

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ НА КВАДРАТИЧНОМ КОНУСЕ И СГЛАЖИВАНИЯ ОСОБЕННОСТИ X_{21}

С. Ю. Оревков, Е. И. Шустин

*Посвящается Сергею Владимировичу Востокову,
первому научному руководителю второго автора*

Мы завершаем послойную изотопическую классификацию гладких вещественных алгебраических и псевдоголоморфных кривых степени 8 на квадратичном конусе с некоторым определенным расположением овала, пересекающегося с прямолинейной образующей конуса в четырех вещественных точках. Мы связываем эту классификацию с изотопической классификацией сглаживаний особенности плоских кривых типа X_{21} (объединение четырех гладких локальных ветвей, имеющих попарное квадратичное касание).

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи и результаты. Обозначим через \mathcal{F}_2 поверхность Хирцебруха второго порядка, т. е. линейчатую поверхность, содержащую исключительную (-2) -кривую (что то же самое, что квадратичный конус с раздутой особой точкой) и снабженную стандартной вещественной структурой. Обозначим (-2) -кривую через E , непересекающееся с E сечение — через H , и линейчатую структуру (расслоение на прямые) — через $\pi : \mathcal{F}_2 \rightarrow E$. Фиксируем некоторый вещественный слой F_0 (на протяжении всей статьи под слоем всегда будет подразумеваться слой расслоения π).

В настоящей статье дана полная классификация пар $(C, C \cap F_0)$ в (\mathcal{F}_2, F_0) , где $C \in |4H|$ — гладкая вещественная кривая, один из овалов которой пересекает F_0 в четырех различных вещественных точках так, как показано на рис. 1, с точностью до почти послойной изотопии пары $(\mathbb{R}C, \mathbb{R}C \cap F_0)$ в $(\mathbb{R}\mathcal{F}_2, \mathbb{R}F_0)$, т. е. с точностью до C^∞ -изотопии, сохраняющей $\mathbb{R}E$ и удовлетворяющей тому условию, что каждый вещественный слой пересекает каждую кривую этой изотопии не более чем в 4 точках

Первый автор работал при поддержке гранта РНФ: соглашение 14-21-00053 от 11.08.14.

The second author has been supported by the German-Israeli Foundation, grant no. 1174-197.6/2011, and by the Hermann-Minkowski-Minerva Center for Geometry at the Tel Aviv University. A part of this work has been performed during the second author's visit to the Centre Interfacultaire Bernoulli at the École Polytechnique Fédérale de Lausanne. The second author is very grateful to CIB-EPFL for hospitality and excellent working conditions.

Особая благодарность рецензенту, указавшему на некоторые ошибки в первой версии статьи.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

с учетом кратности. В частности, почти послойная изотопия сохраняет послойный порядок расположения свободных овалов (здесь и далее *свободными* мы называем овалы, не пересекающиеся с F_0). Классификация в том же смысле получена также для вещественных псевдоголоморфных кривых из гомологического класса $4H$. Как отмечено в [25], эти классификации *различны*, т. е. существуют вещественные псевдоголоморфные кривые, которые почти послойно неизотопны никаким алгебраическим кривым из рассматриваемого класса. Обе классификации представлены в теореме 1 (см. ниже).

Важное уточнение: под вещественной псевдоголоморфной кривой на \mathcal{F}_2 мы всегда подразумеваем сож-инвариантную J -голоморфную кривую относительно сож-антиинвариантной ручной почти комплексной структуры J на \mathcal{F}_2 *такой, что (-2) -сечение J -голоморфно*. Другие ситуации, когда те или иные вещественные псевдоголоморфные кривые нереализуемы алгебраически, обсуждаются в [4, 8, 20, 23, 33].

Мы также доказываем (см. теорему 5 в §6), что рассматриваемая почти послойная алгебраическая классификация эквивалентна почти послойной классификации сглаживаний особенности типа X_{21} плоских вещественных кривых (четыре гладкие вещественные локальные ветви с попарным квадратичным касанием). Заметим, что сглаживания особенности X_{21} играют важную роль в классификации плоских неособых вещественных алгебраических кривых степени 8 и 9 [16, 31, 32] — часть 16-й проблемы Гильберта.

Классификация. Пусть C — гладкая вещественная или псевдоголоморфная кривая на \mathcal{F}_2 , гомологичная $4H$, такая что $\mathbb{R}C$ имеет компоненту связности, пересекающую слой F_0 в четырех точках как показано на рис. 1, где слой F_0 представлен вертикальными сторонами прямоугольника, а E — горизонтальными. Будем говорить, что такая компонента связности имеет *тип \mathcal{A}* . Согласно [25; следствие 2.3], остальные овалы кривой C пусты, и их почти послойное расположение (с точностью до поворота на 180°) — либо $\mathcal{A}'(a, b, c)$, либо $\mathcal{A}''(a, b, c)$, см. рис. 1, где a, b и c — неотрицательные целые числа, обозначающие количество пустых овалов в соответствующих местах.

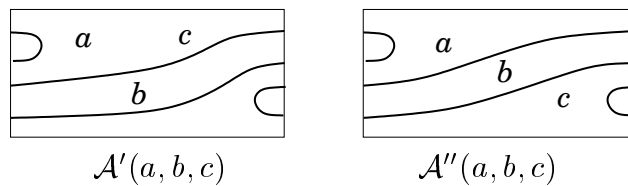


Рис. 1

Теорема 1. (а) Пусть $C \in |4H|$ — гладкая алгебраическая кривая с овалом типа \mathcal{A} .

Тогда почти послойное расположение овалов кривой C либо одно из

$\mathcal{A}'(0, 1, 8), \mathcal{A}'(6, 1, 2), \mathcal{A}'(0, 5, 4), \mathcal{A}'(2, 5, 2),$	M -кривые
$\mathcal{A}''(7, 0, 1), \mathcal{A}''(3, 4, 1),$	$(M - 1)$ -кривые
$\mathcal{A}'(0, 2, 5), \mathcal{A}'(3, 2, 2), \mathcal{A}'(4, 2, 1), \mathcal{A}'(3, 3, 1), \mathcal{A}'(0, 6, 1),$	$(M - 2)$ -кривые
$\mathcal{A}''(4, 3, 0), \mathcal{A}''(0, 7, 0), \mathcal{A}''(5 - b, b, 2), b = 0, 1, 2, 3,$	$(M - 2)$ -кривые
$\mathcal{A}'(1, 1, 3),$	$(M - 4)$ -кривые

либо оно получено из этих расположений удалением некоторых свободных овалов. Все эти расположения реализуемы алгебраическими кривыми.

(б) Пусть C — гладкая псевдоголоморфная кривая с овалом типа \mathcal{A} , гомологичная $4H$. Тогда почти послойное расположение овалов кривой C либо как в части (а), либо одно из

$\mathcal{A}''(4, 1, 4),$	M -кривые
$\mathcal{A}''(4, 0, 4)^*, \mathcal{A}''(5, 0, 3), \mathcal{A}''(6, 0, 2), \mathcal{A}''(4, 1, 3)^*,$	$(M - 1)$ -кривые
$\mathcal{A}''(4, 0, 3)^*, \mathcal{A}''(3, 1, 3)^*$	$(M - 2)$ -кривые
$\mathcal{A}''(3, 0, 3)^*$	$(M - 3)$ -кривые

(расположения, отмеченные звездочкой, могут быть получены из остальных удалением свободных овалов). Все эти расположения реализуемы псевдоголоморфными кривыми.

Обозначим через $\mathcal{A}(a, b, c)$ изотопический тип кривой $\mathcal{A}''(a, b, c)$ относительно изотопий, неподвижных на $\mathbb{R}F_0 \cup \mathbb{R}E$, при которых не учитывается послойное расположение овалов. Так, $\mathcal{A}(a, b, c) = \mathcal{A}''(a, b, c)$ при $c \neq 0$ и $\mathcal{A}(a, b, 0) = \bigcup_{a_1+c_1=a} \mathcal{A}'(a_1, b, c_1)$.

Следствие 2. Изотопический тип $\mathcal{A}(a, b, c)$ реализуем алгебраической (соответственно, псевдоголоморфной) кривой тогда и только тогда, когда $a \leq a_1, b \leq b_1, c \leq c_1$, где либо (a_1, b_1, c_1) , либо (c_1, b_1, a_1) принадлежит множеству

$$S = \{(8, 1, 0), (4, 5, 0), (7, 0, 1), (3, 4, 1), (5, 0, 2), (4, 1, 2), \\ (3, 2, 2), (5, 2, 0), (2, 3, 2), (1, 6, 0), (0, 7, 0)\}$$

(соответственно, множеству $S \cup \{(4, 1, 4), (5, 0, 3), (6, 0, 2)\}$).

Следствие 3. Если $a + b + c \leq 5$, то $\mathcal{A}'(a, b, c)$ и $\mathcal{A}''(a, b, c)$ алгебраически реализуемы.

Следствие 4. Почти послойные расположения, перечисленные в теореме 1(b), не реализуемы гладкой вещественной аналитической деформацией особенности X_{21} (четыре квадратично касающиеся гладкие ветви).

Доказательство. Следует из теоремы 1(a) и теоремы 5 (см. §6). \square

Отметим, что в теореме 1 завершена классификация, начатая в [25; теорема 1], где расклассифицированы кривые типов $\mathcal{A}(a, b, c)$ при $a + b + c = 9$ (M -типы). В [25] мы также продвинулись в классификации $(M - 1)$ -типов, оставив открытым лишь вопрос о реализуемости $\mathcal{A}''(6, 0, 2)$ и $\mathcal{A}''(3, 1, 4)$. Затем, в [26; теорема 1.2], мы запретили алгебраические кривые типа $\mathcal{A}''(3, 1, 4)$.

1. ПОСТРОЕНИЯ

Построения псевдоголоморфных кривых. M - и $(M - 1)$ -кривые из теоремы 1(б) построены в [25; §4.2].

Построения алгебраических кривых. Все четыре M -расположения из теоремы 1(а) построены в [32; §4.7] и [25; §4.1]. Построения из [25; §4.1] с другими способами склеивания карт кубических многочленов дают все остальные расположения серии \mathcal{A}' , перечисленные в теореме 1(а), кроме $\mathcal{A}'(3, 3, 1)$.

Оба $(M - 1)$ -расположения из теоремы 1(а) построены в [25; §2.4, следствие 2.12] (ранее они были построены вторым автором в [28] и Корчагиным в [15]).

Оставшиеся расположения из теоремы 1(а), т. е. $\mathcal{A}'(3, 3, 1)$ и шесть $(M - 2)$ -расположений серии \mathcal{A}'' , построены ниже в предложениях 1.2, 1.5 and 1.8. Легко проверить, что все эти построения допускают стирание любого набора пустых овалов.

Лемма 1.1. В линейной системе $|4H|$ на \mathcal{F}_2 есть вещественная алгебраическая кривая с особыми точками типа A_4 и D_{13} , расположенная с точностью до изотопии как на рис. 2(а).

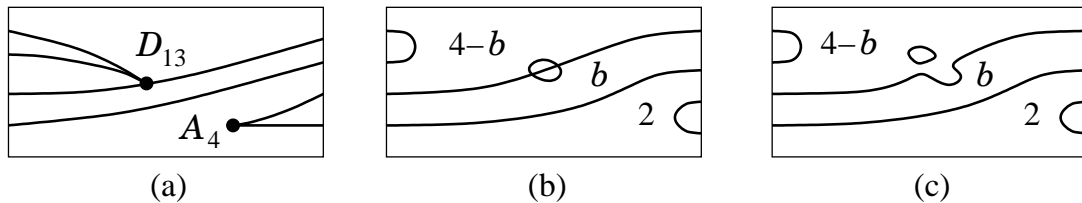


Рис. 2

Доказательство. Построение показано на рис. 3. Мы начинаем с кватрики на $\mathbb{R}P^2$ с особенностями A_2 и A_4 (ее можно получить, например, возмущением двойной коники). Выберем координаты $(x : y : z)$ как на рис. 3(а). На рис. 3(б) изображена та же кривая, но $\mathbb{R}P^2$ представлено в виде диска с отождествленными антиподальными граничными точками. Рис. 3(с) получен из рис. 3(б) бирациональным преобразованием, имеющим вид $(X, Y) \mapsto (X, Y + aX^2)$ в аффинных координатах $X = x/z$, $Y = y/z$. Рис. 3(д) — то же, что и рис. 3(с), но $\mathbb{R}P^2$ разрезана вдоль другой прямой. Рис. 3(е) получен из него раздутием точки Q (горизонтальные стороны прямоугольника представляют соответствующую (-1) -кривую), а рис. 3(ф) получен из рис. 3(е) раздутием точки, отвечающей углам прямоугольника, с последующим стягиванием проходящего через нее слоя. Рис. 3(ф) — то же, что и рис. 2(а), но \mathcal{F}_2 разрезана вдоль другого слоя. \square

Предложение 1.2. Расположения $\mathcal{A}''(5 - b, b, 2)$, $0 \leq b \leq 3$, реализуемы вещественными алгебраическими кривыми на \mathcal{F}_2 из линейной системы $|4H|$.

Доказательство. Следует из леммы 1.1, см. рис. 2(б,с). \square

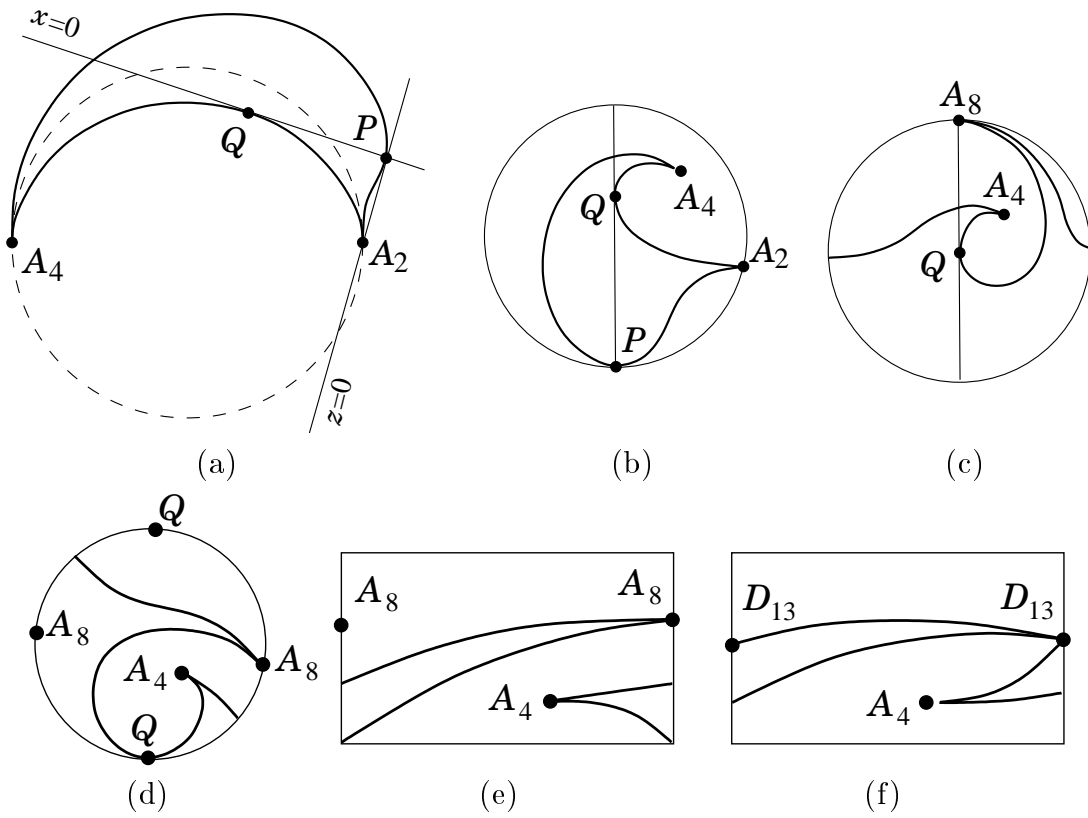


Рис. 3

Лемма 1.3. В линейной системе $|4H|$ на \mathcal{F}_2 есть вещественная алгебраическая кривая с особой точкой типа J_{10} (три касающиеся ветви), расположенная с точностью до изотопии как на рис. 4(a).

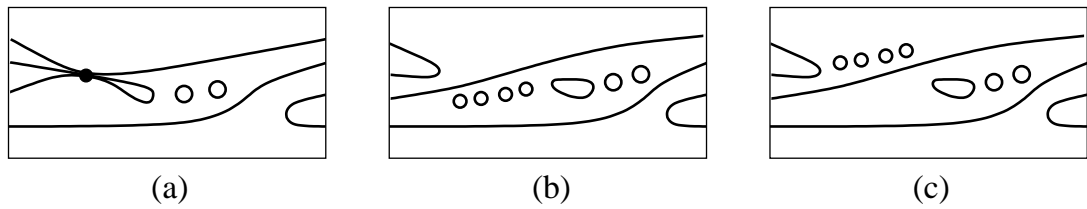


Рис. 4

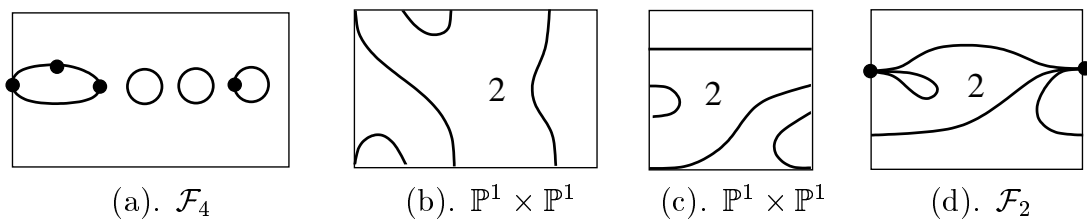


Рис. 5

Доказательство. Построение показано на рис. 5. Мы начинаем с M -кривой бистепени $(2, 8)$ на \mathcal{F}_4 с выбранными на ней четырьмя точками как на рис. 5(a). Раздуем эти точки и стянем проходящие через них слои (см. замечание 1.4). Мы получим кривую бистепени $(2, 4)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с послойным расположением относительно пучка прямых, индуцированного с \mathcal{F}_4 , как на рис. 5(b). Послойное расположение той же кривой относительно другого пучка показано на рис. 5(c). Наконец, раздуем дважды точку, представленную на рисунке углами прямоугольника, а затем стянем слой и исключительный дивизор первого раздутия. Получим рис. 5(d), что то же самое, что и рис. 4(a), только \mathcal{F}_2 разрезана вдоль другого слоя. \square

Замечание 1.4. В терминах уравнений переход от рис. 5(a) к рис. 5(b) означает следующее. Пусть $y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0$, $\deg a_0 = 8$, $\deg a_1 \leq 4$, уравнение кривой на рис. 5(a), причем стандартная система координат на \mathcal{F}_4 выбрана так, что все четыре отмеченные точки лежат на оси $y = 0$, и значит, $a_0(x) = b(x)c(x)$, где $b(x)$ — многочлен, корни которого являются x -координатами отмеченных точек. Тогда уравнение кривой на рис. 5(b) имеет вид $b(x)y^2 + a_1(x)y + c(x) = 0$.

Предложение 1.5. Расположения $\mathcal{A}''(4, 3, 0)$ and $\mathcal{A}''(0, 7, 0)$ реализуемы вещественными алгебраическими кривыми на \mathcal{F}_2 из линейной системы $|4H|$.

Доказательство. Следует из леммы 1.3, см. рис. 4(b,c). \square

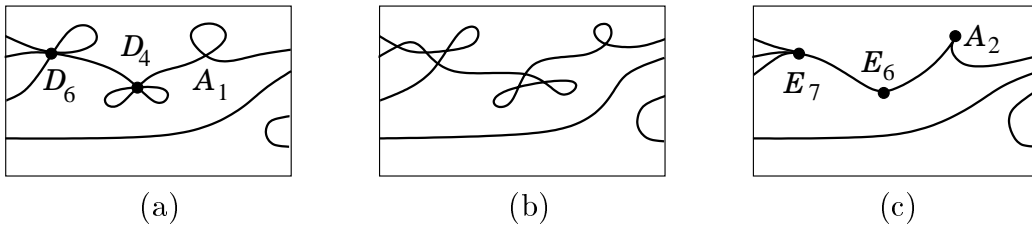


Рис. 6

Лемма 1.6. В линейной системе $|4H|$ на \mathcal{F}_2 есть вещественная алгебраическая кривая с особыми точками типа D_6 , D_4 , A_1 , расположенная с точностью до изотопии как на рис. 6(a).

Доказательство. Склеивая две приводимые кубики на \mathcal{F}_1 , можно получить приводимую кривую на \mathcal{F}_2 , изображенную на рис. 7(a). Склеивание можно понимать как в смысле [21], так и в смысле [30]. Разрезая рис. 7(a) вдоль пунктирной линии и склеивая его с другой кубической кривой как показано на рис. 7(b), мы получим приводимую кривую на \mathcal{F}_3 . Та же кривая изображена на рис. 7(c), где \mathcal{F}_3 разрезана по другому слою. Это объединение кривой L бистепени $(1, 3)$ и нодальной кривой C бистепени $(2, 6)$. Раздуем точки p_1, \dots, p_5 (см. рис. 7(c)), а затем стянем проходящие через них слои. Мы получим приводимую кривую на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, изображенную на рис. 7(d). Та же кривая изображена на рис. 7(e), но оси координат поменяны местами. Наконец, раздувая точки p и q , и стягивая проходящие через них (вертикальные) слои, мы получим кривую из линейной системы $|4H|$ на \mathcal{F}_2 , изображенную на рис. 7(f). Это то же расположение, что и на рис. 6(a), но \mathcal{F}_2 разрезана по другому слою. \square

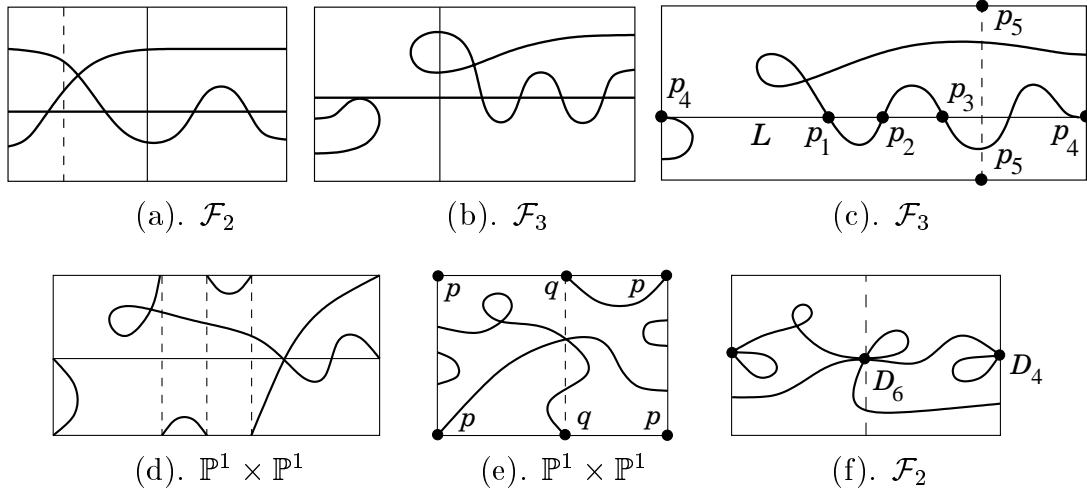


Рис. 7

Замечание 1.7 Доказательство леммы 1.6 легко изменить, чтобы получилась кривая на рис. 6(c).

Предложение 1.8. Расположение $\mathcal{A}'(3, 3, 1)$ реализуемо вещественной алгебраической кривой на \mathcal{F}_2 из линейной системы $|4H|$.

Доказательство. Следует из леммы 1.6, см. рис. 6(b). \square

2. ЗАПРЕТЫ ДЛЯ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

2.1. Классификация неособых псевдоголоморфных кривых: доказательство теоремы 1(б). Случай M - и $(M - 1)$ -кривых сделан в [25]. Поскольку любой овал псевдоголоморфной кривой всегда можно удалить, достаточно запретить следующие расположения:

$$\mathcal{A}'(1, 1, 4), \mathcal{A}'(2, 1, 3), \mathcal{A}'(1, 2, 3),$$

$$\mathcal{A}''(5, 1, 1), \mathcal{A}''(4, 2, 1), \mathcal{A}''(5, 2, 0), \mathcal{A}''(1, 5, 1), \mathcal{A}''(1, 6, 0).$$

Соответствующие косы противоречат неравенству Мурасуги – Тристрама (см. [19; §3.1])

$$\text{Null}_\zeta(b) \geq |\text{Sign}_\zeta(b)| + 4 - e(b), \quad \zeta = \exp(2\pi i\theta), \quad (1)$$

при $\theta = 1/2, 1/2, 1/2, 1/5, 1/5, 2/7, 1/5, 2/7$ соответственно.

2.2. Запреты для особых псевдоголоморфных кривых, используемые в доказательстве теоремы 1(а).

Лемма 2.1. Пусть C — нодальная псевдоголоморфная кривая на \mathcal{F}_2 , гомологичная $4H$, причем $\mathbb{R}C$ расположена как на рис. 8 (а) или (b). Тогда C приводима, а именно, $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 и C_2 — псевдоголоморфные кривые гомологичные $2H$, причем C_1

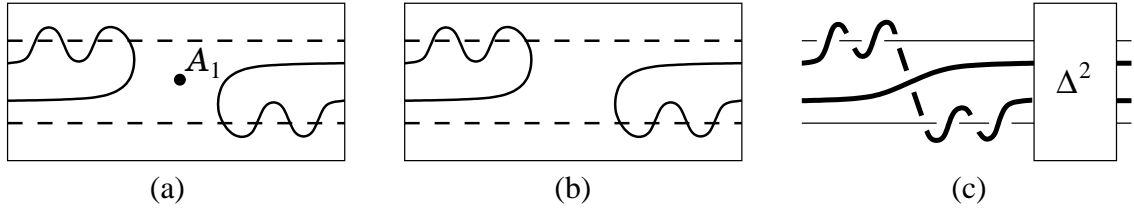


Рис. 8

(изображена сплошной линией) неприводима, а C_2 (изображена пунктирной линией) может быть как приводимой, так и неприводимой.

Доказательство. Достаточно установить этот факт для рис. 8(b). Без ограничения общности мы можем также предполагать, что все не вещественные точки кривой C неособы. Введем обозначения как в [19; §4.5]. Пусть (x, y) — стандартная аффинная карта в \mathcal{F}_2 , соответствующая рис. 8, причем проекция $\text{pr} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет вид $(x, y) \mapsto x$. Пусть H — половина $\mathbb{C}P^1 \setminus \mathbb{R}P^1$ заданная неравенством $\text{Im } x > 0$, и положим $N = C \cap \text{pr}^{-1}(H)$. Выберем в H замкнутый диск H^- , содержащий все точки ветвления проекции $\text{pr}|_N$, и обозначим через S^3 границу бидиска $\text{pr}^{-1}(H^-) \cap \{|y| \leq R\}$, $R \gg 1$. Положим $L = S^3 \cap N$; это зацепление в S^3 , являющееся замыканием косы b , изображенной на рис. 8(c).

Обозначим через μ_L и μ_N число компонент связности L и N соответственно, а через g — полный род поверхности N . Поскольку коса b квазиположительна, мы имеем

$$1 = 4 - e(b) = \chi(N) = 2\mu_N - 2g - \mu_L = 2\mu_N - 2g - 3,$$

где $e(b)$ — сумма показателей косы b , и $\chi(N)$ — эйлерова характеристика. Тогда $\mu_N = 2 + g \geq 2$.

Пусть L_1 — подзацепление в L , образованное двумя средними нитями (жирная линия на рис. 8(c)). Положим $L_2 = L'_2 \sqcup L''_2 = L \setminus L_1$. Вычисляя индексы зацепления $\text{lk}(L_1, L'_2) = \text{lk}(L_1, L''_2) = 0$ и $\text{lk}(L'_2, L''_2) = 2$, и применяя неравенство $\mu_N \geq 2$, делаем вывод, что N имеет две компоненты связности N_1 и N_2 такие, что $S^3 \cap N_i = L_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, замыкание C_i объединения $N_i \cup \text{Conj}(N_i)$, $i = 1, 2$, является гладкой псевдоголоморфной кривой. \square

Замечание 2.2. Расположения на рис. 8(a,b) реализуемы вещественными псевдоголоморфными кривыми на \mathcal{F}_2 , гомологичными $4H$. Действительно, коса, соответствующая рис. 8(a), имеет вид $b = \sigma_3^{-4} \sigma_2^{-2} \sigma_1^{-4} \Delta^2$. Она квазиположительна: $b = (a_1^{-1} \sigma_2 a_1)(a_2^{-1} \sigma_1 a_2)$, где $a_1 = \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_3^4$, $a_2 = \sigma_2 \sigma_3^3$.

Лемма 2.3. Если $a_2 \geq 1$, $c \geq 1$ и $b + c \geq 2$, то послойное расположение на рис. 9(a) нереализуемо вещественной псевдоголоморфной кривой на \mathcal{F}_2 гомологичной $4H$.

Доказательство. Если существует псевдоголоморфная кривая как на рис. 9(a), то любые два последовательных овала в одной области можно соединить посредством

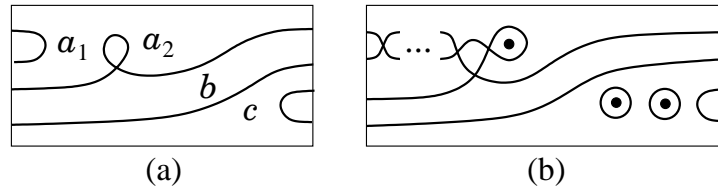


Рис. 9

двойной точки, потому что эта операция не меняет косы. Поэтому кривая, содержащая подмножество, изображенное на рис. 9(b), тоже реализуема (мы здесь предполагаем, что $c \geq 2$; в противном случае один из нижних овалов надо переместить в среднюю область). Это расположение противоречит теореме Безу для вспомогательной кривой, гомологичной H и проходящей через три отмеченные на рис. 9(b) точки. \square

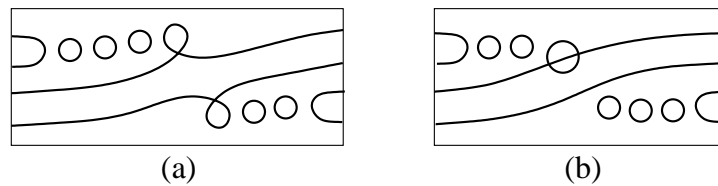


Рис. 10

Лемма 2.4. *Послойные расположения на рис. 10(a,b) нереализуемы вещественными псевдоголоморфными кривыми на \mathcal{F}_2 гомологичными $4H$.*

Доказательство. Следует из (1) при $\theta = 1/2$. \square

Лемма 2.5. *Пусть C — гладкая псевдоголоморфная кривая на \mathcal{F}_2 , гомологичная $3H + 2F$ и трансверсальная к E . Тогда возмущением кривой $C + E$ нельзя получить почти послойные типы, перечисленные в теореме 1(b), но не в теореме 1(a).*

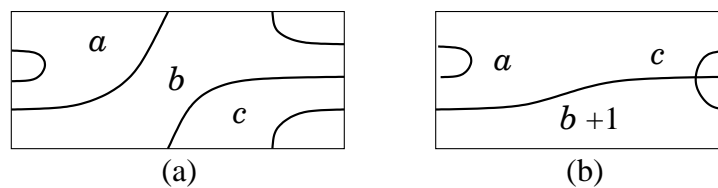


Рис. 11

Доказательство. Если из кривой $C + E$ сглаживанием получается $\mathcal{A}''(a, b, c)$, то она должна быть расположена как на рис. 11(a) с точностью до замены a на c . Раздувая $C \cap E$ и затем стягивая собственный прообраз слоев (см. Замечание 1.4), мы получим кривую на \mathcal{F}_4 бистепени $(3, 12)$, сглаживание которой дает рис. 11(b). При помощи алгоритма из [22], [24; §6] легко проверить (даже вручную), что соответствующая

коса из трех нитей не квазиположительна. Поскольку удаление пустого овала не нарушает псевдоголоморфную реализуемость, достаточно рассмотреть только расположения $\mathcal{A}''(6, 0, 2)$ и $\mathcal{A}''(3, 0, 3)$. \square

Легко проверить (см. также [2; глава 2, §15.2]), что в таблице 1 перечислены все комплексные особенности кратности 3 с δ -инвариантом 6 или 7 с точностью до гомотоморфизма (через g обозначен род слоя Милнора).

Таблица 1. Особенности кратности 3 с $\delta = 6$ или 7.

	уравнение	g	δ		уравнение	g	δ
J_{10}	$y^3 + x^6$	4	6	J_{12}	$(y + x^2)(y^2 + x^6)$	5	7
J_{11}	$(y + x^2)(y^2 + x^5)$	5	6	J_{13}	$(y + x^2)(y^2 + x^7)$	6	7
E_{12}	$y^3 + x^7$	6	6	E_{13}	$y(y^2 + x^5)$	6	7
				E_{14}	$y^3 + x^8$	7	7

Пусть p — изолированная особенность плоской вещественной аналитической кривой C . Пусть B — шар Милнора для (C, p) , т. е. топология пары $(B, C \cap B)$ не меняется при стремлении радиуса шара B к нулю. Пусть C' — сглаживание особенности кривой C в точке p , т. е. C' можно включить в аналитическое семейство кривых C_t , $t \in [0, \varepsilon]$, таких что $C_0 = C$ и топология пары $(B, C_t \cap B)$ постоянна на $]0, \varepsilon]$. Пусть $\alpha = b_0(\bar{C}') - 1$, где \bar{C}' получено из объединения незамкнутых дуг кривой C' при отождествлении граничных точек, происходящих из одной и той же вещественной ветви кривой C (здесь b_0 обозначает число компонент связности). Заметим, что $b_0(\bar{C}') = b_0(\mathbb{R}C' \cup \partial(C' \cap B))$. Пусть l_{loc} — число овалов (замкнутых компонент) кривой C' . Локальный аналог неравенства Харнака (непосредственно вытекающий из неравенства Смита – Тома; см. также [14, 27] и [13; Proposition 1]) имеет вид

$$l_{\text{loc}} \leq g - \alpha, \quad (2)$$

где через g обозначен род C' , т. е. род слоя Милнора особенности (C, p) . Такая же оценка имеет место в псевдоголоморфной ситуации.

Лемма 2.6. Пусть C — вещественная псевдоголоморфная кривая (возможно, приводимая, но без кратных компонент) в \mathcal{F}_2 , гомологичная $4H$, с особой точкой p кратности 3 и с δ -инвариантом, равным 6 или 7 (см. таблицу 1). Предположим также, что $E \not\subset C$. Пусть F_0 — слой, не проходящий через p . Тогда C не может быть сглажена в кривую почти послойного изотопического типа $\mathcal{A}''(6, 0, 2)$ относительно слоя F_0 .

Доказательство. Особенности псевдоголоморфных кривых всегда можно сгладить независимо. Поэтому мы можем предполагать, что p — единственная особая точка кривой C . Тогда C неприводима, так как пересечение любой ее локальной ветви в p с остальными ветвями не больше пяти, в то время как $C = C_1 + C_2$ влечет $C_1 \cdot C_2 \geq 6$.

Если C допускает возмущение типа \mathcal{A} , то объединение компонент связности множества $\mathbb{R}C \setminus p$, пересекающих F_0 , должно быть как на рис. 12, на котором слой F_0

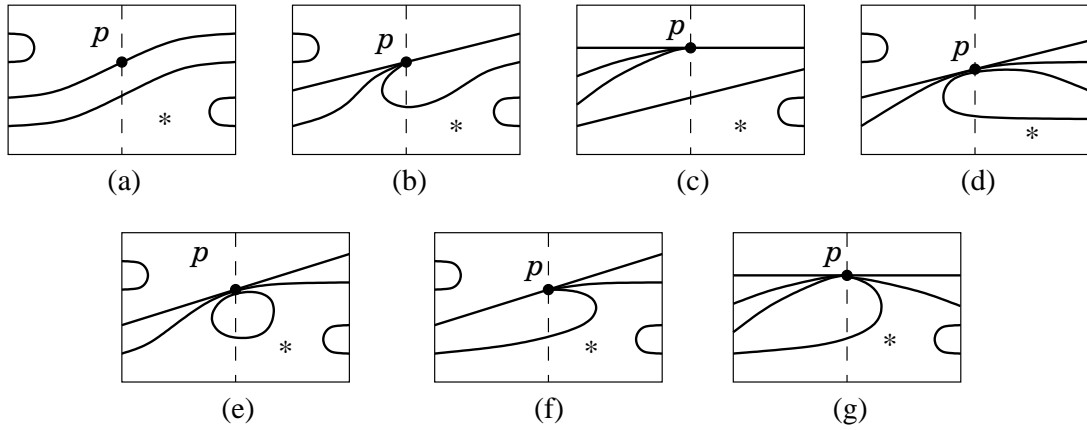


Рис. 12

представлен вертикальными сторонами прямоугольников. Обозначим через $l(C)$ и $l(C')$ число свободных овалов кривых C и C' соответственно, а через $r(C)$ — число вещественных ветвей кривой C , пересекающих F_0 . По неравенству Харнака $l(C) + r(C) \leq 10 - \delta$.

Для рис. 12 (a)–(d) никакое сглаживание типа $\mathcal{A}''(a, b, c)$ при $ac \neq 0$ невозможно. Действительно, овалы, возникающие возле p , не могут дать вклад в c , а также ни одного овала v кривой C не может оказаться в нижней области справа от p (область, помеченная звездочкой на рис. 12) по теореме Безу для вспомогательной кривой из гомологического класса $[H]$, касающейся C в точке p и проходящей через v (это уже исключает E_{12} и E_{14}). По той же самой причине

(*) порядок касания нижних двух дуг в точке p равен двум (следовательно, E_{13} тоже исключена).

Предположим, что (C, p) имеет тип J_{11} или J_{13} . Тогда $r(C) = 2$ в силу (*) (см. рис. 12(f)), откуда $l(C) \leq 10 - \delta - r(C) = 8 - \delta$, и из (2) мы получаем $l(C') \leq l(C) + l_{loc} \leq 8 - \delta + g = 7$, а значит $C' \notin \mathcal{A}(6, 0, 2)$.

Пусть теперь (C, p) имеет тип J_{10} или J_{12} . Тогда $l(C) \leq 10 - \delta - r(C) \leq 9 - \delta$. В силу (2) из этого следует $l(C') \leq l(C) + l_{loc} + 1 \leq (9 - \delta) + (g - \alpha) + 1 = 8 - \alpha$. Поэтому, если $C' \in \mathcal{A}(6, 0, 2)$, то во всех этих неравенствах достигается равенство, т. е.

$$l(C') = l(C) + l_{loc} + 1, \quad r(C) = 1, \quad \alpha = 0. \tag{3}$$

Условия $r(C) = 1$ и (*) уже исключают рис. 12(e,g), и остается только рис. 12(f). Для него мы рассмотрим:

- (i) два способа добавить недостающую дугу кривой C (см. рис. 13, слева);
- (ii) четыре способа соединить дуги в точке p (см. рис. 13, справа).

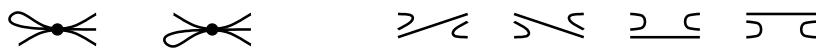


Рис. 13

Легко проверить, что (3) достигается только для J_{12} и только при выборе самого правого варианта и для (i), и для (ii). Однако в этом случае мы получаем кривую типа $\mathcal{A}(a, b, c)$, где $b \geq 1$. \square

3. ЯВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

3.1. Кривые с особенностями $A_{10} + A_5 + A_1$ и $A_9 + [A_5 + A_1]$. Мы найдем явные уравнения для всех неособых кривых C на \mathcal{F}_2 из линейной системы $|4H|$ со следующими наборами особенностей:

- (i) $A_{10} + A_5 + A_1$,
- (ii) $A_9 + [A_5 + A_1]$,

где квадратные скобки в (ii) означают, что A_5 и A_1 лежат на одном слое расслоения $\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Сопутствующие файлы Maple worksheet с подробными комментариями доступны на web-странице <http://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkov/hrg3.html>.

Мы воспользуемся вычислениями из [6], которые основаны на методе Арталя – Кармоны – Когольудо [3] и на формулах Муди для инволюции Бертини [18].

Пусть $C \in |4H|$ — кривая с простой двойной точкой p . Пусть F и E — соответственно слой, проходящий через p , и исключительное сечение. Если раздуть p , а затем стянуть F и E , то получится секстика D на \mathbb{P}^2 .

Пусть (x, y) — стандартная система координат на \mathcal{F}_2 такая, что p — бесконечно удаленная точка на оси $y = 0$, и пусть $f(x, y) = 0$ — уравнение кривой C . Тогда аффинные координаты на \mathbb{P}^2 можно выбрать так, чтобы D задавалась тем же самым уравнением $f(x, y) = 0$. Многоугольник Ньютона многочлена f содержится в четырехугольнике $Q = [(0, 0), (6, 0), (4, 2), (0, 4)]$, причем $Q = T_1 \cap T_2$, где $T_1 = [(0, 0), (8, 0), (0, 4)]$ и $T_2 = [(0, 0), (6, 0), (0, 6)]$. Таким образом, C и D — это замыкания аффинной кривой $f = 0$ в торических многообразиях, соответствующих треугольникам T_1 и T_2 соответственно. Неформально говоря, $f = 0$ есть уравнение кривой C (соответственно, D), если Q рассматривается как подмножество в T_1 (соответственно, в T_2).

Если F трансверсально пересекает C вне p , то D имеет особенность A_3 . Если на F лежит особая точка типа A_n , то она преобразуется в особую точку типа A_{n+4} кривой D . Поэтому, если C удовлетворяет условию (i) или (ii), то D имеет набор особенностей $A_{10} + A_5 + A_3$ или $2A_9$ соответственно. Чтобы найти все такие кривые, мы адаптируем вычисления для $A_{10} + A_5 + A_4$ и $A_{10} + A_9$, которые со всеми подробностями приведены в [6].

3.2. Секстики на \mathbb{P}^2 с набором особенностей $A_{10} + A_5 + A_3$. В [6; §5.4] показано, что все секстики с особенностями $A_{10} + A_4 + A_3$ содержатся в двухпараметрическом семействе (параметры μ и ν), заданном следующим уравнением от x_1, x_2, x_3 :

$$\phi_6 - a(w - \mu w')^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 w &= x_3^2(a_1x_1 + a_2x_2) + x_3(b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2) + (c_1x_1 + c_2x_2)x_1x_2, \\
 w' &= x_3^2(a'_1x_1 + a'_2x_2) + x_3(b'_1x_1^2 + b'_2x_1x_2 + b'_3x_2^2) + (c'_1x_1 + c'_2x_2)x_1x_2, \\
 C_5 &= \frac{A_2(B_1 + \kappa x_1x_3^2)}{x_2} + \frac{(A_1 - \kappa x_1^2x_3)(A_2x_3 + B_3x_2)}{x_2x_1} + \kappa B_3x_1x_3, \\
 \phi_6 &= A_1C_2 + x_3C_5, \quad \kappa = a_1b'_1 - a'_1b_1, \\
 A_i &= a_iw' - a'_iw, \quad B_i = b_iw' - b'_iw, \quad C_i = c_iw' - c'_iw, \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{5}$$

коэффициенты многочленов w и w' имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \beta - \alpha, & a_2 &= \alpha\beta - 2\alpha + 1, & b_3 &= \alpha - \alpha\rho, \\
 b_1 &= 0, & b_2 &= \alpha\beta\rho - 2\alpha\rho + 1, & c_2 &= \alpha\rho - \alpha\rho^2, \\
 c_1 &= 0, & c_2 &= \alpha\rho - \alpha\rho^2, & a'_2 &= \alpha - \beta, \\
 a'_1 &= \alpha\beta - 2\beta + 1, & a'_2 &= \alpha - \beta, & b'_3 &= 0, \\
 b'_1 &= \alpha\beta\rho - 2\beta\rho + 1, & b'_2 &= -2\beta\rho + \alpha + \alpha\rho, & c'_2 &= 0, \\
 c'_1 &= \alpha\rho - \beta\rho^2, & c'_2 &= 0,
 \end{aligned}$$

а значения параметров a , α , β и ρ выражаются через μ и ν следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{\mu\nu\alpha + 2\mu\alpha + 2\nu\alpha - \mu - \nu + 3\alpha - 2}{\mu\nu + \mu\alpha + \nu\alpha + 2\alpha - 1}, & \rho &= \frac{\mu\nu + \mu\alpha + \nu\alpha + 2\alpha - 1}{(\mu + \alpha)(\nu + \alpha)}, \\
 a &= \frac{\alpha(\alpha - 1)^4(\mu + \nu + 2)(\mu - \nu)^2}{4(\mu + 1)^2(\nu + 2)(\mu + \alpha)^3(\nu + \alpha)^2}, \\
 \alpha &= \frac{(\mu\nu - 1)^2(\nu + 2)}{4\mu\nu^2 + 10\mu\nu + \mu^2 + 5\nu^2 + 8\mu + 12\nu + 8}.
 \end{aligned}$$

После замены переменных

$$x_1 = z - x/\rho, \quad x_2 = y + \frac{(\alpha\beta\rho - 2\beta\rho + 1)x}{\rho(\beta\rho - \alpha)}, \quad x_3 = x$$

кривая D , заданная уравнением (4), имеет особенности A_4 и A_{10} в точках $(0 : 0 : 1)$ и $(0 : 1 : 0)$ с касательными $y = 0$ и $z = 0$ соответственно, а также особенность A_3 в точке

$$(x_1 : x_2 : x_3) = \left(\frac{1}{1 - \beta\rho} : \frac{1}{\rho - 1} : \frac{1}{\beta - 1} \right).$$

Как объяснено в [6, §5.4], необходимым условием для дальнейшего вырождения особенности A_4 в A_5 является уравнение [6; (5.4)]. Будучи выражено через μ и ν , оно разлагается на четыре множителя. Три из них отвечают наборам особенностей

$A_{10} + A_4 + A_3 + A_1$, $A_{10} + A_4 + D_4$, $A_{10} + D_5 + A_3$, а четвертый, равный левой части уравнения

$$(\mu^2 + 3\mu)\nu^2 + (4\mu^2 + 15\mu + 7)\nu + 2\mu^2 + 10\mu + 6 = 0, \quad (6)$$

отвечает $A_{10} + A_5 + A_3$.

Легко проверить, что (6) задает рациональную кривую в плоскости (μ, ν) , допускающую параметризацию

$$\mu = -\frac{(2t-1)(t-4)}{t^2-4t+2}, \quad \nu = -\frac{3t^2-10t+4}{(2t-1)(t-2)}.$$

Параметры α , β , ρ и a выражаются через t следующим образом:

$$\alpha = \frac{4(2t-1)(t-3)}{(5t-3)(t-2)}, \quad \beta = \frac{t(t+1)}{2(t-3)(2t-1)}, \quad \rho = \frac{2(5t-3)(t-3)}{t^2}.$$

$$a = \frac{81(t^2-4t+2)^2(3t^2-9t+4)(t-1)^2(t-3)}{t^5(2t-1)^2(t-2)^2}.$$

Таким образом, мы нашли однопараметрическое семейство кривых с набором особенностей $A_{10} + A_5 + A_3$. Мы его нашли, решив некоторую систему уравнений на коэффициенты. Этим семейством исчерпываются все кривые с данным набором особенностей с точностью до проективной эквивалентности. В этом можно убедиться, проследив весь процесс решения системы уравнений и проверив, что ни одно решение не потеряно. Однако в этом нет необходимости, так как согласно результату [1; теорема 2.5] (полученному при помощи теории КЗ-поверхностей), эквисингулярное семейство $A_{10} + A_5 + A_3$ соответствует неприводимой кривой в пространстве модулей.

3.3. Секстики на \mathbb{P}^2 с набором особенностей $2A_9$. Здесь мы воспользуемся вычислениями из [6; §5.2]. А именно, пусть D — кривая с уравнением (4), (5), где все ненулевые коэффициенты многочленов w и w' суть

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta - \alpha, & a_2 &= \alpha\beta - \alpha + \beta, & b_2 &= \beta - 2\alpha, & b_3 &= c_3 = -\alpha, \\ a'_1 &= \alpha\beta + \alpha - \beta, & a'_2 &= \alpha - \beta, & b'_2 &= \alpha - 2\beta, & b'_1 &= c'_1 = -\beta, \end{aligned}$$

и при этом

$$\alpha = -\frac{(\mu+1)(\nu+1)}{(\mu+2)(\nu+2)}, \quad \beta = -\frac{(\mu+1)(\nu+1)}{\mu\nu + \mu + \nu + 2}.$$

Тогда после замены переменных $x_1 = z - x$, $x_2 = y - x$, $x_3 = x$, кривая D имеет особенности A_7 и A_9 в $(0 : 0 : 1)$ и $(0 : 1 : 0)$ с касательными $y = 0$ и $z = 0$ соответственно. Если

$$a = -\frac{(\nu+1)^2(\nu+\mu+2)\left((3\mu^2+8\mu+4)\nu^2 + (8\mu^2+22\mu+12)\nu + 4\mu^2+12\mu+7\right)}{4(\mu+1)(\mu+2)^2(\nu+2)^3(\mu\nu+\mu+\nu+2)^2},$$

то A_7 вырождается в A_8 . Если, к тому же, μ и ν удовлетворяют соотношению

$$(\mu^2 + 6\mu + 4)\nu^2 + (4\mu^2 + 20\mu + 14)\nu + 4\mu^2 + 16\mu + 11 = 0, \quad (7)$$

то A_8 далее вырождается до A_9 . Уравнение (7) задает объединение двух рациональных кривых на плоскости (μ, ν) , допускающих параметризацию

$$\mu = -(t + 2 - \varepsilon)/t, \quad \nu = -(t - 2)/(t - 1), \quad \varepsilon = \pm\sqrt{5}.$$

Можно проверить, что при общем t кривая, отвечающая значению $\varepsilon = \sqrt{5}$, проективно неэквивалентна ни одной из кривых с $\varepsilon = -\sqrt{5}$. Это можно сделать, например, следующим образом. В силу выбора системы координат, уравнение кривой однозначно определено с точностью до умножения координат на константы. Поэтому, полагая коэффициенты при x^6 , x^5y и x^5z равными единице, мы однозначно задаем уравнение $f_{t,\varepsilon}(x, y, z) = 0$. Обозначим через $c_{ij}(t, \varepsilon)$ его коэффициенты. Достаточно проверить, что при фиксированном общем значении t система уравнений $c_{ij}(s, -\varepsilon) = c_{ij}(t, \varepsilon)$ на единственное неизвестное s не имеет решения. Заметим, что замена y на z преобразует кривую с параметрами (t, ε) в кривую с параметрами $(\frac{3-\varepsilon}{2} - t, \varepsilon)$.

Таким образом, мы нашли два различных однопараметрических семейства в пространстве модулей кривых шестой степени. Согласно [1; предложение 2.6], эквисингулярный страт $2A_9$ имеет ровно две неприводимые компоненты. Это означает, что мы нашли все кривые с набором особенностей $2A_9$ с точностью до проективной эквивалентности.

3.4. Расположения особых кривых на $\mathbb{R}\mathcal{F}_2$.

Лемма 3.1. Пусть $C \in |4H|$ — вещественная алгебраическая кривая на \mathcal{F}_2 с особенностями как в §3.1. Пусть F_0 — слой, проходящий через A_5 , и пусть F_1 — слой, проходящий через A_9 или A_{10} . Тогда $C \cup F_0 \cup F_1$ не может располагаться как на рис. 14(a,b) с точностью до изотопии.

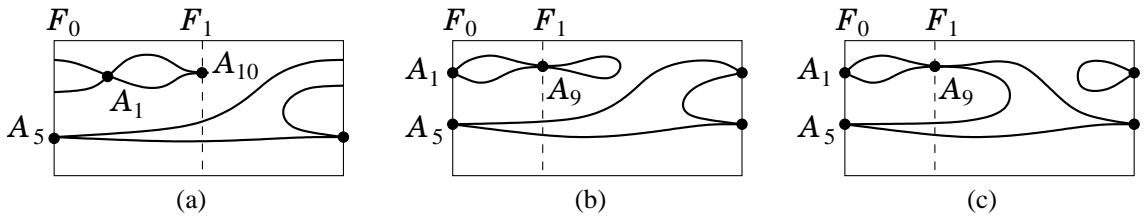


Рис. 14

Доказательство. Случай (i) из §3.1 (соответствует рис. 14(a)). Достаточно проверить, что точки пересечения кривой $C \cup E$ с F_0 и с F_1 не могут лежать на F_0 и F_1 как на рис. 14. В самом деле, в противном случае мы имеем $d_i := b_i^2 - 4a_i c_i > 0$ и $a_i c_i > 0$, где $u^2(a_i u^2 + b_i u + c_i) = 0$ — это ограничение уравнения C на слой F_i (координата u на F_i выбрана так, что особая точка отвечает $u = 0$, а точка $C \cap E$ отвечает $u = \infty$).

После преобразования \mathcal{F}_2 в \mathbb{P}^2 , описанного в § 3.1, слой F_0 (соответственно, F_1) отвечает прямой, проходящей через A_3 и A_5 (соответственно, A_3 и A_{10}). Пользуясь формулами из § 3.2, можно проверить, что $d_0 a_1 c_1 = -11 R(t)^2$, где $R(t)$ — некоторая рациональная функция с целыми коэффициентами. Поэтому d_0 и $a_1 c_1$ не могут быть одновременно положительными.

Случай (ii) из § 3.1 (соответствует рис. 14(b)). Пусть a_1, c_1, d_1 будут как в случае (i). Обозначим через $\delta_n, n = 1, 5$, дискриминант ограничения уравнения кривой на исключительную кривую последнего раздутия при разрешении особенности A_n (в частности, δ_1 — дискриминант ограничения уравнения (4) на прямую $z = 0$). Локальные ветви кривой C в особенности A_n вещественны тогда и только тогда, когда $\delta_n > 0$. Таким образом, если C как на рис. 14(b), то $d_1, a_1 c_1, \delta_1$ и δ_5 положительны. Вычисление, основанное на формулах из § 3.3, показывает, что это условие никогда не выполняется при $\varepsilon = -\sqrt{5}$, а при $\varepsilon = \sqrt{5}$ выполняется только если $t \in]t_1, t_2[$, где

$$t_1 = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.38196, \quad t_2 = (9 - 3\sqrt{5})/4 \approx 0.57294$$

(заметим, что все корни многочленов, участвующих в вычислениях, лежат в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$).

Обозначим через $f(x, y, z, t)$ левую часть (4). Тогда $f = 0$ при фиксированном t — это уравнение кривой D . Рассмотрим в $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$ поверхность $f = 0$. Пусть $x^{10} z^8 \Delta(x, z, t)$ — дискриминант многочлена f по переменной y , т. е. $\Delta = 0$ есть уравнение множества ветвления проекции поверхности $f = 0$ на $\mathbb{RP}_{(x:z)}^1 \times \mathbb{R}(t)$.

Обозначим через $a_0(t)$ коэффициент при $y^4 z^2$ в f , а через $\Delta_1(t)$ — дискриминант Δ по переменной x . Прямое вычисление показывает, что $a_0(t), \Delta_1(t), \Delta(0, 1, t)$ и $\Delta(1, 0, t)$ не имеют вещественных корней на интервале $]t_1, t_2[$. Это значит, что по-слойный изотопический тип кривой $C \cup F_0 \cup F_1 \cup E$ не меняется, когда t пробегает этот интервал. Тем самым, достаточно найти изотопический тип при одном произвольном значении t из этого интервала. Вычисление показывает, что он как на рис. 14(c). \square

4. ОСНОВЫ МЕТОДА ГИЛЬБЕРТА – РООНА

Для запрета алгебраических кривых мы применим версию метода Гильберта – Роона – Гудкова (см. [25, 26]). А именно, мы будем рассуждать от противного: предполагая что рассматриваемая кривая существует, мы покажем, что она допускает вырождение в кривую с определенным набором особенностей, а затем докажем, что данное вырождение невозможно либо топологическими методами, либо алгебро-геометрическими, либо в результате прямого вычисления. Процесс вырождения мы будем проводить в несколько этапов. На каждом этапе мы рассмотрим страт $S \subset |4H|$, образованный вещественными кривыми определенного изотопического типа с фиксированным набором особенностей. Затем мы введем частичный порядок на S и покажем, что для любой кривой $C \in S$ существует эквисингулярное семейство $C_t \in S, t \in [0, \varepsilon), C_0 = C$, строго монотонное относительно введенного порядка. Из этого будет следовать, что экстремальный элемент принадлежит замыканию $\overline{S} \setminus S$. После этого мы либо перейдем к следующему этапу, рассматривая страт

более вырожденных кривых, либо покажем что дальнейшее вырождение невозможно, придя, тем самым, к противоречию с существованием исходной кривой.

Ниже мы пользуемся следующими обозначениями: $\text{Span}_K\{*\}$ обозначает линейное пространство над полем K с указанным базисом, $\langle * \rangle$ — идеал в соответствующей алгебре с указанными образующими.

4.1. Локальная геометрия эквисингулярных семейств кривых. В этом разделе мы опишем локальные свойства эквисингулярных семейств кривых, используемые в доказательстве предложения 5.1, которое является последним шагом в доказательстве теоремы 1. Отметим, что леммы 4.1 и 4.2 (см. ниже) похожи на [26; предложения 2.1 и 2.4]. Однако в этих цитированных предложениях есть небольшой пробел: верхняя оценка на число вещественных пересечений близких особых кривых неявно использовалась, хотя и не была доказана. Здесь мы доказываем требуемую оценку (см. лемму 4.1(3)), тем самым, устраняя пробел в [26]. Кроме того, мы немного меняем определение некоторых эквисингулярных семейств, чтобы упростить доказательство оценки (16). Для удобства читателя мы приводим полные доказательства.

Пусть Σ — гладкая алгебраическая поверхность, $(C, p) \subset (\Sigma, p)$ — росток кривой с особенностью типа A_{2s-1} , $s \geq 1$, в точке $p \in \Sigma$, и U — его регулярная окрестность (т. е. открытый шар с центром в p такой, что росток (C, p) локально замкнут в U , гладок вне p и трансверсален к ∂U для любого шара, лежащего в U , с центром в p). Обозначим через $\mathcal{O}(\bar{U})$ кольцо функций непрерывных в \bar{U} и голоморфных в U . Зададим в нем максимальный идеал $\mathfrak{m} = \{g \in \mathcal{O}(U) \mid g(p) = 0\}$ и норму $\|g\|_{\bar{U}} = \max |g(\bar{U})|$. Фиксируем также некоторый замкнутый шар $V \subset U$ с центром в p .

Фиксируем локальную систему координат $S = (x, y)$ в U так, что $p = (0, 0)$ и $(C, p) = \{f := y^2 - x^{2s} = 0\}$. Пусть $\Lambda \subset \mathcal{O}(\bar{U})$ — некоторое конечномерное линейное пространство. Обозначим через $M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda) \subset f + \Lambda$ росток в f аффинного подпространства в $\mathcal{O}(\bar{U})$, заданного обращением в нуль коэффициентов при $x^i y^j$ ниже диаграммы Ньютона f . Легко видеть, что $M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda)$ не зависит от выбора S . Обозначим через $M_{C,p}(S, \Lambda) \subset f + \Lambda$ семейство элементов $g \in f + \Lambda$, представимых в виде

$$\left((y')^2 - (x')^{2s} \right) \left(1 + \varphi_2(x', y') \right), \quad (8)$$

где

$$x' = (x - \alpha)(1 + \varphi_3(x, y)), \quad y' = y - (x')^{s-1}(\beta + \varphi_1(x', y)), \quad (9)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \varphi_1 \in \mathfrak{m}, \quad \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{O}(\bar{U}), \quad \text{и} \quad |\alpha|, |\beta|, \|\varphi_1\|_{\bar{U}}, \|\varphi_2\|_{\bar{U}}, \|\varphi_3\|_{\bar{U}} < \varepsilon, \quad (10)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ выбрано так, что при любых $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, удовлетворяющих условию (10), формулы (9) задают диффеоморфизм такой, что образ области U содержит V и образ точки p лежит во внутренней части V .

Поскольку при любых заданных $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, удовлетворяющих (10), формулы (9) определяют локальный диффеоморфизм $\Phi(x, y) = (x', y')$, каждый элемент $g \in M_{C,p}(S, \Lambda)$ задает росток кривой $g = 0$ с особенностью A_{2s-1} в точке $(\alpha, 0) = \Phi^{-1}(0, 0)$. Если Q_1, Q_2 — компоненты (C, p) , то каждая кривая $\{g = 0\} \subset U$, $g \in M_{C,p}(S, \Lambda)$, также имеет две компоненты Q'_1, Q'_2 , пересекающиеся с кратностью s , такие что Q'_i

близка к Q_i , $i = 1, 2$. Заметим также, что $M_{C,p}(S, \Lambda)$ есть росток аналитического подмножества в $f + \Lambda$. Действительно, $M_{C,p}(S, \Lambda)$ можно рассматривать как росток эквисингулярного страта в Λ с дополнительным условием, что порядок нуля элементов множества $M_{C,p}(S, \Lambda)$ на дуге $y - \beta(x + \alpha)^{s-1}$ в точке $(-\alpha, 0)$ не больше чем $2s$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Данный эквисингулярный страт является гладким подмногообразием базы любой линейной деформации (см., например, [10, теорема II.2.38(3)]). Отождествляя версальную деформацию с некоторым конечномерным подпространством в $\mathcal{O}(\bar{U})$, содержащим Λ , мы заключаем, что эквисингулярный страт является пересечением ростка гладкого аналитического многообразия с линейным пространством. Наконец, используя теорию исключений, вышеупомянутые условия на пересечение с дугами можно записать в виде аналитических уравнений на координаты в пространстве Λ .

Лемма 4.1. *В вышеприведенных обозначениях предположим, что Λ сюръективно проектируется на $J_{\Sigma,p}^{2s} := \mathcal{O}(\bar{U})/\mathfrak{m}^{2s+1}$. Тогда:*

(1) *Росток $M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda)$ в f является аффинным подмногообразием в $f + \Lambda$ коразмерности $3s$, которое может быть задано в системе координат $S = (x, y)$ посредством*

$$M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda) = \{g \in f + \Lambda \mid \text{ord}_{Q_i}(g) \geq 2s, \ i = 1, 2\} = \langle y^2, yx^s, x^{2s} \rangle. \quad (11)$$

(2) *Росток $M_{C,p}(S, \Lambda)$ в f является гладким подмногообразием в $f + \Lambda$ коразмерности $3s - 2$ с касательным пространством*

$$T_f M_{C,p}(S, \Lambda) = \{g \in \Lambda \mid \text{ord}_{Q_i}(g) \geq 2s - 1, \ i = 1, 2\} = \langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle. \quad (12)$$

(3) *Предположим, что росток $(C, p) = \{f := y^2 - x^{2s} = 0\}$ вещественен. Пусть $M \subset M_{C,p}(S, \Lambda)$ — росток в f гладкого вещественного одномерного аналитического многообразия с $TM = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{f^*\}$, где $f^* = 2s\alpha_0 x^{2s-1} - 2\beta_0 x^{s-1}y + \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) \in \langle y^2, yx^s, x^{2s} \rangle$, и пусть $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow M, t \mapsto C^{(t)}$, — регулярная параметризация такая, что $C^{(0)} = C$ и $|t| < \varepsilon_1 \ll 1$. Предположим, что*

$$(C^* \cdot C)_p = 4s - 2, \quad \text{где } C^* = \{f + f^* = 0\} \quad (13)$$

и

$$(C^{(t)} \cdot C)_U = 4s - 2, \quad t \neq 0. \quad (14)$$

Тогда существует $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ такое, что при всех $t, 0 < |t| < \varepsilon_2$, во-первых,

$$(Q_1^{(t)} \cdot Q_1)_{\mathbb{R}U} \equiv (Q_2^{(t)} \cdot Q_2)_{\mathbb{R}U} \equiv s - 1 \pmod{2}, \quad (15)$$

где $Q_i^{(t)}$, $i = 1, 2$, — вещественные ветви кривой $C^{(t)}$ в ее особой точке в U ; во-вторых, в дополнительных предположениях $\alpha_0 \neq 0$ и $s^2\alpha_0^2 \neq \beta_0^2$, мы имеем

$$\#[((Q_1^{(t)} \cap Q_1) \cup (Q_2^{(t)} \cap Q_2)) \cap \mathbb{R}U] \leq 2. \quad (16)$$

Доказательство. Первое утверждение легко следует из того наблюдения, что $M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda)$ — росток в f линейного подпространства в $\mathcal{O}(U)$, задаваемого обращением в нуль коэффициентов при $x^i y^j$ ниже диаграммы f .

Для доказательства второго утверждения заметим, что в случае особенности A_1 семейство $M_{C,p}(S, \Lambda)$ — это просто росток эквисингулярного страта. Хорошо известно, что он гладок в коразмерности один. Предположим, что $s > 1$ и рассмотрим проекцию $M_{C,p}(S, \Lambda) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $g \mapsto (\alpha, \beta)$. Она корректно определена, поскольку при различных α различаются положения особой точки, а при различных β различаются $(s-1)$ -е бесконечно близкие точки. Заметим, что данная проекция представляет $M_{C,p}(S, \Lambda)$ в виде локально-тривиального (топологического) расслоения над $(\mathbb{C}^2, 0)$ со слоем, изоморфным $M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda)$, поскольку

- (i) при фиксированных α и β , но при переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, формула (9) задает все ростки функций, близких к $\tilde{f}(x', y') = f(x' + \alpha, y' - \beta(x')^{s-1})$ и задающих ростки кривых с особенностью A_{2s-1} в точке $(-\alpha, 0)$ и с $(s-1)$ бесконечно близкими точками такими же как у \tilde{f} ,
- (ii) пространство Λ проектируется на $J_{\Sigma, p'}^{2s}$ для каждой точки $p' \in \Sigma$, близкой к p .

Это доказывает утверждение о размерности, в частности,

$$\dim M_{C,p}(S, \Lambda) = \dim M_{C,p}^{\text{fix}}(\Lambda) + 2.$$

С другой стороны, $M_{C,p}(S, \Lambda)$ является ростком аналитического пространства, его касательное (по Зарисскому) пространство, состоящее из всех инфинитезимальных деформаций первого порядка, можно отождествить с $\Lambda \cap \langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle$, если записать формулу (9) в виде

$$\begin{aligned} & y^2 - x^{2s}(1 + 2s\varphi_3(x, y)) + \varphi_2(x, y)(y^2 - x^{2s}) + 2s\alpha x^{2s-1} + 2(\beta + \varphi_1(x, y))yx^{s-1} \\ & + O(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \|\varphi_1\|_U^2 + \|\varphi_2\|_U^2 + \|\varphi_3\|_U^2). \end{aligned}$$

Таким образом, гладкость множества $M_{C,p}(S, \Lambda)$ вытекает из вышеприведенной формулы для размерности и из соотношения

$$\dim \frac{\Lambda \cap \langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle}{\Lambda \cap \langle y^2, yx^s, x^{2s} \rangle} = \dim \frac{\langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle}{\langle y^2, yx^s, x^{2s} \rangle} = 2.$$

Наконец, покажем, что $T_f M_{C,p}(S, \Lambda) = \langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle \cap \Lambda$ можно эквивалентно выразить в виде (12). Действительно, образующие g идеала $\langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle$ удовлетворяют соотношениям $\text{ord}_{Q_i}(g) \geq 2s-1$, $i = 1, 2$, указанным в (12). С другой стороны, эти соотношения означают, что $g(x, y)|_{y=x^s} = g(x, x^s) = O(x^{2s-1})$ и $g(x, y)|_{y=-x^s} = g(x, -x^s) = O(x^{2s-1})$, что исключает ростки вне идеала $\langle y^2, yx^{s-1}, x^{2s-1} \rangle$.

Для доказательства формулы (15) заметим, что (13) и (12) дают $(C^* \cdot Q_i)_p = 2s-1$, $i = 1, 2$. Согласно [12; теорема 2] (см. также [10; лемма II.2.18]), отсюда вытекает что $(C^{(t)} \cdot Q_i)_U \geq 2s-1$, $i = 1, 2$, что вместе с (14) дает $(C^{(t)} \cdot Q_i)_U = 2s-1$, $t \neq 0$, $i = 1, 2$. Далее, поскольку $(Q_i^{(t)} \cdot Q_{3-i})_U = s$, $i = 1, 2$, мы заключаем, что $(Q_i^{(t)} \cdot Q_i)_U = s-1$, $t \neq 0$, $i = 1, 2$, откуда получаем (15).

Сравнивая (9) с выражением для f^* , можно представить $C^{(t)}$ в виде $(y')^2 - (x')^{2s} = 0$, где

$$\begin{aligned} x' &= (x - t\alpha_0)(1 + t\psi_3(t, x, y)), \\ y' &= y - (x')^{s-1}(\beta_1 t(1 + O(t)) + x'\psi_1(t, x', y) + y\psi_2(t, x', y)) \end{aligned}$$

с некоторыми фиксированными аналитическими функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 , и с $\beta_1 = \beta_0 - (s-1)\psi_3(0)$. Поэтому пересечения $Q_1^{(t)} \cap Q_1$ и $Q_2^{(t)} \cap Q_2$ в U можно рассматривать как решения уравнений

$$\begin{aligned} x^s &= t\beta_0(x - t\alpha_0)^{s-1} + (x - t\alpha_0)^s + t(x - t\alpha_0)^s O(1), \\ x^s &= -t\beta_0(x - t\alpha_0)^{s-1} + (x - t\alpha_0)^s + t(x - t\alpha_0)^s O(1), \end{aligned}$$

соответственно, где $O(1)$ ограничено сверху положительной функцией от $U, V, \varepsilon, \varepsilon_1, \alpha_0, \beta_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, причем решения ищутся в малой окрестности начала координат. Заметим, что такие решения не могут иметь асимптотику $x \sim \gamma t^a, t \rightarrow 0$, где $a < 1$, так как в этом случае в уравнениях появятся члены $(\beta_0 - s\alpha_0)t^{1+(s-1)a}, (\beta_0 + s\alpha_0)t^{1+(s-1)a}$, соответственно с минимальным показателем у t , которые не сокращаются с другими членами. Поэтому, в силу условия $\alpha_0 \neq 0$, мы масштабируем эти уравнения заменой $x \mapsto t\alpha_0 x$ и сосредотачиваем внимание только на тех корнях, которые остаются в конечном интервале при $t \rightarrow 0$, таким образом, мы сводим неравенство (16) к следующим двум утверждениям, которые влекут соотношение (16). Если $\gamma \geq 0$, то

(i) при четном $s > 0$ каждое из уравнений

$$x^s = \gamma(x-1)^{s-1} + (x-1)^s, \quad x^s = -\gamma(x-1)^{s-1} + (x-1)^s \quad (17)$$

имеет один простой вещественный корень, а остальные $s-2$ корней мнимы;

(ii) при нечетном $s > 0$ каждое из уравнений (17) либо не имеет вещественных корней, либо имеет два простых вещественных корня, либо имеет один двукратный вещественный корень, причем общее число вещественных решений обоих уравнений не превосходит двух (с учетом кратностей).

Действительно, пусть s четно. Тогда утверждение (i) очевидно при $\gamma = 0$, и число вещественных корней может меняться при изменении γ только когда появляется кратный корень, т. е. система уравнений

$$\begin{cases} x^s = \delta(x-1)^{s-1} + (x-1)^s \\ sx^{s-1} = \delta(s-1)(x-1)^{s-2} + s(x-1)^{s-1} \end{cases} \quad (18)$$

имеет решение при некотором $\delta \in \mathbb{R}$. Решая эту систему, получаем

$$\delta = \frac{s(x-1)}{x-s}, \quad (x-s)x^s = x(x-1)^s. \quad (19)$$

Решение $x = 0$, $\delta = 1$ можно отбросить, так как корень $x = 0$ соответствующего уравнения

$$x^s = (x - 1)^{s-1} + (x - 1)^s \iff x^s = x(x - 1)^{s-1}$$

простой. Другая возможность, допускаемая вторым уравнением в (19), это

$$(x - s)x^{s-1} = (x - 1)^s. \quad (21)$$

Однако в этом случае нет вещественных решений: левая часть отрицательна, а правая неотрицательна при $x \in]0, s[$, а также

$$|x - s| \cdot |x|^{s-1} < |x - 1|^s \quad \text{при } x \leq 0 \text{ или } x \geq s, \quad (20)$$

в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $|x - s|, |x|, \dots, |x|$.

Утверждение (ii) очевидно при $s = 1$. Рассмотрим нечетное $s \geq 3$. Тогда при $\gamma = 0$ оба уравнения (17) совпадают, и они не имеют вещественных корней. Таким образом, чтобы доказать утверждение (ii), достаточно проверить, что кратный корень уравнения $x^s = \delta(x - 1)^{s-1} + (x - 1)^s$ возникает лишь при единственном значении $\delta \in \mathbb{R}$, и его кратность равна двум. Как и выше, поиск кратного корня сводится к системе (18), затем к уравнению (19), затем решение $x = 0$, $\delta = 1$ отбрасывается, и мы приходим к уравнению (21). Неравенство (20) и сравнение знаков сводит задачу к поиску корней на интервале $]0, 1[$. Поскольку производная $sx^{s-2}(x - s + 1)$ левой части уравнения (21) отрицательна на $]0, 1[$, а производная $s(x - 1)^{s-1}$ правой части положительна на $]0, 1[$, мы получаем один простой корень. Этим завершается доказательство утверждения (ii). \square

Лемма 4.2. Пусть Σ — гладкая алгебраическая поверхность, и D — эффективный класс дивизоров, такой что $-DK_\Sigma \geq 2$ и $H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma) = 0$. Пусть $C \in |D|$ — приведенная неприводимая кривая, имеющая r особых точек $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_r\}$ типов A_{2k_i-1} , $k_i \geq 1$, $i = 1, \dots, r$, и s особых точек $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_s\}$ типов A_{2l_j-1} , $j = 1, \dots, s$, соответственно, где $r, s \geq 0$, $r + s > 0$. Обозначим через $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C)$ росток в C семейства кривых $C' \in |D|$, которые в некоторых окрестностях $U(p_i)$ точек p_i , $1 \leq i \leq r$, задаются многочленами $f_i \in M_{C, p_i}^{\text{fix}}(\Lambda)$, а в некоторых окрестностях $U(q_j)$ точек q_j , $1 \leq j \leq s$, — многочленами $g_j \in M_{C, q_j}(\Lambda)$, где $\Lambda = H^0(\Sigma, \mathcal{O}(mD))$ при достаточно большом m .

Если

$$2 \sum_{i=1}^r k_i + 2 \sum_{j=1}^s (l_j - 1) \leq -DK_\Sigma - 1, \quad (22)$$

то $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C)$ — гладкое многообразие размерности

$$d = g + \left(-DK_\Sigma - 1 - 2 \sum_{i=1}^r k_i - 2 \sum_{j=1}^s (l_j - 1) \right), \quad (23)$$

где g — род кривой C . Более того, если $d = 1$ и $g = 0$, и задана параметризация $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C)$, $t \mapsto C^{(t)}$, $C^{(0)} = C$, а также выбрана кривая $C^* \in T_C M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C) \setminus \{C\}$, то мы имеем

$$\begin{cases} (C^* \cdot C)_{p_i} = 4k_i, & p_i \in \mathbf{p}, & (C^* \cdot C)_{q_j} = 4l_j - 2, & q_j \in \mathbf{q}, \\ (C^{(t)} \cdot C)_{p_i} = 4k_i, & p_i \in \mathbf{p}, & (C^{(t)} \cdot C)_{U(q_j)} = 4l_j - 2, & q_j \in \mathbf{q}, t \neq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Доказательство. В силу леммы 4.1, утверждения о гладкости и о размерности будут следовать из трансверсальности пересечения $\prod_{p_i \in \mathbf{p}} M_{C, p_i}(\Lambda) \times \prod_{q_j \in \mathbf{q}} M_{C, q_j}^{\text{fix}}(\Lambda) \subset \Lambda^{r+s}$ с образом пространства $H^0(\Sigma, \mathcal{O}_{\Sigma}(D))$ в Λ^{r+s} . Эта трансверсальность эквивалентна соотношению

$$h^0(\Sigma, \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D)) = h^0(\Sigma, \mathcal{O}_{\Sigma}(D)) - \deg Z,$$

где $\mathcal{J}_{Z/\Sigma}$ — пучок идеалов нульмерной схемы $Z \subset \Sigma$, заданной в точках $p_i \in \mathbf{p}$ и $q_j \in \mathbf{q}$ уравнениями (12) и (11) соответственно (во всех случаях s равно δ -инварианту соответствующей особенности). Поскольку $h^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \deg Z$, в виду точной когомологической последовательности

$$0 \rightarrow H^0(\Sigma, \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D)) \rightarrow H^0(\Sigma, \mathcal{O}_{\Sigma}(D)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D)),$$

связанной с точной последовательностью пучков $0 \rightarrow \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma}(D) \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$, нам надо показать, что

$$H^1(\Sigma, \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D)) = 0. \quad (25)$$

Из точной последовательности пучков $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Sigma} \xrightarrow{\times C} \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D) \rightarrow \mathcal{J}_{Z/C}(D) \rightarrow 0$ и из предположения $H^1(\Sigma, \mathcal{O}_{\Sigma}) = 0$, мы выводим точность последовательности

$$0 = H^1(\Sigma, \mathcal{O}_{\Sigma}) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{J}_{Z/\Sigma}(D)) \rightarrow H^1(C, \mathcal{J}_{Z/C}(D)),$$

благодаря чему соотношение (25) вытекает из

$$H^1(C, \mathcal{J}_{Z/C}(D)) = 0. \quad (26)$$

Чтобы доказать (26), мы поднимем пучок $\mathcal{J}_{Z/C}(D)$ на нормализацию $\nu : \widehat{C} \rightarrow C$. Хорошо известно (см., например, [5, §2.4] или [7, §4.2.4]), что

$$\nu_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}}(-\Delta)) = \mathcal{J}_C^{\text{cond}} := \text{Ann}(\nu_* \mathcal{O}_{\widehat{C}} / \mathcal{O}_C),$$

где $\Delta \subset \widehat{C}$ — так называемый дивизор двойных точек, степень которого равна $2 \sum_{z \in \text{Sing}(C)} \delta(C, z)$. В нашей ситуации пучок-кондуктор $\mathcal{J}_C^{\text{cond}}$ задан в точках $\mathbf{p} \cup \mathbf{q}$ идеалами (см. [7, §4.2.4])

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{C, p_i}^{\text{cond}} &= \{g \in \mathcal{O}_{C, p_i} \mid \text{ord}_{P_{i,s}} g \geq k_i - 1, s = 1, 2\}, & p_i \in \mathbf{p}, \\ \mathcal{J}_{C, q_j}^{\text{cond}} &= \{g \in \mathcal{O}_{C, q_j} \mid \text{ord}_{Q_{j,s}} g \geq l_j - 1, s = 1, 2\}, & q_j \in \mathbf{q}, \end{aligned}$$

где $P_{i,1}, P_{i,2}$ — ветви ростка (C, p_i) , и $Q_{j,1}, Q_{j,2}$ — ветви ростка (C, q_j) . Сравнивая формулы (12) и (11), примененные к каждой точке $p_i \in \mathbf{p}$ и $q_j \in \mathbf{q}$ соответственно, заключаем, что

$$\mathcal{J}_{Z/C}(D) = \nu_* \mathcal{O}_{\widehat{C}}(\mathbf{d} - \Delta - \mathbf{w}),$$

где дивизоры $\mathbf{d}, \mathbf{w} \subset \widehat{C}$ имеют степень

$$\deg \mathbf{d} = D^2, \quad \deg \mathbf{w} = 2 \sum_{p_i \in \mathbf{p}} k_i + 2 \sum_{q_j \in \mathbf{q}} (l_j - 1).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \deg(\mathbf{d} - \Delta - \mathbf{w}) &= D^2 - 2 \sum_{z \in \mathbf{p} \cup \mathbf{q}} \delta(C, z) - 2 \sum_{p_i \in \mathbf{p}} k_i - 2 \sum_{q_j \in \mathbf{q}} (l_j - 1) \\ &= D^2 - (D^2 + DK_{\Sigma} + 2 - 2g) - 2 \sum_{p_i \in \mathbf{p}} k_i - 2 \sum_{q_j \in \mathbf{q}} (l_j - 1) \\ &= 2g - 2 + \left(-DK_{\Sigma} - 2 \sum_{p_i \in \mathbf{p}} k_i - 2 \sum_{q_j \in \mathbf{q}} (l_j - 1) \right) \stackrel{(22)}{>} 2g - 2, \end{aligned}$$

мы получаем (26).

Соотношение (24) для пересечения C^* и C сразу следует из (12) и теоремы Безу, а соотношение (24) для пересечения $C^{(t)}$, $t \neq 0$, и C следует из теоремы Безу и неравенств

$$(C^{(t)} \cdot C)_{U(p_i)} \geq (C^* \cdot C)_{p_i}, \quad p_i \in \mathbf{p}, \quad (C^{(t)} \cdot C)_{U(q_j)} \geq (C^* \cdot C)_{q_j}, \quad q_j \in \mathbf{q}$$

(см [12; теорема 2] или [10; лемма II.2.18]). \square

4.2. Соображения общего положения для кривых на \mathcal{F}_2 . Следующий факт — аналог теоремы Брюотти о сглаживании нодальных вещественных алгебраических кривых на \mathbb{RP}^2 .

Лемма 4.3. Пусть $C \subset \mathcal{F}_2$ — вещественная нодальная кривая, не содержащая (-2) -кривой E (но, возможно, приводимая). Тогда существует малая вещественная деформация кривой C в той же линейной системе, которая сохраняет заранее предписанное conj -инвариантное множество нодов кривой C (возможно, сдвигая их) и которая сглаживает остальные ноды, причем для каждого вещественного нода можно заранее выбрать одно из двух возможных сглаживаний.

Доказательство. Непосредственно следует из [9; следствие 6.3], где достаточные условия того, чтобы линейная система $|C|$ была совместной версальной деформацией всех нодов кривой C , имеют вид $-C'K_{\mathcal{F}_2} > 0$, где C' пробегает все компоненты кривой C . Это неравенство всегда выполнено при $C' \neq E$. \square

Лемма 4.4. (1) В линейной системе $|H|$ не существует кривой, проходящей через 4 точки в общем положении.

(2) В линейной системе $|2H|$ не существует приведенной кривой, имеющей r особых точек и проходящей через s фиксированных точек (все точки в общем положении), если $3r + s > 8$.

(3) В линейной системе $|3H|$ не существует кривой, не содержащей E в качестве компоненты и имеющей 6 особых точек, 5 из которых в общем положении.

(4) Для приведенной кривой, не содержащей ни E , ни слоев, и принадлежащей линейной системе $|D|$, где $D = 3H$, $3H + F$ или $4H - E$, суммарный δ -инвариант не превосходит 6, 8 или 10 соответственно.

(5) Через 6 точек в общем положении проходит конечное число кривых из $|4H|$, распадающихся на 4 различные компоненты из $|H|$ и имеющих особенности в этих шести точках. Каждая из этих кривых имеет 12 нодов и не имеет других особенностей

Здесь "в общем положении" означает, что существует открытое по Зарисскому подмножество в пространстве рассматриваемых наборов точек такое, что каждый принадлежащий ему набор точек обладает требуемым свойством.

Доказательство. (1) Следует из равенства $\dim |H| = 3$.

(2) Коразмерность в $|2H|$ семейства приведенных кривых, имеющих r особых точек, равна r ; см., например, [9, следствие 6.3] (без ограничения общности мы можем считать, что все особенности — простые двойные точки). Условие прохождения через дополнительные s точек общего положения повышает коразмерность на s . Поэтому, предполагая, что проекция этого семейства на $(\mathcal{F}_2)^r$, сопоставляющая кривой множество ее особых точек, доминантна (а это другой способ сказать, что особенности находятся в общем положении), мы получаем $\dim |2H| - (r + s) \geq \dim (\mathcal{F}_2)^r$, т. е., $8 - r - s \geq 2r$, что эквивалентно $3r + s \leq 8$.

(3) Можно сразу исключить из рассмотрения неприведенные кривые, поскольку все они имеют вид $C' + 2C''$, $C', C'' \in |H|$, причем C'' может проходить не более чем через три заранее предписанные точки общего положения. Далее, заметим, что приведенная кривая из $|3H|$, имеющая 6 особых точек вне E , распадается на три попарно трансверсальные компоненты $C', C'', C''' \in |H|$, но такая кривая имеет не более 4 особых точек в силу утверждения (1).

(4) Арифметические роды дивизоров $3H$, $3H + F$ и $4H - E$ равны 4, 6 и 8 соответственно. Из сделанных предположений следует, что рассматриваемые кривые распадаются не более чем на три компоненты, откуда вытекает требуемая оценка.

(5) Все компоненты гладкие, и оно в совокупности имеют не менее 12 локальных ветвей в шести особых точках. С другой стороны, поскольку $\dim |H| = 3$ и эти шесть особых точек лежат в общем положении, каждая из четырех компонент проходит не более чем через три из них. Поэтому каждая компонента проходит ровно через три из этих шести особых точек, и она этим условием однозначно определена. Из этого вытекает требуемое утверждение о конечности. Из общности положения данных особых точек следует, что все 12 попарных пересечений различны и трансверсальны. \square

5. ЗАПРЕТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Предложение 5.1. *Не существуют гладкие вещественные кривые на \mathcal{F}_2 , принадлежащие линейной системе $|4H|$ и имеющие почти послойный изотопический тип $\mathcal{A}''(6, 0, 2)$, $\mathcal{A}''(4, 0, 3)$, $\mathcal{A}''(3, 1, 3)$ или $\mathcal{A}''(3, 0, 3)$.*

Доказательство следует той же схеме, что и в [25, 26], и использует версию метода Гильберта – Роона – Гудкова, основанную на утверждениях, доказанных в §4.

5.1. Запрет кривых типа $\mathcal{A}''(6, 0, 2)$. Согласно [25; лемма 3.3], существование гладкой кривой типа $\mathcal{A}''(6, 0, 2)$ влечет существование вещественной рациональной кривой с 9 простыми двойными точками почти послойного изотопического типа, изображенного на рис. 15(a). Обозначим этот тип через $\mathcal{A}''_9(6, 0, 2)$.

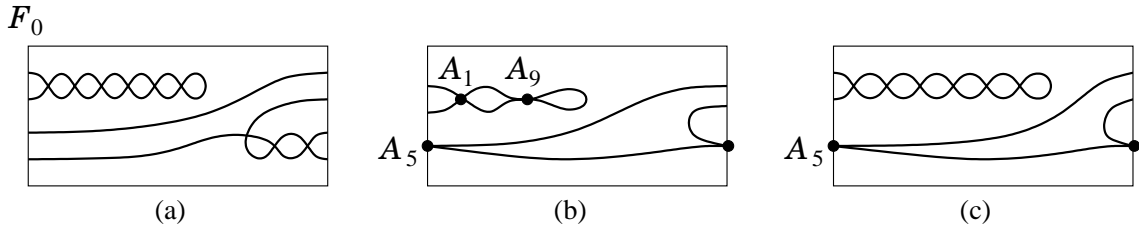


Рис. 15

Согласно [9; теорема 6.1(ii,iii)], семейство \mathcal{R} вещественных рациональных нодальных кривых из линейной системы $|4H|$ является гладким квазипроективным многообразием коразмерности 9. Обозначим через $\mathcal{R}(\mathcal{A}''_9(6, 0, 2))$ подсемейство в \mathcal{R} , образованное кривыми типа $\mathcal{A}''_9(6, 0, 2)$.

Начнем со следующего вспомогательного утверждения, а затем перейдем к методу Гильберта – Роона – Гудкова.

Лемма 5.2. *Приведенная приводимая вещественная кривая $C \in |4H|$, не содержащая слоя в качестве компоненты и имеющая только простые (т. е., $A - D - E$) особенности, не может являться пределом семейства вещественных рациональных кривых из $\mathcal{R}(\mathcal{A}''_9(6, 0, 2))$, у которых все особые точки лежат вне некоторой фиксированной окрестности кривой E .*

Доказательство. Предположим от противного, что такое семейство существует. Мы будем рассматривать его как деформацию данной приводимой кривой C . Ясно, что все компоненты кривой C рациональны. Следовательно, ее простые неприводимые особенности, т. е. A_{2k} , $k \geq 1$, E_6 , E_8 , деформируются без повышения рода (equigenetically, т. е. с максимально возможным числом узлов), так как иначе в результате деформации мы получили бы кривую положительного рода.

Если вещественная особенность кривой C имеет две комплексно сопряженные локальные ветви, то они то они принадлежат одной и той же неприводимой компоненте кривой C , так как иначе мы имели бы две комплексно сопряженные неприводимые компоненты, нетривиально пересекающие бесконечно много слоев, а значит, C не

могла бы деформироваться в кривую, пересекающую бесконечно много слоев в четырех вещественных точках. Тем самым, особенности кривой C , имеющие пару камплексно сопряженных ветвей деформируются без повышения рода (equigenerically).

Осталось рассмотреть особенности типа A_{2k-1} , $k \geq 1$, D_{2k} , $k \geq 2$, или E_7 , у которых все локальные ветви вещественны. Мы утверждаем, что любая нодальная деформация таких особенностей получается из нодальной деформации без повышения рода (nodal equigeneric deformation) дальнейшим сглаживанием некоторых нодов. Действительно, для особенностей A_{2k-1} , $k \geq 1$, и D_{2k} , $k \geq 2$, это легко следует из классификации вещественных нодальных гиперэллиптических кривых. Для особенности E_7 это следует из того известного факта, что любая вещественная рациональная нодальная плоская кватрика, все ноды которой вещественны, получается (с точностью до изотопии) сглаживанием точек пересечения вещественной кубики и прямой (см., например, [11]). Отметим также, что если $C \supset E$, то ненодальные особенности не могут лежать на E , так как в этом случае в рассматриваемой деформации возникли бы ноды в окрестности E , что невозможно по условию леммы.

Рассматриваемые деформации кривой C нодальны. С другой стороны, по лемме 6.2 (см. §6), любые локальные деформации особенностей кривой C могут быть независимо реализованы подходящей вариацией в линейной системе $|4H|$. Поэтому, с учетом вышеуказанного факта, мы заключаем, что существует приводимая нодальная кривая, являющаяся пределом вещественных рациональных кривых из $\mathcal{R}(\mathcal{A}_9''(6, 0, 2))$, имеющих особенности вне некоторой фиксированной окрестности кривой E . Тем самым, мы можем предполагать, что исходная кривая C нодальна.

Если C не содержит E , то доказываемое утверждение следует из леммы 2.3. Действительно, в противном случае мы имели бы семейство рациональных нодальных псевдоголоморфных кривых изотопического типа, изображенного на рис. 15(a), которые сходились бы к псевдоголоморфной кривой с еще одним нодом. Поскольку неприводимая псевдоголоморфная кривая, гомологичная kH , $k \leq 3$, имеет не более 4 нодов, образовавшийся нод соединяет один из дисков d_i' с областью d_0 (см. рис. 16(a)). При этом $i > 1$, так как иначе мы получили бы только одну глобальную одномерную ветвь, что невозможно в виду приводимости кривой. Однако это противоречит лемме 2.3.

Если же C содержит E , то требуемое утверждение следует из леммы 2.5. \square

Лемма 5.3. *Предположим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A}_9''(6, 0, 2)) \neq \emptyset$. Тогда $\partial\mathcal{R}(\mathcal{A}_9''(6, 0, 2))$ содержит вещественную рациональную кривую почти послойного типа на рис. 15(b), имеющую особенности A_1 , A_5 и A_9 .*

Доказательство. Мы разобьем доказательство на два шага: сначала докажем, что общая кривая из $\mathcal{R}(\mathcal{A}_9''(6, 0, 2))$ вырождается в кривую, изображенную на рис. 15(c), а затем, что эта кривая вырождается в требуемую.

Шаг 1. Для кривой $C \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_9(6, 0, 2))$, обозначим через $d_0(C)$, $d_i'(C)$, $i = 1, \dots, 6$, и d_i'' , $i = 1, 2$, замкнутые диски (лунки), ограниченные парами дуг кривой $\mathbb{R}C$ и соединенные между собой двойными точками, в соответствии с рис. 16(a). Введем частичный порядок на $\mathcal{R}(\mathcal{A}_9(6, 0, 2))$, полагая $C \prec C'$, если $d_0(C), d_1'(C), \dots, d_6(C), d_1''(C)$ — собственные подмножества в $d_0(C'), d_1'(C'), \dots, d_6(C'), d_1''(C')$ соответственно, а

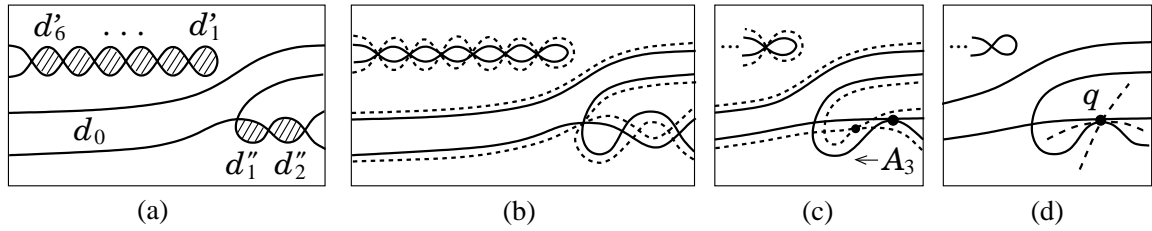


Рис. 16

$d_2''(C')$ — собственное подмножество в $d_2''(C)$. Например, если C (соответственно, C') — кривая, изображенная сплошной (соответственно, пунктирной) линией на рис. 16(b), то $C \prec C'$.

Согласно [26; предложение 2.4(b)], кривую $C \in \mathcal{R}(\mathcal{A}_9(6, 0, 2))$ можно выбрать так, чтобы все ее ноды были в общем положении кроме тех двух, которые лежат на $\partial d_2''(C)$ (здесь условие (6) из [26], выполнение которого требуется в [26; предложение 2.4(b)], принимает вид $2 \cdot 7 < -CK_{\mathcal{F}_2} = 16$). Пусть $\mathbf{p} = \text{Sing}(C) \setminus d_2''(C)$ и $\mathbf{q} = \text{Sing}(C) \cap d_2''(C)$. Обозначим через $S_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{R}(\mathcal{A}_9(6, 0, 2))$ страт, образованный кривыми у которых 7 нодов фиксировано в \mathbf{p} , и рассмотрим росток семейства $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C) \subset S_{\mathbf{p}}$ (см. лемму 4.2). Условие (22) леммы 4.2 выполнено, следовательно, $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C)$ является гладким одномерным вещественным многообразием (см. (23)). Далее, из леммы 4.1(3) можно вывести, что кривые $C' \neq C$ из $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C)$ пересекают C с кратностью 4 в каждом нод $z \in \mathbf{p}$ и пересекают C в окрестности каждого нода $z \in \mathbf{q}$ в двух вещественных точках. Следовательно, существует компонента связности M множества $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C) \setminus \{C\}$ такая, что вещественная часть кривых $C' \in M$ выглядит, как показано пунктирной линией на рис. 16(b), в частности, $C \prec C'$.

Это означает, что для любой кривой $C \in S_{\mathbf{p}}$ множество $\sigma(C) = \overline{\{C' \in S_{\mathbf{p}} \mid C \prec C'\}} \subset \overline{S_{\mathbf{p}}}$ непусто. Выберем некоторую непрерывную функцию $f : \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}$, строго монотонную для частичного порядка \prec . Например, можно положить $f(C) = \text{Area}(d_i'(C))$ при некотором $i = 1, \dots, 6$, или $f(C) = -\text{Area}(d_2''(C))$, где площадь задана по произвольной римановой метрике на $\mathbb{R}\mathcal{F}_2$. Пусть C_0 — элемент множества $\sigma(C)$, на котором достигается максимум функции f . Ясно, что $C_0 \in \overline{S_{\mathbf{p}}} \setminus S_{\mathbf{p}}$.

Докажем, что C_0 — неприводимая кривая, из чего будет следовать, что диск d_2'' стягивается в точку, тем самым, C_0 имеет 7 нодов, одну особенность типа A_3 (такнод) и почти послойный изотопический тип, изображенный на рис. 16(c) сплошной жирной линией. Чтобы доказать неприводимость кривой C_0 , мы сначала покажем, что C_0 не может содержать кратной компоненты C'_0 , принадлежащей $|H|$, $|2H|$, $|H + F|$ или $|H + 2F|$. Действительно, точки пересечения текущей кривой $C' \in S_{\mathbf{p}}$, стремящейся к C_0 , с любым слоем, пересекающим диски $d_i'(C')$, $i = 1, \dots, 6$, вещественны и они движутся так, что только две из них сближаются в то время как две другие от них удаляются, приближаясь к E с противоположных сторон. Поэтому обсуждаемая компонента C'_0 может принадлежать только к $|H|$, $|H + F|$ или $|H + 2F|$, значит она гладкая. Из последнего утверждения и из того наблюдения, что точки пересечения $C'_0 \cap F'$ с любым вещественным слоем F' , пересекающим диск $d_i'(C')$, $1 \leq i \leq 6$, лежат ниже интервала $d_i'(C') \cap F'$ (см. рис. 16(b)), следует что C'_0 не проходит через

шесть точек множества \mathbf{p} , лежащих на границе дисков $d'(C')$, $1 \leq i \leq 6$. Следовательно, оставшаяся часть кривой C_0 , принадлежащая линейной системе $|2H|$, $|H + E|$ или $|2E|$ соответственно, должна иметь особенности в этих шести точках. Однако это невозможно по лемме 4.4. Предположим теперь, что C_0 содержит E с кратностью два. Тогда верхние дуги дисков $d'_i(C')$, $i = 1, \dots, 6$, текущей кривой $C' \in S_{\mathbf{p}}$, стремящейся к C_0 , должны приближаться к дивизору E (см. рис. 16(b)), но тогда C_0 должна содержать двукратные слои, проходящие через шесть узлов из \mathbf{p} . Противоречие. Предположим, что C_0 содержит простую компоненту E и двукратный слой F' . Тогда дополнительная тригональная кривая $C'_0 \in |3H|$ не включает в себя E и содержит как минимум 6 особых точек, по крайней мере 5 из которых (а именно, точки из $\mathbf{p} \setminus F'$) в общем положении, что противоречит лемме 4.4(3). Случай приведенной приводимой C_0 невозможен по лемме 5.2, так как C_0 может иметь только ADE -особенности. Действительно, сумма δ -инвариантов расположенных в $\mathcal{F}_2 \setminus E$ особых точек приведенной кривой из $|4H|$ не превосходит 12. Поскольку C_0 имеет не менее 8 особенностей в $\mathcal{F}_2 \setminus E$, δ -инвариант каждой из них не больше пяти, следовательно, все они просты. Особая точка на E может образоваться только если $C_0 = C'_0 \cup E$, а поскольку $C'_0 \cdot E = 2$, такая особая точка принадлежит типу A или D .

Далее, положим $\mathbf{p} = \text{Sing}(C_0) \setminus d''_1(C_0)$, $\mathbf{q} = \text{Sing}(C_0) \cap d''_1(C_0)$, и рассмотрим страт $S_{\mathbf{p}}(A_3) \subset \mathcal{R}(A_9(6, 0, 2))$ вещественных рациональных кривых с 7 узлами и одной особенностью A_3 , почти послойно изотопных кривой C_0 . Зададим частичный порядок на $S_{\mathbf{p}}(A_3)$, полагая $C' \prec C''$, если $d_0(C')$, $d'_1(C')$, \dots , $d'_6(C')$ являются собственными подмножествами в $d_0(C'')$, $d'_1(C'')$, \dots , $d'_6(C'')$, соответственно, и $d''_1(C'')$ является собственным подмножеством в $d''_1(C')$. Рассмотрим росток семейства $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0) \subset S_{\mathbf{p}}(A_3)$. Как и выше, из леммы 4.2(1,2) следует, что $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0)$ — гладкое одномерное многообразие, и что любая кривая $C' \in M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0) \setminus \{C_0\}$ пересекает C_0 с кратностью 4 в каждом узле $z \in \mathbf{p}$, пересекает C_0 в окрестности нода из \mathbf{q} в двух точках, а в окрестности такнода A_3 — в 6 точках. Из этого, в частности, вытекают условия (13) и (14) в лемме 4.1(3), применив которую, мы хотим получить сравнение (15) и неравенство (16). Для этого нам надо проверить условия $\alpha_0 \neq 0$ и $\beta_0^2 \neq 4\alpha_0^2$. Обозначим через $\tilde{T}_{C_0} M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0)$ касательную прямую к $M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0)$ в линейной системе $|4H|$. В локальных координатах (x, y) в окрестности точки q , выбранных как в лемме 4.1(3), мы имеем $C_0 = \{f = 0\}$, $f = y^2 - x^4$ и $C^* = \{f + \lambda f^* = 0\}$ при $C^* \in \tilde{T}_{C_0} M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0)$.

Если $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, то мономы в f^* под диаграммой Ньютона многочлена f обращаются в ноль, и мы получаем $(C^* \cdot C_0)_q \geq 8$, что противоречит (13). Если $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то общая кривая $C^* \in \tilde{T}_{C_0} M_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(C_0)$ имеет две локальные ветви в q : $y = \xi x + O(x^2)$ и $y = \eta x^3 + O(x^4)$. Первая лежит вне области $-x^2 \leq y \leq x^2$, а вторая — внутри (см. рис. 16(d), где C' изображена пунктирной линией). Заметим однако, что C^* пересекает C_0 только в $\text{Sing}(C_0)$: с кратностью 4 в каждом узле из \mathbf{p} , с кратностью 2 и 6 в узле и такноде на $\partial d''_1$ соответственно. Следовательно, и нижняя половина ветви $y = \xi x + O(x^2)$, и левая половина ветви $y = \eta x^3 + O(x^4)$ продолжаютя так, что они обе должны пройти через нод z кривой C_0 , лежащий на $\partial d''_1$, что противоречит вышеупомянутому равенству $(C_0 \cdot C^*)_z = 2$.

Наконец, если $\alpha\beta \neq 0$, $\beta = \pm 2\alpha$, то $f^*(x, y) = \pm 4\alpha_0 x(y - x^2 + O(x^3))$, следовательно, $f^*|_{Q_1} = f^*(x, x^2) = x^k(\gamma + O(x))$, $\gamma \neq 0$, $k \geq 4$, откуда $(Q'_1 \cdot Q_1)_U \geq k - 2 \geq 2$, что про-

тиворечит равенству в (14). Итак, существует компонента связности M множества $M_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(C_0) \setminus \{C_0\}$ такая, что множество вещественных точек кривых $C' \in M$ такое, как изображено пунктиром на рис. 16(с), в частности, $C_0 \prec C'$.

Теперь, когда получено сравнение (15) и неравенство (16), те же аргументы, что и выше, доказывают существование неприводимой кривой $C_1 \in \overline{S_{\mathbf{p}}(A_3)} \setminus S_{\mathbf{p}}(A_3)$, получающейся стягиванием в точку диска d_1'' . Доказательство неприводимости C_1 дословно такое же, как и для C_0 , за исключением последнего этапа, где доказывается, C_1 не может быть приведенной и приводимой. Этот факт доказывается следующим образом. Для приведенной кривой из $|4H|$, не содержащей E , сумма δ -инвариантов особых точек, лежащих в $\mathcal{F}_2 \setminus E$, не превосходит 12. У C_1 не менее 7 особых точек в $\mathcal{F}_2 \setminus E$, поэтому δ -инвариант каждой из них не превосходит 6. Особенность кратности 4 не может возникнуть, так как нет ни одного слоя, все точки пересечения которого с текущей кривой $C' \in S_{\mathbf{p}}(A_3)$, $C' \rightarrow C_1$, сходились бы к одному пределу (см. рис. 16(с)). Поэтому применимы леммы 2.6 и 5.2.

Итак, кривая C_1 неприводима, она имеет 6 узлов и особенность A_5 , и ее послыйный изотопический тип такой, как на рис. 15(с).

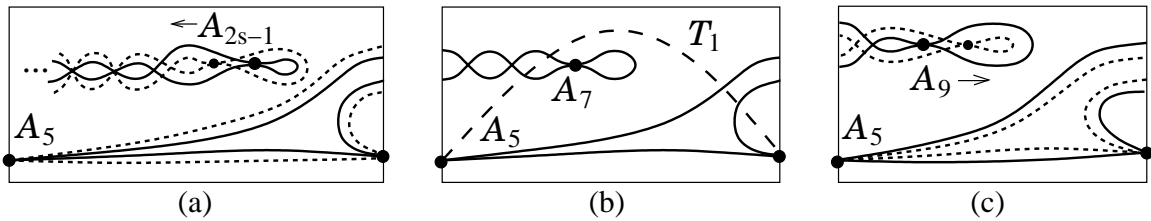


Рис. 17

Шаг 2. При $1 \leq s \leq 4$ обозначим через $S_{\mathbf{p}_s}(A_5, A_{2s-1}) \subset \overline{\mathcal{R}(A_9(6, 0, 2))}$ страт, состоящий из рациональных кривых с особенностями A_5, A_{2s-1} и с $6 - s$ узлами, имеющих почти послыйный тип как на рис. 17(a), и таких, что особые точки вне диска d_2' зафиксированы в точках множества \mathbf{p}_s . Например, кривая C_1 , полученная на шаге 1, принадлежит $S_{\mathbf{p}_1}(A_5, A_1)$. Согласно [26; предложение 2.4(b)], мы можем предполагать, что особые точки \mathbf{p}_s находятся в общем положении (включая обе бесконечно близкие точки в особенности A_5). Зададим частичный порядок на $S_{\mathbf{p}_s}(A_5, A_{2s-1})$, полагая $C' \prec C''$, если $d_0(C')$ и $d_i'(C')$, $1 \leq i \leq 7 - s, i \neq 2$, — собственное подмножество в $d_0(C'')$ и $d_i'(C'')$, $1 \leq i \leq 7 - s, i \neq 2$, соответственно, и $d_2'(C'')$ — собственное подмножество в $d_2'(C')$. Пользуясь леммой 4.2, как и на шаге 1, мы заключаем, что семейство $M_{\mathbf{p}_s,\mathbf{q}}(C_s) \subset S_{\mathbf{p}_s}(A_5, A_{2s-1})$ гладко и одномерно, из чего, по лемме 4.1, мы выводим, что существует компонента M множества $M_{\mathbf{p}_s,\mathbf{q}}(C_s) \setminus \{C_s\}$ такая, что $C_s \prec C' \in M$ (кривая C' на рис. 17(a) изображена пунктиром).

Как и на шаге 1, мы получаем кривую $C_{s+1} \in \overline{S_{\mathbf{p}_s}(A_5, A_{2s-1})} \setminus S_{\mathbf{p}_s}(A_5, A_{2s-1})$, приближаемую последовательностью кривых из $\{C' \in S_{\mathbf{p}_s}(A_5, A_{2s-1}) \mid C_s \prec C'\}$. Докажем, что C_{s+1} — неприводимая кривая, получающаяся при стягивании в точку диска d_2' , и следовательно, принадлежащая страту $S_{\mathbf{p}_{s+1}}(A_5, A_{2s+1})$. Мы приведем доказательство только для случая $s = 4$, поскольку для $s = 1, 2, 3$ доказательство аналогично.

Множество \mathbf{p}_4 состоит из двух точек: типа A_1 и типа A_5 , которые мы обозначим через p и q соответственно (см. рис. 17(b)). Текущую кривую из семейства $S_{\mathbf{p}_4}(A_5, A_7)$, стремящуюся к C_5 , мы будем обозначать через C' , а также обозначим $d'_i(C_5) = \lim_{C' \rightarrow C_5} d'_i(C')$. Для кривой D и подмножества $\Omega \subset \mathcal{F}_2$ через $\delta(D, \Omega)$ мы обозначим сумму δ -инвариантов особых точек кривой D , лежащих в Ω .

Ниже мы разберем все возможности для неприведенной или приводимой кривой C_5 и придем в каждом случае к противоречию.

Случай 1. C_5 содержит кратную компоненту T_1 , принадлежащую $|H|$, $|H + F|$ или $|H + 2F|$. Тогда точки пересечения текущей кривой C' с общим вещественным слоем, пересекающим диск d'_1 или d'_3 , движутся так, что две из них сближаются, а две другие удаляются в сторону E при $C' \rightarrow C_5$ (см. рис. 17(a)). Следовательно, C_5 содержит T_1 с кратностью 2, и вещественная ветвь $\mathbb{R}T_1$ проходит ниже дисков d'_1, d'_3 . В силу гладкости кривой T_1 , а также, поскольку нижние дуги, примыкающие к точке p , стремятся к T_1 , мы заключаем, что $p \notin T_1$ и что эти нижние дуги в пределе двукратно накрывают отрезок слоя F_p , проходящего через p . Следовательно, от C_5 отщепляется $2F_p$, что, в частности, исключает возможность $T_1 \in |H + 2F|$, а также влечет $E \subset C_5$.

Случай 1.1. C_5 содержит $2E$. Тогда нижние дуги, примыкающие к точке q , движутся в направлении E и в пределе двукратно накрывают слой F_q , проходящий через q (см. рис. 17(a)). Следовательно, от C_5 отщепляется $2F_q$, что оставляет единственную возможность $T_1 \in |H|$. В окрестности точки q выберем локальные координаты, в которых $C_4 = \{y^2 - x^6 = 0\}$. По построению все кривые из $S_{\mathbf{p}_4}(A_5, A_7)$ локально задаются уравнением $g = 0$, где $g \in \langle x^6, x^3y, y^2 \rangle$, а двойной слой $2F_q$ имеет вид $x^2 = 0$. Тогда T_1 задано уравнением $h(x, y) = 0$, где $x^2h^2 \in \langle x^6, x^3y, y^2 \rangle$, а значит $h \in \langle x^2, y \rangle$. Поскольку особые точки на $\partial d'_2$ стремятся к T_1 , мы делаем вывод, что T_1 пересекает диск $d'_2(C')$ при всех C' . В силу $T_1 \cdot C' = 8$, из этого следует, что T_1 квадратично касается ветвей кривой C_4 в точке q и при этом $\mathbb{R}T_1$ расположена как показано пунктиром на рис. 17(b). Однако такое расположение кривой $\mathbb{R}T_1$ невозможно: при движении $\mathbb{R}T_1$ вверх в пучке кривых из $|H|$, квадратично касающихся ветвей кривой C_4 в точке q , монотонно расширяется дуга, высекаемая на $\partial d'_2$, что приводит к появлению более чем $8 = T_1 \cdot C_4$ точек пересечения.

Случай 1.2. E однократно входит в C_5 (напомним, что в C_5 также входит двукратный слой $2F_p$). Тогда C_5 соержит двукратную кривую $2T_1$, $T_1 \in |H|$, и кривую $T'_1 \in |H|$, $T'_1 \neq T_1$. Поскольку T'_1 гладкая, T_1 должна проходить через q и пересекать диск d'_2 . К тому же, T_1 должна касаться C_4 в точке q . Действительно, в противном случае T_1 локально задавалась бы уравнением $h = 0$, где $h = x + \lambda y + O(x^2, y^2)$, а T'_1 — уравнением $h' = 0$, где $h' = y + O(x, y^2)$, но тогда $h'h^2 = x^2y + \dots \notin \langle x^6, x^3y, y^2 \rangle$. Поэтому, как и выше, мы заключаем, что $\mathbb{R}T_1$ расположена как на рис. 17(b), что невозможно.

Случай 2. C_5 содержит $2E$ и не содержит кратных компонент из $|H|$, $|H + F|$ или $|H + 2F|$. Тогда нижние дуги кривой C' , примыкающая к q , движутся в сторону E и в пределе, как и выше, двукратно накрывают слой F_q , проходящий через q (см. рис. 17(a)). Аналогично, верхние дуги, примыкающая к p , стремятся к E и при этом двукратно накрывают слой F_p , проходящий через p . Таким образом, C_5

включает в себя $2E$, $2F_p$ и $2F_q$. Оставшаяся часть $T_2 \in |2H|$ приведенная. Тогда $\delta(T_2, d'_2(C_5)) = \delta(C_5, d'_2(C_5)) \geq \delta(C', d'_2(C')) = \delta(A_7) + \delta(A_1) = 5$, что невозможно для приведенной кривой из $|2H|$.

Случай 3. C_5 содержит E (однократно), двойной слой $2F$ и приведенную кривую $T_3 \in |3H|$, не пересекающуюся с E . Если двойной слой $2F$ проходит через $d'_2(C_5)$, то верхние дуги дисков d'_1 и d'_3 должны сходиться к $E \cup F$ (см. рис. 17(a)). Поскольку левый конец $p \in \mathbf{p}_4$ верхней дуги диска d'_3 неподвижен, эта дуга стремится к слою F_p , а значит, C_5 содержит F_p , что противоречит сделанным предположениям. Следовательно, F не проходит через d'_2 . Поэтому $\delta(T_3, d'_2(C_5)) \geq 5$, а также T_3 имеет либо особенность A_5 в точке q (если $q \notin F$), либо особенности в p и q (если $p \notin F$). Тем самым, $\delta(T_3) \geq 7$, что невозможно для приведенной кривой $T_3 \in |3H|$, не содержащей E .

Случай 4. C_5 — приведенная приводимая кривая.

Случай 4.1. C_5 включает E и приведенную кривую $T_3 \in |3H + 2F|$, $T_3 \not\subset E$. Заметим, что $ET_3 = 2$. При этом трансверсальное пересечения T_3 и E в двух точках невозможно по лемме 2.5. Поэтому C_5 имеет в точке $E \cap T_3$ простую особенность. Деформация кривой C_5 в кривую C' индуцирует нодальную деформацию этой особенности. Однако любая нодальная деформация простой особенности пропускается через нодальную деформацию постоянного рода (см. доказательство леммы 5.2), следовательно деформация $C_5 \rightarrow C'$ пропускается через деформацию $C_5 \rightarrow E \cup T'_3$, в которой $T'_3 \in |3H + 2F|$ трансверсально пересекает E в двух точках, что было запрещено выше.

Случай 4.2. C_5 является приведенной кривой, не содержащей E . Докажем, что в этом случае C_5 имеет только простые особенности или особенности кратности 3 с $\delta \leq 7$, что сведет задачу к леммам 2.6 и 5.2.

Заметим, что нет вещественного слоя, все точки пересечения которого с кривой C' сходятся к одному пределу при $C' \rightarrow C_5$. Следовательно, C_5 не может иметь особенности кратности 4.

Если C_5 распадается на две или три неприводимые компоненты, то $\delta(C_5) \leq 11$. В силу оценок $\delta(C_5, p) \geq 1$, $\delta(C_5, q) \geq 3$ и $\delta(C_5, d'_2(C_5)) \geq 5$ из этого следует, что δ -инвариант каждой особенности кривой C_5 не превосходит 7, откуда вытекает требуемое утверждение.

Наконец, если C_5 распадается на четыре компоненты $T_1^{(i)} \in |H|$, $i = 1, 2, 3, 4$, то поскольку $T_1^{(i)} \cdot T_1^{(j)} = 2$, единственной не простой особенностью кратности 3 может быть только J_{10} .

Итак, кривая C_5 неприводима, а значит, она такая, как утверждается в лемме. \square

Леммы 5.4. *Не существует вещественной рациональной кривой $C \in |4H|$ почти послойного типа как на рис. 15(b) с особенностями A_1, A_5, A_9 .*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, такая кривая C существует. Методом Гильберта – Роона – Гудкова в версии, изложенной в §4 (см. доказательство леммы 5.3), мы покажем, что из этого предположения следует существование одной из вещественных рациональных кривых, изображенных на рис. 14(a,b)

и запрещенных леммой 3.1. Пусть \mathbf{p} — особая точка типа A_5 кривой C , и \mathbf{q} — остальные две ее особые точки. В обозначениях шага 2 доказательства леммы 5.3, C принадлежит страту $S_{\mathbf{p}}(A_5, A_9)$, на котором мы зададим частичный порядок следующим образом: $C' \prec C''$ если $d_0(C'')$, $d'_1(C'')$ и $d'_2(C'')$ — собственные подмножества в $d_0(C')$, $d'_1(C')$ и $d'_2(C')$ соответственно. По лемме 4.2, росток $M_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(C) \subset S_{\mathbf{p}}(A_5, A_9)$ гладок и одномерен. Более того, лемма 4.1 применима (например, проверка условий из части (3) аналогична той, что была проведена в доказательстве леммы 5.3). Из соотношений (14), (15) и (16) мы заключаем, что существует компонента M множества $M_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(C) \setminus \{C\}$ такая, что $C \prec C'$ для всех $C' \in M$ (см. рис. 17(с)).

Как и в доказательстве леммы 5.3, мы получаем кривую $\hat{C} \in \overline{S}_{\mathbf{p}}(A_5, A_9) \setminus S_{\mathbf{p}}(A_5, A_9)$, приближаемую последовательностью кривых из $\{C' \in S_{\mathbf{p}}(A_5, A_9) \mid C \prec C'\}$. Докажем, что кривая \hat{C} неприводима и, следовательно, она такая как на рис. 14(а), если диск d'_1 стягивается в точку, или как на рис. 14(б), если особенность типа A_1 попадает на слой F_0 .

Заметим, что \hat{C} не может содержать E . Действительно, рассмотрим вещественные слои F' , близкие к слою F_q , проходящему через q типа A_5 . Точки пересечения этих слоев с текущей кривой $C' \in S_{\mathbf{p}}(A_5, A_9)$, $C' \rightarrow \hat{C}$, не стремятся к E (см. рис. 17(с)).

Далее, \hat{C} не может содержать кратной компоненты. Действительно, движение точек пересечения кривой C' со вышеуказанными слоями F' таково, что если есть кратная компонента, то ее кратность равна двум. Кроме того, одна из точек пересечения кривой C' со слоем, проходящим через $d'_3(C')$ удаляется от трех остальных точек, следовательно, \hat{C} может содержать только одну кратную компоненту $2T_1$, и при этом $T_1 \in |H|$. Если T_1 не проходит через q (особая точка типа A_5), то оставшаяся часть T_2 кривой \hat{C} , должна иметь как минимум особенность A_5 в точке q , что невозможно, так как T_2 — приведенная кривая из $|2H|$. Следовательно, T_1 проходит через q . Более того, движение точек пересечения кривой C' со слоями F' таково, что T_1 должна пересекать каждую локальную ветвь кривой C' в q с кратностью ≥ 3 , располагаясь между ними, а значит, поскольку $(T_1 \cdot C')_q \geq 6$ и $T_1 C' = 8$, множество T_1 не может пересекать ни один из дисков $d'_i(C')$, $i = 1, 2$. Следовательно, особая точка, являющаяся пределом особенности A_9 кривых C' , является особой точкой кривой T_2 , что невозможно, так как у приведенной кривой из $|2H|$ не может быть особенности с δ -инвариантом, большим чем $\delta(A_9) = 5$.

Осталось исключить случай приведенной неприводимой кривой \hat{C} с компонентами из $|kH|$, $1 \leq k \leq 3$. Это делается так же, как и в случае 4.2 в доказательстве неприводимости кривой C_5 (конец доказательства леммы 5.3). \square

5.2. Запрет кривых типа $\mathcal{A}''(4, 0, 3)$, $\mathcal{A}''(3, 1, 3)$ и $\mathcal{A}''(3, 0, 3)$. Предположим, что существует гладкая алгебраическая кривая $C \in |4H|$ типа $\mathcal{A}''(4, 0, 3)$, $\mathcal{A}''(3, 1, 4)$ или $\mathcal{A}''(3, 0, 3)$. Обозначим через τ_a, τ_b, τ_c компоненты дополнения к вещественной ветви типа \mathcal{A} в $\mathbb{R}\mathcal{F}_2 \setminus (F_0 \cup E)$, помеченные соответствующими буквами a, b, c на рис. 1(справа). Обозначим дуги этой ветви через $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, нумеруя их от левого верхнего угла на рис. 1 к правому нижнему. Обозначим диски, ограниченные овалами в областях τ_a, τ_c , через O_i^a, O_j^c соответственно, нумеруя их от середины к краю.

Поскольку $\dim |2H| = 8$, через любые 8 точек на $\mathcal{F}_2 \setminus E$ можно провести кривую из

линейной системы $|2H|$. Используя это наблюдение, мы выродим C в кривую с 8 нодами следующим образом. Пусть $C_0 = C$. Предполагая, что вырождение $C_k \{f_k = 0\}$ кривой C с $0 \leq k \leq 7$ нодами построенным, рассмотрим пучок кривых $\{f_k + tg_k^2 = 0\}$, $t \geq 0$, где $\{g_k = 0\} \in |2H|$ проходит через ноды кривой C_k , и знак выбран так, что область τ_b и диски O_i^a, O_j^c растут, а диски, ограниченные овалами в области τ_b уменьшаются при возрастании t в интервале $[0, \infty[$. Заметим, что при этой деформации точки пересечения со слоем F_0 остаются вещественным до тех пор, пока наступит первое вырождение C_{k+1} (а оно с необходимостью наступит в силу строго монотонного изменения вещественной геометрии кривой).

Проанализируем геометрию кривой C_{k+1} . Предположим, что $k \leq 6$ и C_k — неприводимая кривая, единственными особенностями которой являются k вещественных нодов. Согласно [25; лемма 3.4], малым возмущением кривой C_k можно привести все ноды в общее положение, а также добиться того, что C_k будет общим членом линейной подсистемы в $|4H|$, состоящей из кривых с k фиксированными нодами. Тогда из [25; леммы 3.5 и 3.6] следует, что C_{k+1} либо является неприводимой вещественной кривой, у которой $k + 1$ вещественный нод, либо имеет вид $E \cup C'$, где $C' \in |4H - E|$ — неприводимая кривая, трансверсально пересекающая E в двух точках. Однако последний случай можно исключить, выбирая вспомогательную кривую $\{g_k = 0\} \in |2H|$ так, чтобы она проходила через $k \leq 6$ нодов и две точки из $C_k \cap F_0$, ближайšie к E . Теперь предположим, что $k = 7$ и C_7 — неприводимая кривая с 7 вещественными нодами в общем положении, C_7 общий член семейства с 7 фиксированными нодами. Опять из [25; леммы 3.5 и 3.6] следует, что C_8 — либо неприводимая кривая в 8 вещественными нодами, либо $C_8 = E \cup C'$, где $C' \in |4H - E|$ — неприводимая кривая, имеющая 7 вещественных нодов в общем положении и трансверсально пересекающая E в двух точках, либо $C_8 = C_8^{(1)} \cup C_8^{(2)}$, где $C_8^{(1)}, C_8^{(2)} \in |2H|$ — неприводимые вещественные кривые, пересекающиеся в 8 вещественных точках. Второй вариант запрещен леммой 2.5.

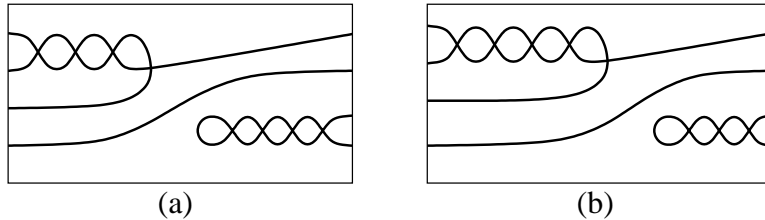


Рис. 18

Теперь предположим, что C — кривая типа $\mathcal{A}''(4, 0, 3)$, и C_8 — кривая с 8 нодами, построенная по вышеприведенному алгоритму. Согласно оценке Безу на пересечение с вещественными слоями, никакие два диска O_i^a, O_{i+1}^a или диск O_4^a и дуга ρ_1 (соответственно, два диска O_i^c, O_{i+1}^c или диск O_3^c и дуга ρ_4) не могут соединяться посредством двух нодов между ними. Далее, уединенный нод не может возникнуть в областях τ_a и τ_c , а также петля не может появиться на дугах ρ_2, ρ_3 , поскольку надлежащее сглаживание этих нодов (см. лемму 4.3) дало бы $(M - 1)$ -кривые типа $\mathcal{A}''(5, 0, 3)$, $\mathcal{A}''(4, 0, 4)$ или $\mathcal{A}''(4, 1, 3)$, запрещенные в [25, 26]. Следовательно, по леммам 2.3 и 2.4, кривая

C_8 , получающаяся из C , должна быть как на рис. 18(a,b). Такая кривая C_8 не допускает распада $C_8^{(1)} \cup C_8^{(2)}$, где $C_8^{(1)}, C_8^{(2)} \in |2H|$, поскольку у нее есть глобальная вещественная ветвь, пересекающая F_0 в трех точках. Таким образом, C_8 — неприводимая эллиптическая кривая. Рассмотрим пучок $C_8 + t(C'_8)^2$, где $C'_8 \in |2H|$ проходит через все ноды кривой C_8 , и знаки выбраны так, что диски O_i^a, O_j^c расширяются, когда t возрастает в интервале $[0, \infty[$. Мы приходим к противоречию, так как геометрия кривой меняется строго монотонным образом, а с другой стороны, ни одно дальнейшее вырождение C_9 невозможно:

- (i) Кривая C_9 , включающая в себя удвоенную компоненту E не может возникнуть, так как наличие 8 нодов в $\mathcal{F}_2 \setminus E$, семь из которых в общем положении, отсавляет только одну возможность $C_9 = 2E \cup 2C'$, $C' \in |H + 2F|$. Однако тогда все кривые из пучка $f_8 + tg^2$ будут приводимыми (действительно, $C_9 = \{h^2 = 0\}$ влечет $f_8 + tg^2 = (ag_8)^2 - (bh)^2 = (ag_8 + bh)(ag_8 - bh)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$), что противоречит неприводимости кривой C_8 .
- (ii) Кривая $C_9 = E \cup C'$, где $C' \in |4H - E|$ — приведенная кривая, не содержащая E , запрещена леммой 2.5. Кривая $C_9 = E \cup C'$, с неприведенной кривой $C' \in |4H - E|$, не содержащей E , тоже невозможна. Действительно, тогда было бы $C' = C'_1 \cup 2C'_2$, где либо $C'_1 \in |H|$, $C'_2 \in |H + F|$, либо $C'_1 \in |H + 2F|$, $C'_2 \in |H|$. Однако в первом случае C'_1 гладкая, и C'_2 проходит не более чем через 6 нодов кривой C_8 (по теореме Безу), а во втором случае C'_2 проходит не более чем через 4 нода кривой C_8 (тоже по теореме Безу), тогда как C'_1 может иметь не более двух особых точек. Следовательно, C_9 не может содержать E , а значит, не может содержать и никакой слой. Поэтому все компоненты C_9 принадлежат $|kH|$, $k = 1, 2, 3, 4$.
- (iii) Неприводимая кривая C_9 с ≥ 9 нодов запрещена леммами 2.3 и 2.4.
- (iv) Кривая $C_9 = C' \cup C''$, где $C', C'' \in |2H|$, не может возникнуть. Действительно, если C' проходит через все 8 нодов кривой C_8 , то по теореме Безу C'' тоже через них всех проходит. Следовательно, все кривые пучка $f_8 + tg^2$ лежат в линейной системе, натянутой на F_1^2, F_1F_2 и F_2^2 , где F_1, F_2 порождают в $|2H|$ пучок кривых, проходящих через $\text{Sing}(C)$. Это противоречит неприводимости кривой C_8 . Если C' особа в некотором ноде кривой C_8 , то по теореме Безу C' проходит не более чем через 4 других нодов кривой C_8 , а значит, C'' должна быть особой в трех нодах кривой C_8 и либо проходить еще через два нода кривой C_8 , либо иметь особенность в еще одном ноде, что невозможно, так как все ноды кривой C_8 кроме одного в общем положении.
- (v) Наконец, кривая C_9 не разлагается в виде $C' \cup C''$, где $C' \in |H|$, $C'' \in |3H|$. Действительно, в этом случае C'' должна быть особой в 4 нодах кривой C_8 и должна проходить через остальные 4 нода кривой C_8 . Если C'_8, C''_8 порождают пучок кривых в $|2H|$, проходящих через $\text{Sing}(C)$, по $(AF + BG)$ -теореме Нетера, C'' принадлежит пучку кривых, натянутому на $C'_8G_1, C''_8G_2, G_1, G_2 \in |H|$. Следовательно, C_8 принадлежит линейной подсистеме в $|4H|$, натянутой на F_1^2, F_1F_2 и F_2^2 . Как и в предыдущем случае, это противоречит неприводимости кривой C_8 .

Предположим, что C — кривая типа $\mathcal{A}''(3, 0, 3)$ или $\mathcal{A}''(3, 1, 3)$. Как и выше, мы по-

строим кривую с 8 нодами C_8 . Заметим, что к C применимы вышеупомянутые оценки Безу, и что уединенный нод не может образоваться в областях τ_a и τ_c , поскольку тогда сглаживание дало бы только что запрещенную кривую типа $\mathcal{A}''(4, 0, 3)$. Если появится петля в области τ_b как, например, на рис. 19(a), продолжим деформацию в том же пучке, превращая петлю в овал, расположенный в области τ_b . Если этот овал, стянется в уединенный нод, то мы все равно продолжим деформацию в том же пучке (при этом нод исчезнет). В силу лемм 2.3, 2.4 и 2.5, в результате мы получим кривую C_8 как на рис. 8(a), возможно, с овалом в области τ_b . По лемме 2.1, такая кривая распадается на две компоненты, которые мы, как и в лемме 2.1, обозначим через C_1 и C_2 .

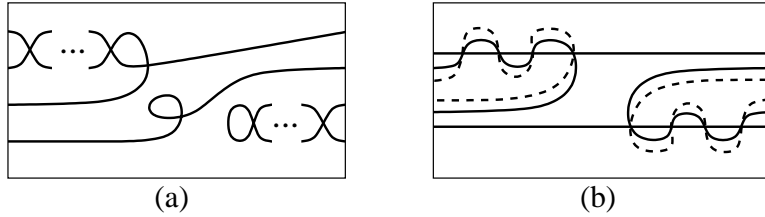


Рис. 19

Рассмотрим пучок $C_8 + tC_2^2 = C_1^{(t)}C_2$, ориентированный таким образом, что область τ_b и диски O_i^a, O_j^c увеличиваются при возрастании t в интервале $[0, \infty[$ (см. рис. 19(b), где подвижная компонента $C_1^{(t)}$, $t > 0$, изображена пунктиром). Те же рассуждения, что и выше, показывают, что никакие дальнейшие вырождения невозможны, что ведет к противоречию и, тем самым, завершает доказательство теоремы 1(a).

6. СГЛАЖИВАНИЯ ОСОБЕННОСТИ X_{21} vs. КРИВЫЕ НА \mathcal{F}_2

Особенность X_{21} плоской кривой — это центр четырех гладких ветвей, квадратично касающихся между собой. С точностью до локального (эквивариантного в вещественном случае) диффеоморфизма такая особенность задана функцией $f(x, y) = \sum_{i+2j \geq 8} a_{ij} x^i y^j$, аналитической в окрестности начала координат, где младшая (1, 2)-квазиоднородная форма $f_8(x, y) = \sum_{i+2j=8} a_{ij} x^i y^j$ невырождена (т.е. особа только в начале координат). Заметим, что $a_{04} \neq 0$, и многочлен $\hat{f}_8(x) := f_8(x, 1)$ не имеет кратных корней.

Предположим, что f вещественна. Положим $B_\delta = D_{\delta,x} \times D_{\delta,y} \subset \mathbb{C}^2$, где $D_{\delta,x}$ и $D_{\delta,y}$ — замкнутые диски радиуса $\delta > 0$ с центром в начале координат, лежащие на осях x и y соответственно. Мы можем определить эквивариантную сюръекцию $\Phi_\delta : B_\delta \rightarrow \mathcal{F}_2$, которая коммутирует с расслоениями $\pi : \mathcal{F}_2 \rightarrow E$ и $\pi_\delta : B_\delta \rightarrow D_{\delta,x}$, диффеоморфно отображает $\text{Int } B_\delta$ на $\mathcal{F}_2 \setminus (F_0 \cup E)$, а каждый диск $\{\tau\} \times D_{\delta,y}$ — на слой $F \subset \mathcal{F}_2$, стягивая $\{\tau\} \times \partial D_{\delta,y}$ в точку $F \cap E$, а также отображает полноторий $\partial D_{\delta,x} \times D_{\delta,y}$ на F_0 , стягивая в точку каждую окружность $\partial D_{\delta,x} \times \{x\}$, $z \in D_{\delta,y}$, и стягивая $\partial D_{\delta,x} \times \partial D_{\delta,y}$ в точку $F_0 \cap E$.

Выберем δ так, что $\{f = 0\} \cap (D_{\delta,x} \times \partial D_{\delta,y}) = \emptyset$, и каждый открытый слой расслоения $\pi_\delta : B_\delta \rightarrow D_{\delta,x}$ пересекает в одной точке каждую ветвь кривой $\{f = 0\}$

(мы назовем B_δ *регулярной окрестностью* особенности $f = 0$). Под *сглаживанием* особенности $f = 0$ мы понимаем однопараметрическое вещественно-аналитическое семейство $\psi_t = 0$, $t \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ такое, что $\psi_0 = f$, и при этом каждое аналитическое множество $\psi_t = 0$ является гладким, не пересекается с $D_{\delta,x} \times \partial D_{\delta,y}$ и пересекает каждый открытый слой $\{\tau\} \times \text{Int } D_{\delta,y}$, $\tau \in D_{\delta,x}$, с кратностью 4.

Два сглаживания $\varphi_t^{(1)}$, $t \in [0, \varepsilon]$, и $\varphi_t^{(2)}$, $t \in [0, \varepsilon]$, особенности $f = 0$ называются *эквивариантно почти послойно изотопически (ЭППИ) эквивалентными*, если $\{\varphi_\varepsilon^{(1)} = 0\} \cap B_\delta$ можно соединить с $\{\varphi_\varepsilon^{(2)} = 0\} \cap B_\delta$ эквивариантной C^∞ -изотопией бидиска B_δ , оставляющей инвариантными $D_{\delta,x} \times \partial D_{\delta,y}$ и $\partial D_{\delta,x} \times D_{\delta,y}$, и такой, что пересечение с каждым слоем проекции $\pi_\delta : B_\delta \rightarrow D_{\delta,x}$ состоит из 4 точек (учитывая кратности).

Теорема 5. Пусть $f = 0$ — особенность плоской вещественной кривой типа X_{21} , и B_δ — регулярная окрестность. Тогда для любого сглаживания $\psi_t = 0$, $t \in [0, \varepsilon]$, особенности $f = 0$ существует гладкая вещественная алгебраическая кривая $C \in |4H|$ и эквивариантный C^∞ -автоморфизм поверхности \mathcal{F}_2 , коммутирующий с проекцией $\pi : \mathcal{F}_2 \rightarrow E$, сохраняющий F_0 и E , и такой, что C почти послойно изотопно $\Phi_\delta(\{\psi_\varepsilon = 0\} \cap B_\delta)$.

Замечание 6.1. Аналогичный результат был получен для простой кратной точки порядка ≤ 5 [29] и порядка 6 [17]. По-видимому, в общем случае утверждение теоремы неверно.

Доказательство. (1) Опишем общую стратегию доказательства.

Конструкция склеивания карт Виро (patchworking) [31; раздел 1.7], см. также [32], каждой гладкой вещественной кривой $C \in |4H|$ на \mathcal{F}_2 сопоставляет некоторое сглаживание вещественной особой точки типа X_{21} , связанное с исходной кривой C как указано в теореме.

Нам требуется доказать существование гладкой вещественной кривой $C \in |4H|$, применением к которой конструкции склеивания карт получается сглаживание, ЭППИ-эквивалентное данному. Для этого мы обратим конструкцию склеивания карт. А именно, по данному сглаживанию $\psi_t = 0$, $t \in [0, \varepsilon]$, рассматриваемой особой точки мы сначала построим особую кривую $C' \in |4H|$, особенности которой можно так локально сгладить, чтобы получившаяся C^∞ -кривая была ЭППИ-эквивалентна $\Phi_\delta(\{\psi_\varepsilon = 0\} \cap B_\delta)$. Затем мы докажем, что все возможные локальные сглаживания особенности реализуемы возмущениями кривой C' в линейной системе $|4H|$.

(2) Заметим, что существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое что после замены координат $(x, y) \mapsto (x, y + \alpha x^2)$ коэффициенты формы $f_8(x, y)$ удовлетворяют условию

$$32a_{04}a_{80} - 2a_{23}a_{61} \neq 0. \quad (29)$$

Действительно, эта замена координат превращает левую часть неравенства (29)

$$(16a_{04}a_{42} - 6a_{23}^2)\alpha^2 + (24a_{04}a_{61} - 4a_{23}a_{42})\alpha + (32a_{04}a_{80} - 2a_{23}a_{61}),$$

и это выражение тождественно обращается в нуль только если f_8 является четвертой степенью бинома. Поскольку рассматриваемая замена координат не влияет на истинность утверждения теоремы, мы можем предполагать, что (29) выполнено.

(3) Рассмотрим сглаживающее аналитическое семейство

$$g_t(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} b_{ij}(t) x^i y^j, \quad b_{ij}(0) = \begin{cases} a_{ij}, & i + 2j \geq 8, \\ 0, & i + 2j < 8, \end{cases}$$

Существуют аналитические функции $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$, обращающиеся в ноль при $t = 0$ и такие, что $g_t(x + \gamma(t), y + \alpha(t) + \beta(t)x)$ имеет нулевые коэффициенты при y^3, xy^3 и x^7 . Действительно, якобиан при $t = 0$ соответствующей системы уравнений на α, β, γ равен $4a_{04}(32a_{04}a_{80} - 2a_{23}a_{61})$, значит он не равен нулю в силу (29). Поэтому мы можем предполагать, что $b_{03} = b_{13} = b_{70} \equiv 0$.

(4) Фиксируем $c_0 > 0$ и зададим $\tau(t) > 0$ так, что

$$\sum_{i+2j < 8} |b_{ij}(t)|^2 \tau(t)^{8-i-2j} = c_0, \quad t > 0.$$

Поскольку $\sum_{i+2j < 8} |b_{ij}(t)| > 0$ и $b_{ij}(0) = 0$ при $i + 2j < 8$, функция $\tau(t)$ корректно определена и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow 0} \tau(t) = \infty$. В семействе

$$\begin{aligned} \tau(t)^8 g_t(x\tau(t)^{-1}, y\tau(t)^{-2}) &= \sum_{i+2j > 8} b_{ij}(t) \tau(t)^{-(i+2j-8)} x^i y^j \\ &+ \sum_{i+2j=8} b_{ij}(t) x^i y^j + \sum_{i+2j < 8} b_{ij}(t) \tau(t)^{8-i-2j} x^i y^j, \end{aligned}$$

первая сумма стремится к нулю, а вторая сумма стремится к $f_8(x, y)$ при $t \rightarrow 0$. К тому же, в силу (30), существует последовательность $t_n \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots$, такая, что третья сумма тоже имеет предел, так что

$$\sum_{i+2j < 8} |a_{ij}| = c_0 > 0 \quad \text{и} \quad a_{03} = a_{13} = a_{70} = 0. \quad (31)$$

(5) Если кривая $G(x, y) = 0$ невырождена в \mathbb{C}^2 , то она задает в \mathcal{F}_2 гладкую вещественную кривую из линейной системы $|4H|$, ЭППИ-эквивалентную кривой $\Phi(\{g_t(x, y) = 0\})$ при $t \neq 0$. Предположим, что кривая $G(x, y) = 0$ особа в \mathbb{C}^2 . Тогда

- (i) $G(x, y) = 0$ не имеет особенностей типа X_{21} в \mathbb{C}^2 в силу (31).
- (ii) По построению, существует (малая) вещественная деформация многочлена $G(x, y)$, сглаживающая особые точки кривой $G = 0$ в \mathbb{C}^2 и совпадающая с точностью до замены координат с данным сглаживающим семейством.

Обозначим через $\mathcal{P}(k) \subset \mathbb{C}[x, y]$ линейное подпространство, порожденное мономами $x^i y^j$ при $i + 2j = k$, и положим

$$\mathcal{P}_{(k)} = \bigoplus_{i \leq k} \mathcal{P}(i), \quad \mathcal{P}^{(k)} = \bigoplus_{i \geq k} \mathcal{P}(i).$$

Из леммы 6.2 (см. ниже) следует, что $\mathcal{P}_{(8)}$ индуцирует совместную версальную деформацию всех особых точек кривой $G = 0$ в \mathbb{C}^2 , т. е. малым возмущением коэффициентов мономов $x^i y^j$, $i + 2j \leq 8$, можно независимо реализовать любые наперед заданные (с точностью до локального диффеоморфизма) сглаживающие семейства для всех особых точек кривой $G = 0$ в \mathbb{C}^2 . Таким образом, мы получаем многочлен $\tilde{G}(x, y) = \sum_{i+2j \leq 8} \tilde{a}_{ij} x^i y^j$ близкий к $G(x, y)$, который определяет в \mathcal{F}_2 вещественную кривую, ЭППИ-эквивалентную кривой $\Phi(\{g_t(x, y) = 0\})$, $t \neq 0$. \square

Лемма 6.2. Пусть $G = 0$, где

$$G(x, y) = f_8(x, y) + \sum_{i+2j < 8} a_{ij} x^i y^j = 0 \quad \text{и} \quad f_8(x, y) = \sum_{i+2j=8} a_{ij} x^i y^j,$$

— приведенная кривая в \mathbb{C}^2 , не имеющая особенностей X_{21} , причем квазиоднородный многочлен f_8 невырожден (т.е. разлагается в произведение четырех различных двучленов). Тогда линейное пространство $\mathcal{P}_{(8)} \subset \mathbb{C}[x, y]$, порожденное мономами $x^i y^j$, $0 \leq i + 2j \leq 8$, порождает совместную версальную деформацию всех особенностей кривой $G = 0$.

Доказательство. Как показано в части (2) доказательства теоремы 5, мы можем предполагать, что коэффициенты многочлена f_8 удовлетворяют условию (29). Разобьем доказательство леммы на несколько шагов.

(1) Известно, что версальная деформация каждой особой точки $(x_0, y_0) \in \text{Sing}(G = 0)$ порождена произвольным базисом фактор-кольца $\mathbb{C}\{x - x_0, y - y_0\} / \langle G, G_x, G_y \rangle$, где через $\mathbb{C}\{*, *\}$ обозначено кольцо сходящихся степенных рядов, а через $\langle G, G_x, G_y \rangle$ — идеал, порожденный многочленами G, G_x, G_y (идеал Тьюриной). Таким образом, достаточно доказать сюръективность следующих двух проекций:

$$\text{pr}_1 : \mathbb{C}[x, y] / \langle G, G_x, G_y \rangle \rightarrow \bigoplus_{(x_0, y_0) \in \text{Sing}(G=0)} \mathbb{C}\{x - x_0, y - y_0\} / \langle G, G_x, G_y \rangle, \quad (32)$$

$$\text{pr}_2 : \mathcal{P}_{(8)} \rightarrow \mathbb{C}[x, y] / \langle G, G_x, G_y \rangle.$$

(2) Для доказательства сюръективности проекции pr_1 рассмотрим нульмерную подсхему $Z \subset \mathcal{F}_2$ с носителем в $\text{Sing}(G = 0)$, заданную в каждой точке локальным идеалом Тьюриной. Имеет место точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{Z/\mathcal{F}_2}(nD) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}_2}(nD) \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

для произвольного обильного дивизора D . Поскольку $H^1(\mathcal{J}_{Z/\mathcal{F}_2}(nD)) = 0$ при $n \gg 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{F}_2}(nD)) / H^0(\mathcal{J}_{Z/\mathcal{F}_2}(nD)) &\simeq H^0(\mathcal{O}_Z) \\ &= \bigoplus_{(x_0, y_0) \in \text{Sing}(G=0)} \mathbb{C}\{x - x_0, y - y_0\} / \langle G, G_x, G_y \rangle, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что rg_1 является изоморфизмом.

(3) Докажем теперь сюръективность проекции rg_2 .

Вещественной заменой координат $(x, y) \mapsto (x, y + \alpha x^2)$ (которая не влияет на истинность рассматриваемого утверждения), можно сделать нулевым коэффициент a_{23} при $x^2 y^3$, оставляя выполненными равенства $a_{03} = a_{13} = 0$ и свойства (i), (ii) из шага (5) доказательства теоремы 5.

Запишем G в виде $G = f_8 + \sum_{k < 8} f_k$, $f_k \in \mathcal{P}(k)$, $k \geq 0$, и положим $k_0 = \max\{k < 8 \mid f_k \neq 0\}$ (заметим, что k_0 корректно определено, так как $G \neq f_8$).

Поскольку форма f_8 невырождена, производные $f_{8,x}, f_{8,y}$ взаимно просты, откуда непосредственно вытекает тот факт, что идеал $\langle f_{8,x}, f_{8,y} \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ содержит идеал $\mathcal{P}^{(11)} = \langle x^i y^j, i + 2j \geq 11 \rangle$ и, следовательно, любой многочлен из $\mathcal{P}^{(11)}$ сравним с $AG_x + BG_y$ по модулю $\mathcal{P}_{(10)}$ с подходящими $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что любой многочлен из $\mathcal{P}(s)$, $s = 9, 10$, можно записать в виде $AG + BG_x + CG_y$ по модулю $\mathcal{P}_{(s-1)}$ с некоторыми $A, B, C \in \mathbb{C}[x, y]$.

(3i) Предположим, что либо $k_0 < 7$, либо $k_0 = 7$ и $f_7 \notin \text{Span}_{\mathbb{C}}\{f_{8,x}, x f_{8,y}\}$. Мы утверждаем, что в этом случае

$$f_{k_0} \mathcal{P}(s - k_0) + f_{8,x} \mathcal{P}(s - 7) + f_{8,y} \mathcal{P}(s - 6) = \mathcal{P}(s) \quad \text{при } s = 9, 10. \quad (33)$$

Действительно, нарушение одного из двух условий (33) влечет

$$f_{k_0} \in \langle f_{8,x}, f_{8,y} \rangle. \quad (34)$$

Мы покажем это в случае $k_0 = 7$ и $s = 10$; другие случаи аналогичны. В виду равенства $\dim \mathcal{P}(10) / (f_{8,x} \mathcal{P}(3) + f_{8,y} \mathcal{P}(4)) = 1$, рассматриваемая ситуация сводится к равенствам

$$xy f_7 = A_3 f_{8,x} + A_4 f_{8,y}, \quad x^3 f_7 = B_3 f_{8,x} + B_4 f_{8,y}, \quad A_i, B_i \in \mathcal{P}(i), \quad i \geq 0.$$

Поскольку $f_{8,x}, f_{8,y}$ взаимно просты, мы получаем

$$A_3 = y A_1, \quad B_3 = x^2 A_1, \quad A_4 = x^2 B_2, \quad B_4 = y B_2,$$

следовательно, $x f_7 = \alpha x f_{8,x} + (\beta x^2 + \gamma y) f_{8,y}$, где $\gamma = 0$ в силу $a_{04} \neq 0$, откуда получаем (34).

Теперь покажем, что (34) не может выполняться. При $k_0 = 7$ соотношение (34) противоречит предположению $f_7 \notin \text{Span}_{\mathbb{C}}\{f_{8,x}, x f_{8,y}\}$, сделанному в начале шага (3i). При $k_0 = 6$ соотношение (34) записывается как $f_6 = c f_{8,y}$, $c \neq 0$, что противоречит условию $a_{04} \neq 0$, так как коэффициент при y^3 в f_6 равен нулю по построению. Наконец, при $k_0 < 6$, соотношение (34) невозможно по соображениям степени.

Теперь, когда (33) доказано, можно рассуждать следующим образом. Выберем произвольный многочлен $P_s \in \mathcal{P}(s)$, $9 \leq s \leq 10$, и представим его в виде $P_s = A_{s-k_0} f_{k_0} + B_{s-7} f_{8,x} + B_{s-6} f_{8,y}$. Тогда по формуле Эйлера старшая (1, 2)-квазиоднородная форма многочлена $8G - xG_x - 2yG_y$ равна $(8 - k_0) f_{k_0}$, следовательно,

$$P_s = \frac{8A_{s-k_0}}{8 - k_0} G + \left(B_{s-7} - \frac{x A_{s-k_0}}{8 - k_0} \right) G_x + \left(B_{s-6} - \frac{2y A_{s-k_0}}{8 - k_0} \right) G_y \quad \text{mod } \mathcal{P}_{(s-1)},$$

что и требовалось доказать.

(3ii) Предположим, что $k_0 = 7$ и $f_7 \in \langle f_{8,x}, f_{8,y} \rangle$. Поскольку $a_{13} = a_{23} = 3$, мы имеем $f_7 = \alpha f_{8,x}$ при некотором $\alpha \in \mathbb{C}$.

Предположим теперь, что существует $0 \leq m \leq 6$ такое, что

$$(8 - k)f_k = \alpha f_{k+1,x} \text{ for all } m < k < 7, \quad \text{and } f'_m = (8 - m)f_m - \alpha f_{m+1,x} \neq 0.$$

Рассуждения из шага (3i) показывают, что

$$f'_m \mathcal{P}(s - m) + f_{8,x} \mathcal{P}(s - 7) + f_{8,y} \mathcal{P}(s - 6) = \mathcal{P}(s), \quad s = 9, 10.$$

Поэтому любой многочлен $P_s \in \mathcal{P}(s)$ представим в виде $P_s = A_{s-m}f'_m + B_{s-7}f_{8,x} + B_{s-6}f_{8,y}$. Заметим, что старшая $(1, 2)$ -квазиоднородная форма многочлена $8G - xG_x - 2yG_y - \alpha G_x$ равна f'_m . Следовательно,

$$P_s = A_{s-m}(8G - xG_x - 2yG_y - \alpha G_x) + B_{s-7}G_x + B_{s-6}G_y \pmod{\mathcal{P}(s-1)}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $(8 - k)f_k = \alpha f_{k+1,x}$ для всех $k < 7$. Однако тогда

$$G(x, y) = f_8(x, y) + \sum_{k < 8} f_k(x, y) = f_8(x, y) + \sum_{i > 0} \frac{\alpha^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f_8(x, y) = f_8(x + \alpha, y),$$

что противоречит тому условию, что $G(x, y) = 0$ не имеет особенностей X_{21} в \mathbb{C}^2 . \square

REFERENCES

1. A. Akyol, A. Degtyarev, *Geography of irreducible plane sextics*, Proc. London Math. Soc. (to appear).
2. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений, том 1, М., Наука, 1982*.
3. E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, J. I. Cogolludo Augustin, *On sextic curves with big Milnor number*, Trend in Singularities, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2002, pp. 1–29.
4. E. Brugallé, *Symmetric plane curves of degree 7: Pseudoholomorphic and algebraic classifications*, J. reine angew. Math. **612** (2007), 129–171.
5. L. Caporaso, J. Harris, *Parameter spaces for curves on surfaces and enumeration of rational curves*, Compositio Math. **113** (1998), no. 2, 155–208.
6. A. Degtyarev, *On the Artal-Carmona-Cogolludo Construction*, J. Knot Theory Ramifications **23:5** (2014), Article ID 1450028, 35 p.
7. I. V. Dolgachev, *Classical algebraic geometry: a modern view*, Cambridge Univ. Press, 2013.
8. S. Fiedler-Le Touzé, S. Yu. Orevkov, *A flexible affine M-sextic non-realizable algebraically*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 2, 293–310.
9. G.-M. Greuel, U. Karras, *Families of varieties with prescribed singularities*, Compos. Math. **69** (1989), 83–110.
10. G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, *Introduction to singularities and deformations*, Springer, 2007.
11. Д. А. Гудков, Г. А. Уткин, М. Л. Тай, *Полная классификация нераспадающихся кривых 4-го порядка*, Матем. сб. **69(111):2** (1966), 222–256.
12. D. A. Gudkov and E. I. Shustin, *On the intersection of the close algebraic curves*, A. Dold, B. Eckmann (eds.): Topology (Leningrad, 1982), Lect. Notes Math., vol. 1060, Springer, 1984, pp. 278–289.

13. V. M. Kharlamov, S. Yu. Orevkov, E. I. Shustin, *Singularity which has no M -smoothing*, E. Bierstone (ed.) et al., The Arnoldfest. Proc. Conf. in honour of V. I. Arnold for his 60th birthday, Toronto, Canada, June 15–21, 1997., Fields Inst. Commun. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 273–309.
14. V. M. Kharlamov, O. Ya. Viro, *Extensions of the Gudkov-Rokhlin congruence*, Topology and geometry, Rohlin Semin. 1984-1986, Lect. Notes Math. 1346., Springer, 1988, pp. 687–717.
15. А. Б. Корчагин, *Новые M -кривые степени 8 и 9*, Доклады АН СССР **39:3** (1989), 569–572.
16. А. В. Korchagin, *Construction of new curves of 9th degree*, Real Algebraic Geometry (Proc. Conf., Rennes/Fr. 1991), Lect. Notes Math., vol. 1524., Springer, 1992, pp. 296–307.
17. А. Б. Корчагин, Е. И. Шустин, *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **52:6** (1988), 1181–1199.
18. E. I. Moody, *Notes on the Bertini involution*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 433–436.
19. S. Yu. Orevkov, *Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy*, GAFA - Geom. and Funct. Anal. **12** (2002), 723–755.
20. С. Ю. Оревкин, *Построения расположений M -квартики и M -кубики с максимально пересекающимися овалом и нечетной ветвью*, Вестник ННГУ, сер. матем. моделирование и оптимальное управление, вып 1(25), 2002., 12–48.
21. S. Yu. Orevkov, *Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse. Math. (6), **12** (2003), 517–531.
22. S. Yu. Orevkov, *Quasipositivity problem for 3-braids*, Turkish Journal of Math. **28** (2004), 89–93.
23. С. Ю. Оревкин, *Расположения M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь*, Алгебра и анализ **19:4** (2007), 174–242.
24. S. Yu. Orevkov, *Algorithmic recognition of quasipositive braids of algebraic length two*, J. of Algebra **423** (2015), 1080–1108.
25. S. Yu. Orevkov and E. I. Shustin, *Flexible, algebraically unrealizable curves: Rehabilitation of the Hilbert-Rohn-Gudkov approach*, J. reine angew. Math. **551** (2002), 145–172.
26. S. Yu. Orevkov and E. I. Shustin, *Pseudoholomorphic, algebraically unrealizable curves*, Moscow Math. J. **3** (2003), 1053–1083.
27. J.-J. Risler, *Un analogue local du théorème de Harnack*, Invent. Math. **89** (1987), 119–137.
28. Е. И. Шустин, *Метод Гильберта—Роона и сглаживания особых точек вещественных алгебраических кривых*, Доклады АН СССР **31:2** (1983), 282–286.
29. Е. И. Шустин, *Версальные деформации в пространстве плоских кривых фиксированной степени*, Функц. анализ и его прил. **21:1** (1987), 90–91.
30. E. Shustin, *Gluing of singular and critical points*, Topology **37** (1998), no. 1, 195–217.
31. O. Viro, *Patchworking Real Algebraic Varieties*, Preprint at arXiv:math.AG/0611382.
32. О. Я. Виро, *Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией*, Алгебра и анализ **1:5** (1989), 1–73.
33. J.-Y. Welschinger, *Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$* , Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), 367–392.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА, МОСКВА, УЛ. ГУБКИНА Д. 8, МОСКВА, РФ, 119991;

IMT, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, 31062 TOULOUSE, FRANCE;

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ", УЛ. ВАВИЛОВА, Д. 7, МОСКВА, РФ, 117312.

E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr

SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, TEL AVIV UNIVERSITY, RAMAT AVIV, 69978 TEL AVIV, ISRAEL

E-mail address: shustin@math.tau.ac.il