимому, имеет самостоятельный интерес.

### § 1. Построение примера

**1.1. Построение образа кривой ветвления.** Рассмотрим кривую  $K$  в  $\mathbb{C}^2$ , параметризованную многочленами

$$P(t) = t^{21} + 6t^{14} + \frac{63}{2}t^{12} + \frac{63}{4}t^{11} - \frac{63}{2}t^{10} - \frac{63}{2}t^9 - \frac{39}{2}t^7 + \\ + 63t^5 + \frac{63}{2}t^4 + \frac{819}{8}t^3 + \frac{819}{8}t^2 - \frac{9261}{32}t - \frac{4409}{8},$$

$$Q(t) = t^{14} + 4t^7 + 21t^5 + \frac{21}{2}t^4 - 21t^3 - 21t^2 - 17.$$

Эти многочлены удовлетворяют соотношениям

$$\deg_t \left( P(t)^2 - Q(t)^3 + \frac{9261}{16} Q(t) \right) = 13, \quad (1)$$

$$\text{н. о. д. } (P', Q') = 1. \quad (2)$$

Пусть  $X$  — компактификация  $\mathbb{C}^2$ , в которой кривая  $K$  не имеет особенностей на бесконечности, т. е.  $X$  — гладкая компактная алгебраическая поверхность, содержащая (приводимую) кривую  $L$  такую, что  $X - L \cong \mathbb{C}^2$ , и замыкание  $k$  кривой  $K$  трансверсально пересекает кривую  $L$  в единственной точке  $p_\infty$ , которая является гладкой точкой как на  $k$ , так и на  $L$ .

Пару  $(Y, A)$ , где  $A$  — кривая на гладкой комплексно-аналитической поверхности  $Y$ , назовем правильной, если все неприводимые компоненты кривой  $A$  — гладкие компактные рациональные кривые, пересекающиеся трансверсально и не более, чем попарно. Каждой правильной паре сопоставим двойственный взвешенный граф. Вершины этого графа соответствуют неприводимым компонентам, а ребра — точкам пересечения соответствующих компонент. Вес вершины — минус индекс самопересечения соответствующей компоненты. Знаки выбраны так для того, чтобы определитель матрицы пересечения не изменялся при раздутии точки на

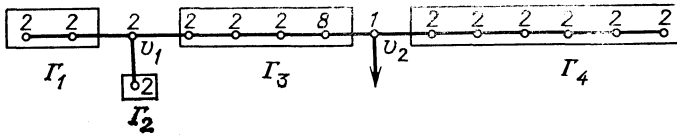


Рис. 1

этой кривой. Если ясно, о какой поверхности идет речь, мы будем говорить просто о двойственном графе кривой.

Пусть  $\Gamma$  — двойственный взвешенный граф пары  $(X, L)$ . В силу (1) он устроен, как на рис. 1 (ребро со стрелкой отвечает точке  $p_\infty$ ).

**1.2. Общее описание примера.** Мы построим правильную пару  $(\tilde{X}, \tilde{L})$  с двойственным графом, изображенным на рис. 2, и голоморфное отображение  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  такое, что ограничение  $f$  на  $\tilde{X} - \tilde{L}$  локально взаимно однозначно,  $f(\tilde{X} - \tilde{L}) \subset X - L$ , и  $f(\tilde{L}) \subset \subset L \cup k$ . Это и будет доказательством предложения 0.1. Действительно, если какая-то неприводимая компонента кривой  $\tilde{L}$  имеет индекс самопересечения  $-1$  и пересекает не более двух других компонент кривой  $\tilde{L}$ , то ее можно стянуть в точку, и при этом опять получится правильная пара. Чтобы получить ее двойственный граф, надо с  $\tilde{\Gamma}$  произвести следующие действия: выбрать произвольную вершину  $v$  с весом 1, из которой выходит не более двух ребер; удалить вершину  $v$  и выходящие из нее ребра; если из вершины  $v$  вышло два ребра  $vu_1$  и  $vu_2$ , то добавить ребро  $u_1u_2$ ; уменьшить веса соседних с  $v$  вершин на единицу.!

Легко проверить, что выполняя описанную процедуру до тех пор, пока не кончатся вершины с весом 1, мы из графа  $\Gamma$  после 279 стягиваний получим линейный граф с весами  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, -1)$ . Этот граф можно при помощи раздутий и стягиваний превратить в граф, состоящий из единственной вершины с весом

—1 (см. [2, лемма 5], в этом также несложно убедиться непосредственно). Ясно, что получившаяся правильная пара удовлетворяет требованиям предложения 0.1.

Чтобы построить  $X$  и  $f$ , мы выберем вокруг каждой неприводимой компоненты  $l$  кривой  $L$  трубчатую окрестность  $U(l)$  так, чтобы  $U(l)$  пересекалась с  $U(l')$  только тогда, когда  $l$  пересекается

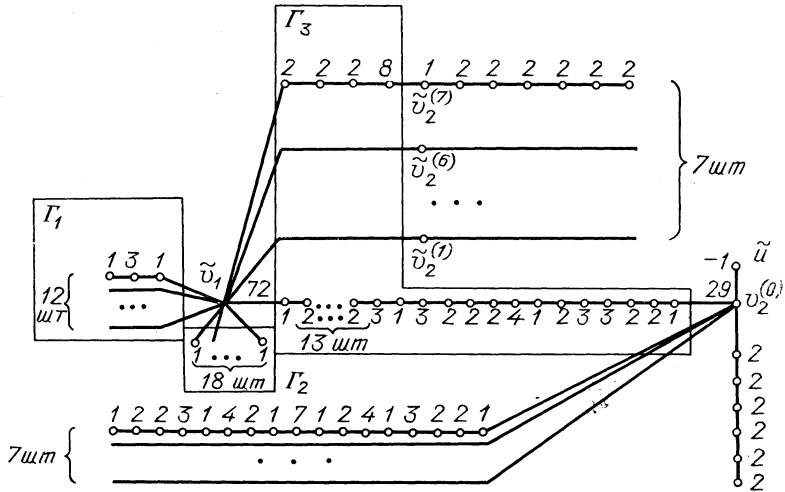


Рис. 2

с  $l'$ , и в этом случае пересечение являлось бы биглиндриком с центром  $l \cap l'$ . Пусть  $v: k^* \rightarrow k$  — нормализация кривой  $k$ . В силу (2)  $v$  является погружением. Поэтому существуют трубчатая окрестность  $U^*$  нулевого сечения некоторого линейного расслоения  $E^* \rightarrow k^*$  и погружение  $v^*: U^* \rightarrow X$  такое, что  $v^*|_{k^*} = v$  (мы будем отождествлять  $k^*$  с нулевым сечением в  $E^*$ ). Пусть  $U(k) = v^*(U^*)$  и  $U = \bigcup_{l < L} U(l)$  ( $l < L$  означает:  $l$  — неприводимая компонента кривой  $L$ ). Для подграфов  $\Gamma_i$  графа  $\Gamma$  (см. рис. 1) положим  $U(\Gamma_i) = \bigcup_{l < L_i} U(l)$ , где через  $L_i$  обозначено объединение неприводимых компонент, соответствующих вершинам графа  $\Gamma_i$ . Пусть  $l_1, l_2$  — кривые, соответствующие вершинам  $v_1, v_2$  (см. рис. 1).

Мы будем строить поверхность  $X$  и отображение  $f: X \rightarrow X$  отдельно над каждым из множеств  $U(k), U(l_1), U(l_2), U(\Gamma_1), \dots, U(\Gamma_d)$ , а потом докажем согласованность на пересечениях. При этом над множеством  $U$  отображение  $f$  будет разветвленным накрытием с ветвлением над  $L \cup k$ .

**1.3. Построение накрытий над  $U(\Gamma_i)$ .** Пусть  $A = (a_{ij})$  — целочисленная  $2 \times n$ -матрица такая, что  $\det(A(i, j)) > 0$  при  $i < j$  (через  $A(i, j)$  мы обозначаем  $2 \times 2$ -подматрицу матрицы  $A$ , составленную из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов). Обозначим через  $\Sigma(A)$  веер

в  $\mathbb{R}^2$ , одномерные конусы которого порождены столбцами матрицы  $A$ , а двумерные — парами соседних столбцов. Через  $X(A)$  обозначим соответствующее двумерное торическое многообразие. Оно гладкое, если все  $\det(A(i, i+1)) = 1$  (см. [5]).

**ЛЕММА 1.3.1.** Пусть  $A = (a_{ij})$  — целочисленная  $2 \times n$ -матрица такая, что  $\det(A(i, i+1)) = 1$  при  $i = 1, \dots, n-1$ , и пусть  $l$  — замыкание одномерной орбиты многообразия  $X(A)$ , соответствующей  $i$ -му столбцу. Тогда если  $1 < i < n$ , то  $l$  компактна, и ее индекс самопересечения равен  $-\det(A(i-1, i+1))$ .

При помощи леммы 1.3.1 легко построить такую матрицу  $A$ , что двойственный граф объединения компактных орбит многообразия  $X(A)$  изоморфен данному линейному взвешенному графу. Пусть  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — такие матрицы для графов  $\Gamma_i$  и  $X_i = X(A_i)$ . Из жесткости торических особенностей [6] легко вывести, что  $L_i$  можно отождествить с объединением компактных орбит многообразия  $X(A_i)$ , а  $U(\Gamma_i)$  — с его окрестностью.

Для каждого  $i = 1, \dots, 4$  рассмотрим линейное отображение  $V_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , заданное матрицей, составленной из первого и последнего столбцов матрицы  $A_i$ , и пусть  $\tilde{\Sigma}_i$  — каноническое разбиение веера  $V_i^{-1}(\Sigma_i)$  на примитивные (т. е. порожденные базами целочисленной решетки) конусы (см. [5, 8.4]). Непосредственно проверяется, что если  $\sigma$  — один из двух крайних двумерных конусов веера  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), то  $V_i^{-1}(\sigma)$  — примитивный конус. Из этого факта, а также из координатного описания торических многообразий и отображений [7] следует

**ЛЕММА 1.3.2.** Пусть  $p$  — нульмерная орбита в  $X(\Sigma_i)$ , соответствующая одному из крайних конусов веера,  $Y_i$  — объединение компактных одномерных орбит, и  $\beta_i$  — торическое отображение, ассоциированное с  $V_i$ . Тогда  $\beta_i|_{V_i^{-1}(V)}$  для некоторой окрестности  $V$

точки  $p$  является циклическим накрытием степени  $\det V_i$ , разветвленным над  $V \cap Y$ .

Пусть  $\tilde{X}_1 = 12X(\tilde{\Sigma}_1)$ ,  $\tilde{X}_2 = 18X(\tilde{\Sigma}_2)$ ,  $\tilde{X}_3 = X(\tilde{\Sigma}_3) \sqcup 7X_3$ ,  $\tilde{X}_4 = 7X(\tilde{\Sigma}_4) \sqcup 8X_4$ . ( $nX$  обозначает дизъюнктное объединение  $n$  экземпляров пространства  $X$ ), и пусть  $f_i: \tilde{X}_i \rightarrow X_i$  — отображение, ограничение которого на компоненты — либо тождественные отображения, либо отображения  $\beta_i$ . Положим  $\tilde{U}(\Gamma_i) = f_i^{-1}(U(\Gamma_i))$ ,  $\tilde{L}_i = f_i^{-1}(L_i)$ . Непосредственные вычисления показывают, что имеет место

**ЛЕММА 1.3.3.** Двойственный граф пары  $(X_i, L_i)$  изоморфен (учитывая веса) графу  $\tilde{\Gamma}_i$  (см. рис. 2: там обозначены некоторые вершины и подграфы; подграф, натянутый на все остальное, —  $\tilde{\Gamma}_4$ ).

**1.4. Построение накрытий над  $U(l_i)$ .** Пусть  $i = 1$  или  $2$ ,  $D_i = U(l_i) \cap ((L \cup k) - l_i)$ . Это объединение трех двумерных дисков, трансверсально пересекающихся  $l_i$ . Поэтому  $U(l_i) - D_i$  гомотопически эквивалентно двумерной сфере с тремя проколами;  $m$ -листные накрытия множества  $U(l_i)$  (необязательно связанные),

разветвленные над  $D_i$ , задаются гомоморфизмом фундаментальной группы  $G_i = \pi_1(U(l_i) - D_i)$  в группу  $S(m)$  перестановок из  $m$  элементов.

Обозначим через  $a_1, b_1, c_1$  образующие группы  $G_1$ , отвечающие обходам вокруг  $L_1, L_2, L_3$ , а через  $a_2, b_2, c_2$  — образующие группы  $G_2$ , отвечающие обходам вокруг  $L_3, L_4, k$ . Эти элементы удовлетворяют единственным соотношениям  $a_i b_i c_i = 1$ .

Пусть  $\varphi_i: G_i \rightarrow S(36)$  — гомоморфизмы такие, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_1) = & (2\ 3\ 30)(5\ 6\ 31)(10\ 11\ 32)(13\ 14\ 33)(18\ 19\ 34) \\ & (22\ 23\ 35)(25\ 26\ 36)(1\ 7\ 4)(9\ 15\ 12)(17\ 28\ 20) \\ & (21\ 27\ 24)(8\ 29\ 16), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(b_1) = & (2\ 4)(5\ 7)(10\ 12)(13\ 15)(18\ 20)(22\ 24)(25\ 27)(3\ 30) \\ & (6\ 31)(11\ 32)(14\ 33)(19\ 34)(23\ 35)(26\ 36)(1\ 8)(9\ 16) \\ & (17\ 29)(21\ 28), \end{aligned}$$

$$\varphi_1(c_1) = \varphi_2(a_2) = (1\ 2\ 3 \dots 28\ 29),$$

$$\varphi_2(b_2) = (28\ 27 \dots 22)(21 \dots 15)(14 \dots 8)(7 \dots 1),$$

$$\varphi_2(c_2) = (29\ 22\ 15\ 8\ 1),$$

$$\varphi_i(a_i) \varphi_i(b_i) \varphi_i(c_i) = 1^1).$$

Следовательно, эти гомоморфизмы определены корректно. Пусть  $g_i: \tilde{U}(l_i) \rightarrow U(l_i)$  — 36-листное накрытие, разветвленное над  $D_i$ , отвечающее гомоморфизму  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ). Кривая  $g_1^{-1}(l_1)$  связна (на рис. 2 ей соответствует вершина  $\tilde{v}_1$ ), а  $g_2^{-1}(l_2)$  распадается на 8 непересекающихся кривых (вершины  $\tilde{v}_2^{(i)}$ ). На кривой, соответствующей  $\tilde{v}_2^{(0)}$  (и в ее окрестности), отображение  $g_2$  29-листно, а в окрестности других — однолистно.

### 1.5. Построение отображения над $U(k)$ .

**ЛЕММА 1.5.**  $k^* \cdot k^* = 5$ .

**С л е д с т в и е.** *Существует циклическое 5-листное накрытие  $\tau: \tilde{U}(k) \rightarrow U^*$ , разветвленное над  $k^*$ .*

Пусть  $h = \nu^* \tau$ ,  $\tilde{k} = \tau^{-1}(k^*) = h^{-1}(k)$  (на рис. 2 кривой  $\tilde{k}$  соответствует вершина  $\tilde{y}$ ).

**Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1.5.** Неприводимые компоненты кривой  $L$  образуют базис в  $\text{Pic } X$ . Поскольку известны индексы пересечения базисных элементов друг с другом и с дивизором  $k$ , можно найти разложение дивизора  $k$  по этому базису и его индекс самопересечения:  $k \cdot k = 91$ . Написав формулу присоединения для каждого элемента базиса, получаем систему линейных уравнений, из которой находится разложение канонического класса поверхности  $X$  по этому базису. После этого можно вычислить арифметический род  $\rho_a(k) = 43$ . В силу (2) все особые точки кривой  $k$  являются простыми двойными. Известно, что ариф-

<sup>1)</sup> Мы записываем произведение перестановок как композицию отображений «справа налево», т. е.  $(12) \cdot (23) = (123)$ .

метрический род таких кривых больше рода нормализации на количество двойных точек. Следовательно,  $\pi_a(k) = d$ , где  $d$  — количество двойных точек кривой  $k$ . Остается доказать, что  $k \cdot k = k^* \cdot k^* + 2d$ . Действительно, выберем близкое к нулевому  $C^\infty$ -сечение расслоения  $E^*$ , образ  $k_1^*$  которого лежит в  $U^*$  и трансверсально пересекает  $k^*$  (напомним, что  $k^*$  — образ нулевого сечения  $E^*$ ) в точках, отличных от прообразов особых точек при отображении  $\nu$ . Тогда  $k \cdot k = \# k \cap \nu(k_1^*) = \# k^* \cap k_1^* + 2d = k^* \cdot k^* + 2d$ . Лемма доказана.

**1.6. Склеивание нестренных отображений (завершение доказательства предложения 0.1).** Поверхность  $X$  и отображение  $f: \tilde{X} \rightarrow X$ , о которых говорится в предложении 0.1, мы склеим из поверхностей  $\tilde{U}(\Gamma_i)$  (см. 1.3),  $\tilde{U}(l_i)$  (см. 1.4),  $\tilde{U}(k)$  (см. 1.5) и отображений  $f_i, g_i$  и  $h$ . Из леммы 1.3.2 следует, что отображения  $f_i$  и  $g_i$  над пересечениями своих образов задают эквивалентные разветвленные накрытия. Приклеим их друг к другу по отображениям, осуществляющим эквивалентность. В результате получим собственное отображение  $f_0: \tilde{U} \rightarrow U$ , являющееся накрытием над  $U - (L \cup k)$ , причем его ограничение на одну из компонент множества  $f_0^{-1}(U \cap U(k))$  эквивалентно ограничению  $h$  на  $h^{-1}(U \cap U(k))$ . Склеим  $\tilde{U}$  и  $\tilde{U}(k)$  по этой эквивалентности и получившуюся поверхность обозначим через  $\tilde{X}$ .

Обозначим через  $\tilde{L}$  кривую, склеенную из  $f_i^{-1}(L_i), g_i^{-1}(l_i)$  и  $h^{-1}(k)$ . В соответствии с п. 1.2 достаточно доказать, что ее двойственный граф такой, как на рис. 2. Для этого в силу леммы 1.3.3 осталось проверить, что  $\tilde{l}_1 \cdot \tilde{l}_1 = -72$ ,  $\tilde{l}_2^{(0)} \cdot \tilde{l}_2^{(0)} = -29$ , и  $k \cdot k = +1$ . Первые два равенства вытекают из части а) следующей леммы, а третье — из части б) и леммы 1.5.

**ЛЕММА 1.6.** Пусть  $F: M_1 \rightarrow M_2$  —  $m$ -листное разветвленное накрытие вещественных четырехмерных (необязательно компактных) многообразий,  $S_i$  — связное двумерное гладкое компактное подмногообразие в  $M_i$ , причем  $S_1 = F^{-1}(S_2)$ . Тогда

а) Если  $F$  имеет ветвление  $m$ -го порядка вдоль  $S_1$ , то  $(S_1 \cdot S_1) = m(S_2 \cdot S_2)$ .

б) Если образ подмногообразия ветвления трансверсально пересекает  $S_2$ , то  $m(S_1 \cdot S_1) = (S_2 \cdot S_2)$ .

**§ 2. Существование псевдоголутной окрестности.** Докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 2.1.** Пусть  $X$  — гладкая комплексно-аналитическая поверхность и  $Y$  — лежащая на ней гладкая компактная рациональная кривая с индексом самопересечения  $m > 0$ . Тогда у  $Y$  существует сколь угодно малая строго псевдоголутная трубчатая окрестность.

**ЛЕММА 2.2.** Пусть  $p: E \rightarrow \mathbb{C}P^1$  — одномерное линейное расслоение степени  $m > 0$ ,  $(x, y)$  — локальная аналитическая система координат в  $E$  такая, что  $y$  — линейная координата в каждом слое,  $x$  — координата на  $\mathbb{C}P^1$ , и  $p(x, y) = x$ . Пусть  $y = u_j(x)$  ( $j = 0, \dots, m$ ) — некоторый базис голоморфных сечений

расслоения  $E$ . Тогда равенство

$$\lambda(u_0(x), \dots, u_m(x)) = (u'_0(x), \dots, u'_m(x)) \quad (3)$$

не достигается ни в какой точке и ни при каком  $\lambda$ .

**Доказательство.** Поскольку расслоение  $E$  изоморфно стандартному, в некоторой системе координат  $(x', y')$  пространство его голоморфных сечений совпадает с пространством многочленов от  $x'$  степени не выше  $m$ . При этом координаты  $x', y'$  выражаются через  $x, y$  по формулам  $x' = f(x)$ ,  $y' = y/g(x)$ , причем функции  $f'$  и  $g$  нигде не обращаются в нуль. Сечения  $u_j$  в координатах  $(x', y')$  имеют вид  $y' = P_k(x')$ , где  $P_0, \dots, P_m$  — базис в пространстве многочленов степени не выше  $m$ . Следовательно,

$$u_k(x) = P_k(f(x))g(x). \quad (4)$$

Предположим, что в некоторой точке  $x$  при некотором  $\lambda$  выполняется равенство (3). Подставляя (4) в (3), получаем

$$P_k(f(x))(\lambda g(x) - g'(x)) = P'_k(f(x))f'(x)g(x). \quad (5)$$

$\{P_k\}$  — базис в пространстве многочленов, поэтому их линейными комбинациями можно представить 1 и  $x'$ . Применяя эти линейные комбинации к равенствам (5), получаем, что в точке  $x$  выполняются равенства  $\lambda g - g' = 0$  и  $f(\lambda g - g') = f'g$ , из которых следует, что  $f'g = 0$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

**Доказательство теоремы 2.1.** Пусть  $N$  — нормальное расслоение кривой  $Y$  в поверхности  $X$ , и пусть  $\mathcal{O}(N)$  — пучок его голоморфных сечений. Тогда  $\mathcal{O}(N) \cong \mathcal{O}(m)$ , следовательно,  $H^0(Y, \mathcal{O}(N)) \cong \mathbb{C}^{m+1}$ ,  $H^1(Y, \mathcal{O}(N)) = 0$ , и, по теореме Кодаиры [4], на  $X$  существует семейство гладких кривых  $Y_t$ ,  $t = (t_0, \dots, t_m) \in B$ , ( $B$  — шар в  $\mathbb{C}^{m+1}$  с центром в 0), удовлетворяющим следующим условиям: (i)  $Y_0 = Y$ ; (ii)  $V = \{(x, t) \mid x \in Y_t\}$  — гладкая аналитическая гиперповерхность в  $X \times B$ ; (iii) линейное отображение  $\sigma: T_0B \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}(N))$  является изоморфизмом, где  $\sigma$  определяется следующим образом. Пусть  $(x, y)$  — локальные координаты на  $X$ , в которых  $Y$  задается уравнением  $y = 0$ , и пусть  $(x, \eta)$  — соответствующие координаты на  $N$  (т. е.  $\eta = dy$ ). Поскольку  $Y_t$  — гладкие кривые, по теореме о неявной функции поверхность  $V$  можно задать уравнением  $F(x, y, t) = 0$ , где  $F = f(x, t) - y$ . Тогда  $\sigma(\partial/\partial t_i)$  определяется как сечение расслоения  $N$ , которое в координатах  $(x, \eta)$  задается уравнением  $\eta = \partial f/\partial t_i(x, 0)$ . Это определение не зависит от произвола в выборе координат.

Пусть  $\text{pr}$  — проекция  $X \times B$  на  $X$ . На множестве  $X_0 = \text{pr}(V)$  определена вещественная функция  $\varphi(p) = \min_{(p, t) \in V} |t|^2$ ,  $p \in X_0$ ,  $t \in B$ . Мы докажем (и это даст доказательство теоремы), что  $X_0$  является окрестностью (на  $X$ ) кривой  $Y$ , и что при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  множество  $U_\varepsilon = \{p \in X_0 \mid \varphi(t) < \varepsilon\}$  строго псевдоголутно. Оба эти факта достаточно доказать в каждой ко-



ординатной окрестности на поверхности  $X$ . Докажем их в координатах  $(x, y)$ , введенных выше.

Пусть  $u_j(x) = \partial f / \partial t_j(x, 0)$ . Согласно (iii)  $\eta = u_j(x)$  ( $j = 0, \dots, m$ ) — линейно независимые сечения пучка  $\mathcal{O}(N) \cong \mathcal{O}(m)$ . Из этого несложно вывести, что все функции  $u_j$ , а также  $u_j'$  нигде одновременно не обращаются в нуль. Следовательно,

$$|u|^2 > 0, \text{ где } u = (u_0, \dots, u_m). \quad (6)$$

Из (6) следует, что  $\text{rk}_C(\text{pr } \bar{V}) = 2$  в некоторой окрестности кривой  $Y$ , значит,  $X_0$  — окрестность  $Y$ .

Если фиксировать точку  $p = (x, y) \in X_0$ , то  $\{t \in B \mid (p, t) \in V\}$  — гладкое подмногообразие в  $B$ , причем  $\min |t|^2$  достигается в его внутренней точке  $t = (t_0, \dots, t_m)$ . Следовательно, по теореме Лагранжа об условном экстремуме для этой точки существует  $\lambda \in \mathbb{C}$  такое, что

$$F = 0, \quad (7)$$

$$\lambda \partial F / \partial \bar{t}_j = \bar{t}_j. \quad (8)$$

При  $t_0 = \dots = t_m = y = 0$  якобиан системы (7), (8) относительно переменных  $\lambda, t_0, \dots, t_m$  равен  $\pm |u|^4$  и, согласно (6), не обращается в нуль. Следовательно, при достаточно малых  $y$  эта система будет иметь единственное решение  $\lambda = \lambda(x, y), t_j = t_j(x, y)$ , причем  $\varphi(x, y) = \sum |t_j(x, y)|^2$ . Разлагая функцию  $F = f(x, t) - y$  в ряд по  $t$  и подставляя в (7), имеем

$$y = \sum_j u_j(x) t_j^3 + O(|t|^2). \quad (9)$$

Для каждого фиксированного  $j$ , выражая из (8) все  $t_i$  через  $t_j$  и подставляя в (9), получаем

$$y \bar{u}_j = |u|^2 t_j + O(|t|^2) \quad (j = 0, \dots, m),$$

следовательно ( $|u|^2$  обозначим через  $\mu$ ),  $t_j(x, y) = y \bar{u}_j / \mu + O(|y|^2)$ , и значит,

$$\varphi(x, y) = y \bar{y} / \mu + O(|y|^3). \quad (10)$$

Пусть  $\xi_1 = \varphi_y \mu / \bar{y} = 1 + O(|y|)$ ,  $\xi_2 = -\varphi_x \mu / \bar{y} = y \mu_x / \mu + O(|y|^2)$ . Ясно, что  $y \neq 0$  при  $\varphi \neq 0$ . Поэтому  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  — комплексный касательный вектор к поверхности  $\varphi = \text{const} \neq 0$ . Дифференцируя (10), вычислим значения формы Леви функции  $\varphi$  на векторе  $\xi$ :

$$L(\xi) = \sum_{i,j} \varphi_{x_i \bar{x}_j} \xi_i \bar{\xi}_j = -\frac{y \bar{y}}{\mu^3} (\mu \mu_{x\bar{x}} - |\mu_x|^2) + O(|y|^3)$$

(здесь  $x_1 = x, x_2 = y$ )

Остается заметить, что по неравенству Коши—Буняковского  $\mu \mu_{x\bar{x}} - |\mu_x|^2 \geq 0$ , причем равенство достигается только тогда, когда вектор  $u'$  пропорционален вектору  $u$ . Однако последнее невозможно в силу леммы 2.2. Теорема доказана.

Благодарю А. Г. Витушкина за постановку задачи, многочисленные обсуждения и советы по улучшению рукописи.

Научный совет АН СССР  
по комплексной проблеме  
«Кибернетика»

Поступило  
30.05.89

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bass H., Connell E. H., Wright D. The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Mat. Soc. 1982. V. 7, N 2. P. 287—330.
- [2] Ramanujam S. P. A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety // Ann. of Math. 1974. V. 94. P. 69—88.
- [3] Оревкин С. Ю. О трехлистных полиномиальных отображениях  $\mathbb{C}^2$  // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 6. С. 1234—1240.
- [4] Kodaira K. A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds // Ann. of Math. 1962. V. 75, N 1. P. 146—162.
- [5] Данилов В. И. Топология торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33, вып. 2. С. 85—134.
- [6] Laufer H. B. Taut two-dimensional singularities // Math. Ann. 1973. V. 205. P. 131—164.
- [7] Хованский А. Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) // Современные проблемы математики. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1983.