

ПЛОСКИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ В «ПРИЧУДЛИВЫХ» ШАРАХ

Н. Г. Кружилин и С. Ю. Оревков

А н н о т а ц и я . Буало и Рудольф [2] назвали ориентируемое зацепление L в трехмерной сфере, которое реализуемо в виде пересечения алгебраической кривой A в \mathbb{C}^2 с границей гладко вложенного замкнутого четырехмерного шара B , \mathbb{C} -границей. Они показали, что некоторые зацепления не являются \mathbb{C} -границами. Будем говорить, что L — *сильная \mathbb{C} -граница*, если оно реализуется так со связным дополнением $A \setminus B$. В частности, все квазиположительные зацепления являются сильными \mathbb{C} -границами.

В настоящей статье мы приводим примеры неквазиположительных сильных \mathbb{C} -границ, а также примеры \mathbb{C} -границ, не являющихся сильными \mathbb{C} -границами. Мы даем полную классификацию (сильных) \mathbb{C} -границ с не более чем пятью пересечениями.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть B — подмножество \mathbb{C}^2 , диффеоморфное замкнутому четырехмерному шару, и A — комплексная аналитическая кривая в окрестности B , трансверсальная к ∂B (поскольку мы рассматриваем только топологические свойства, можно считать, что A — это часть алгебраической кривой). Пусть $L = A \cap \partial B$ — зацепление в трехмерной сфере ∂B с граничной ориентацией, индуцированной с $A \cap B$. Какие зацепления можно получить таким образом? (В настоящей статье предполагается, что все зацепления ориентированы.)

Если не вводить дополнительных ограничений, то, как показал Ли Рудольф, в [17],¹ ответ — «любое зацепление». Более того, любая вложенная ориентированная поверхность без замкнутых компонент реализуется как $A \cap B$.

Если область B строго псевдовыпукла (например, это обычный шар), то, как показано в [1], зацепление представимо в таком виде тогда и только тогда, когда оно *квазиположительно* (утверждение «тогда» ранее было доказано в [16]), т.е. это замыкание квазиположительной косы (коса из n нитей называется *квазиположительной*, если она является произведением кос, сопряженных стандартным образующим $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ группы кос B_n). Это довольно сильное ограничение на класс возможных зацеплений (см. [2, 7]).

В [2] зацепление названо *\mathbb{C} -границей*, если оно реализуемо как $A \cap \partial B$, где B — гладко вложенный замкнутый четырехмерный шар (без предположения псевдовыпуклости) и A — алгебраическая кривая в \mathbb{C}^2 (а не часть алгебраической кривой, как в

Key words and phrases. Квазиположительное зацепление, \mathbb{C} -граница, гипотеза Тома.

¹Название нашей статьи — это перефразированное названия статьи [17], в котором использована непереводимая на русский язык игра слов.

[17]). Представляется также естественным выделить случай, когда L реализуется в виде $A \cap \partial B$, где, кроме того, дополнение $A \setminus B$ связно. Мы назовем такие зацепления *сильными \mathcal{C} -границами*. В [2] было сделано наблюдение, что результат Кронхеймера и Мровки [8] дает некоторые ограничения на эти классы зацеплений; в частности, существуют узлы и зацепления, не являющиеся \mathcal{C} -границами. Отметим, что некоторые результаты, сформулированные в [2] для произвольных \mathcal{C} -границ, на самом деле верны только для сильных \mathcal{C} -границ; подробнее см. §3.

Мишель Буало (частное сообщение) поставил вопрос о том, существуют ли неквазиположительные \mathcal{C} -границы. В настоящей статье мы даем на него утвердительный ответ. Более того, мы показываем, что все следующие включения являются строгими:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} := \{\text{квазиположительные зацепления}\} \subset \mathcal{SB} := \{\text{сильные } \mathcal{C}\text{-границы}\} \\ \subset \mathcal{B} := \{\mathcal{C}\text{-границы}\} \subset \{\text{все зацепления}\}. \end{aligned}$$

Для доказательства того, что некоторые \mathcal{C} -границы не квазиположительны, мы используем следующие результаты.

Теорема 1.1. ([7, Cor. 1.5]). *Если и само зацепление, и его зеркальный образ квазиположительны, то зацепление тривиально (см. замечание 1.3).*

Теорема 1.2. ([15, Thms. 1.1 и 1.2]). *Если несвязная сумма или связная сумма зацеплений L_1 и L_2 квазиположительна, то L_1 и L_2 квазиположительны.*

Еще одно необходимое условие квазиположительности зацеплений следует из неравенства Франкса–Вильямса–Мортонна (см. теорему 6.1 ниже).

Замечание 1.3. Через $-L$ мы будем обозначать зацепление L с обращенной ориентацией. Пусть \mathcal{C} — один из классов \mathcal{Q} , \mathcal{SB} , \mathcal{B} . Тогда $L \in \mathcal{C}$, если и только если $-L \in \mathcal{C}$. Действительно, пусть, как и выше, $L = \partial(A \cap B)$. Обозначим через \bar{A} , \bar{B} и \bar{L} образы A , B и L при комплексном сопряжении $\mathbf{c} : (z, w) \mapsto (\bar{z}, \bar{w})$. Тогда \bar{A} — алгебраическая кривая, и мы наделим \bar{L} граничной ориентацией, индуцированной комплексной ориентацией на $\bar{A} \cap \bar{B}$. Поскольку $\mathbf{c}|_A$ антиголоморфно, мы заключаем, что $(\partial\bar{B}, \bar{L})$ имеет тип ориентированного зацепления $(\partial B, -L)$. Отметим также, что эквивалентность $L \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow -L \in \mathcal{Q}$ можно получить алгебраически: если L представлено косой $\sigma_{i_1}^{\pm 1} \sigma_{i_2}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_n}^{\pm 1}$, то $-L$ представлено косой $\sigma_{i_n}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_2}^{\pm 1} \sigma_{i_1}^{\pm 1}$.

Определение сильной \mathcal{C} -границы можно эквивалентно переформулировать, заменив условие связности дополнения $A \setminus B$ на условие, что $A \setminus B$ не имеет ограниченных компонент. Если область B строго псевдовыпукла, ограниченные компоненты, вообще говоря, могут появиться, см. пример Вермера [14, стр. 34] (хотя ни одна компонента множества $A \setminus B$ не может быть диском согласно результату Немировского [13]). Тем не менее, когда шар B строго псевдовыпуклый, зацепление $A \cap B$ является сильной \mathcal{C} -границей, поскольку оно квазиположительно согласно [1] и поэтому может быть реализовано в стандартной сфере [16], а отсутствие ограниченных компонент в таком случае следует из принципа максимума. Таким образом, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{SB}$. Отметим также, что из примера Вермера легко получить пример неквазиположительной \mathcal{C} -границы; см. замечание 4.1.

План статьи. В §2 приведены простейшие примеры неквазиположительных \mathbb{C} -границ. Их можно получить, выбрав «причудливый шар», который представляет собой небольшое утолщение трехмерного шара, вложенного в стандартную трехмерную сферу.

В §3 мы приводим некоторые инструменты для доказательства того, что некоторые зацепления не являются (сильными) \mathbb{C} -границами. Все они основаны на теореме Кронхеймера – Мровки.

В §§4–5 мы обсуждаем некоторые зацепления, высекаемые комплексной прямой на гладко вложенной трехмерной сфере. Если L — такое зацепление, то и L , и его зеркальный образ L^* являются \mathbb{C} -границами, поэтому одно из них будет неквазиположительной \mathbb{C} -границей по теореме 1.1. В §5 мы показываем, что эти зацепления являются итерированными торическими зацеплениями и описываем их диаграммы сращивания (splice diagrams) Эйзенбуда – Неймана.

В §6 мы даем полную классификацию \mathbb{C} -границ и сильных \mathbb{C} -границ с не более чем пятью пересечениями (переходами), что показывает, в частности, что все включения $\mathcal{Q} \subset \mathcal{SB} \subset \mathcal{B} \subset \{\text{все зацепления}\}$ строгие. Эта классификация легко следует из общих фактов, установленных в предыдущих разделах, за исключением реализации зацепления 5_1^2 в виде \mathbb{C} -границы, что немного сложнее.

§2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ НЕКВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ \mathbb{C} -ГРАНИЦ

Для зацепления L обозначим через L^* его зеркальный образ, а через $-L$ обозначим L с противоположной ориентацией.

Теорема 2.1. Пусть B и B_0 — замкнутые четырехмерные шары, гладко вложенные в \mathbb{C}^2 , такие, что шар B_0 лежит во внутренней области шара B . Пусть A — алгебраическая кривая в \mathbb{C}^2 , трансверсальная ∂B и ∂B_0 . Пусть L и L_0 — зацепления, высекаемые кривой A на ∂B и ∂B_0 соответственно. Тогда несвязная сумма $L \sqcup (-L_0^*)$ и связная сумма $L \# (-L_0^*)$ (см. замечание 2.2) являются \mathbb{C} -границами.

Если, кроме того, шар B_0 строго псевдовыпуклый и зацепление L_0 нетривиально, то $L \sqcup (-L_0^*)$ и $L \# (-L_0^*)$ являются неквазиположительными \mathbb{C} -границами.

Замечание 2.2. Связная сумма двух ориентированных зацеплений $L = L_1 \# L_2$ обычно зависит от выбора тех компонент, которые соединяются в одну компоненту зацепления L . В теореме 2.1 выбираемые компоненты зацеплений $A \cap \partial B$ и $A \cap \partial B_0$ должны примыкать к одной и той же компоненте связности множества $A \cap (B \setminus B_0)$.

Доказательство. Покажем, что обсуждаемые зацепления являются \mathbb{C} -границами. Действительно, пусть I — вложенный отрезок в $B \setminus B_0$, который соединяет $A \cap \partial B$ с $A \cap \partial B_0$. Пусть U — малая трубчатая окрестность I . Тогда $B \setminus (B_0 \cup U)$ — четырехмерный шар, и зацепление, высекаемое на нем кривой A , есть $L \sqcup (-L_0^*)$ (если I расположен вне A) или $L \# (-L_0^*)$ (если $I \subset A$).

Если шар B_0 строго псевдовыпуклый, то L_0 — квазиположительное зацепление. Если оно при этом нетривиально, то из теоремы 1.1 (см. также замечание 1.3) следует, что $-L_0^*$ не квазиположительно, и требуемое утверждение вытекает из теоремы 1.2. \square

Следствие 2.3. Пусть L — нетривиальное квазиположительное зацепление. Тогда $L \sqcup (-L^*)$ и $L \# (-L^*)$ являются неквазиположительными \mathbb{C} -границами. Если к тому же L — узел, то $L \# (-L^*)$ — неквазиположительная сильная \mathbb{C} -граница.

Данная конструкция допускает следующее обобщение.

Теорема 2.4. Пусть L — зацепление в S^3 , являющееся \mathbb{C} -границей и трансверсальное экваториальной двумерной сфере $S^2 \subset S^3$. Пусть H — одна из половинок $S^3 \setminus S^2$, и пусть $\xi : S^3 \rightarrow S^3$ — симметрия относительно S^2 . Тогда зацепление $(L \cap H) \cup \xi(-L \cap H)$ является неквазиположительной \mathbb{C} -границей, если оно нетривиально.

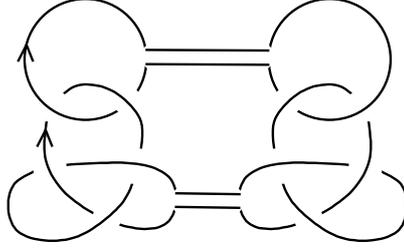


Рис. 1. $L10n36(1)$ в [10].

Доказательство. Пусть (A, B) — реализация L в виде \mathbb{C} -границы. Пусть $f : S^3 \rightarrow \partial B$ — диффеоморфизм, отображающий L на $A \cap \partial B$. Пусть B' — малое утолщение $f(H)$. Тогда (A, B') реализует в виде \mathbb{C} -границы рассматриваемое зацепление. Будучи амфихиральным, оно либо тривиально, либо неквазиположительно по теореме 1.1. \square

Эта теорема позволяет легко строить неквазиположительные \mathbb{C} -границы. На рис. 1 мы приводим пример такого зацепления. Начиная с любой квазиположительной косы, можно построить множество других примеров.

§3. ОГРАНИЧЕНИЯ НА (СИЛЬНЫЕ) \mathbb{C} -ГРАНИЦЫ

Все известные ограничения на (сильные) \mathbb{C} -границы являются более или менее непосредственными следствиями теоремы Кронхеймера – Мровки [8] (известной также как гипотеза Тома или неравенство присоединения) и ее версии для погруженных поверхностей в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ с отрицательными самопересечениями (см. [4], [11, §2]), которая была фактически доказана в [8], хоть и не была там явно сформулирована.

Теорема 3.1. (Гипотеза Тома для погружений). Пусть Σ — связная ориентированная замкнутая поверхность рода g и $j : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ — погружение, все самопересечения которого являются отрицательными простыми двойными точками. Пусть $j_*([\Sigma]) = d[\mathbb{C}\mathbb{P}^1] \in H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$, где $d > 0$. Тогда g ограничено снизу родом гладкой алгебраической кривой степени d , т. е. $g \geq (d-1)(d-2)/2$.

Для зацепления L в $S^3 = \partial B^4$ определим его срезанную эйлерову характеристику как $\chi_s(L) = \max_{\Sigma} \chi(\Sigma)$, где максимум берется по всем вложенным гладким ориентированным поверхностям Σ , не имеющим замкнутых компонент, и таким, что $\partial\Sigma = L$.

Аналогичным образом мы определяем *срезанную отрицательно погруженную эйлерову характеристику* зацепления L как $\chi_s^-(L) = \max_{(\Sigma, j)} \chi(\Sigma)$, где максимум берется по всем погружениям $j : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (B^4, S^3)$ ориентированных поверхностей Σ без замкнутых компонент таких, что $j(\Sigma)$ имеет только отрицательные двойные точки и $j(\partial\Sigma) = L$.

Из теоремы 3.1 сразу вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.2. (ср. [2, Thm. 1.3]) *Пусть A — гладкая алгебраическая кривая в \mathbb{C}^2 , трансверсальная границе четырехмерного шара B , гладко вложенного в \mathbb{C}^2 и такого, что дополнение $A \setminus B$ связно, и пусть $L = A \cap \partial B$. Тогда $\chi_s^-(L) = \chi_s(L) = \chi(A \cap B)$.*

Условие связности в предложении 3.2 можно заменить на условие, что $A \setminus B$ не имеет ограниченных компонент. Действительно, в этом случае $A \setminus B$ становится связным после возмущения объединения A с прямой в общем положении, лежащей вдали от B .

Доказательство. Заменяем $A \setminus B$ на отрицательно погруженную поверхность $j(\Sigma)$, на которой достигается максимум $\chi(\Sigma)$, и применим теорему 3.1. \square

Замечание 3.3. В [2, Thm. 1.3] пропущено условие связности. Без него предложение 3.2 неверно. Действительно, пусть $A = \{w = 0\}$ и B — единичный шар, «протверженный» вдоль отрезка $[(0, 0), (0, 1)]$. Тогда $\chi(A \cap B) = 0$, тогда как $\chi_s(L) = 2$. Доказательство не проходит, потому что, когда мы заменяем $A \cap B$ на Σ , эйлерова характеристика всей поверхности возрастает за счет отщепления сферы, а при этом эйлерова характеристика неограниченной компоненты не меняется. Отметим, что предложение [2, Prop. 1.4] неверно даже для сильных \mathbb{C} -границ, если оба зацепления многокомпонентны. Исправленная версия приведена ниже в предложении 3.6.

Замечание 3.4. Похожая неточность есть и в работе [11]: не проверяется связность вспомогательной поверхности (аналога $(A \setminus B) \cup \Sigma$ из доказательства теоремы 3.1). В результате заключение теоремы [11, Thm. 1] неверно, например, в случае, когда обе кривые — вещественные коники с непустыми, но не пересекающимися множествами вещественных точек. Однако эта неточность легко исправляется и не влияет на наиболее интересный случай, когда кривые имеют общие вещественные точки.

Определение 3.5. Компоненту \mathbb{C} -границы L назовем *внешней*, если она смежна с неограниченной компонентой $A \setminus B$, где A и B те же, что и в определении \mathbb{C} -границ. В частности, все компоненты сильной \mathbb{C} -границы внешние.

Предложение 3.6. (ср. [2, Prop. 1.4]) *Пусть K_1 и K_2 — внешние компоненты \mathbb{C} -границ L_1 и L_2 соответственно. Тогда $L_1 \sqcup L_2$ и $L_1 \# L_2 = L_1 \#_{(K_1, K_2)} L_2$ являются \mathbb{C} -границами. Если, к тому же, L_1 и L_2 — сильные \mathbb{C} -границы, то таковыми же являются и $L_1 \sqcup L_2$ и $L_1 \# L_2$, и тогда $\chi_s(L_1 \# L_2) + 1 = \chi_s(L_1 \sqcup L_2) = \chi_s(L_1) + \chi_s(L_2)$.*

Доказательство. Для $j = 1, 2$ пусть (A_j, B_j) — реализация L_j в качестве (сильной) \mathbb{C} -границы. Сдвигая A_1 и B_1 достаточно далеко, мы можем добиться того, что $A_1 \cap B_2 = A_2 \cap B_1 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Возмущая $A_1 \cup A_2 \cup L$ для подходящей прямой L , мы

можем добиться того, что $L_j = A \cap \partial B_j$, $j = 1, 2$, где A — гладкая проективная алгебраическая кривая. Положим $B = B_1 \cup B_2 \cup T$, где T — малая трубчатая окрестность вложенной дуги, соединяющей точку из K_1 с точкой из K_2 . Тогда (A, B) реализует $L_1 \sqcup L_2$ (соответственно, $L_1 \# L_2$), если данная дуга не лежит (соответственно, лежит) на A . Требуемое соотношение для $\chi_s(\dots)$ легко следует из предложения 3.2. \square

Предложение 3.7. *Если L сильная \mathbb{C} -граница и $-L^*$ (не обязательно сильная) \mathbb{C} -граница, то $\chi_s(L) = \chi_s^-(L) \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $\hat{L} = L \#_{(K, -K^*)}(-L^*)$, где $-K^*$ — внешняя компонента $-L^*$, а K — соответствующая ей компонента L . Пусть $A \cap B$ и $A^* \cap B^*$ — реализации L и $-L^*$ в виде (сильных) \mathbb{C} -границ. Конструкция из доказательства предложения 3.6 дает кривую \hat{A} и гладкий шар \hat{B} такие, что $\hat{A} \cap \hat{B}$ реализует \hat{L} и при этом все компоненты \hat{L} , полученные из L (включая $K \#(-K^*)$), лежат на границе единственной неограниченной компоненты множества $\hat{A} \setminus \hat{B}$. Хорошо известно (и легко видеть), что \hat{L} ограничивает поверхность $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_r$ в \hat{B} , где Σ_1 является диском с границей $K \#(-K^*)$, а Σ_i при $i \geq 2$ является кольцом с границей $K_i \sqcup (-K_i^*)$, где K, K_2, \dots, K_r — компоненты зацепления L . Следовательно, $\chi(\Sigma) = 1$. Положим $A' = (\hat{A} \setminus \hat{B}) \cup \Sigma$. По построению, A' связна. Следовательно, $\chi(A') \leq \chi(\hat{A})$ по теореме 3.1. То же по построению, $\chi(\hat{A} \cap \hat{B}) = \chi(A \cap B) + \chi(A^* \cap B^*) - 1 \leq 2\chi_s(L) - 1$. Таким образом,

$$0 \leq \chi(\hat{A}) - \chi(A') = \chi(\hat{A} \cap \hat{B}) - \chi(\Sigma) \leq (2\chi_s(L) - 1) - 1.$$

Наконец, $\chi_s(L) = \chi_s^-(L)$ по предложению 3.2. \square

Лемма 3.8. *Пусть L есть \mathbb{C} -граница, не являющаяся сильной \mathbb{C} -границей. Тогда существует собственное подзацепление зацепления L , имеющее нулевой индекс зацепления со своим дополнением в L .*

Доказательство. Пусть $L = A \cap B$, как в определении \mathbb{C} -границы. Без ограничения общности можно предполагать, что кривая A гладкая. Тогда $A \setminus B$ имеет ограниченную компоненту A_0 , потому что в противном случае для некоторой прямой C возмущение объединения $A \cup C$ реализовывало бы L в виде сильной \mathbb{C} -границы. Положим $A_1 = (A \setminus B) \setminus A_0$, и обозначим через B' дополнение B в одноточечной компактификации \mathbb{C}^2 . Тогда B' — шар, и A_0 не пересекается с замыканием A_1 в B' . Следовательно, индекс зацепления ∂A_0 и ∂A_1 равен нулю. \square

§4. НЕКВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ \mathbb{C} -ГРАНИЦА, ПОЛУЧАЮЩАЯСЯ ИЗ ПРИМЕРА ВЕРМЕРА

Пусть $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ и $0 < \varepsilon \ll 1$. Обозначим через G_f график функции

$$f(z) = \begin{cases} 2\varepsilon/\bar{z}, & |z| \geq \varepsilon, \\ 2z/\varepsilon, & |z| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Наделим его ориентацией, индуцированной проекцией на ось z . Легко проверить, что $L_f := G_f \cap S^3$ является зацеплением, изображенным на рис. 2, где горизонтальной окружностью представлена компонента L_f , близкая к оси z .

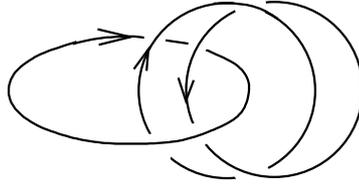


Рис. 2. Пример неквазиположительной S -границы

Очевидно, что это зацепление нетривиально, следовательно, либо L_f , либо его зеркальный образ $L_{\bar{f}}$ неквазиположителен по теореме 1.1. Отображение $T_f : (z, w) \mapsto (z, w - f(z))$ преобразует G_f в прямую $\{w = 0\}$. Аналогично, $T_{\bar{f}}(G_{\bar{f}}) = \{w = 0\}$. Таким образом, либо пара $(T_f(B^4), \{w = 0\})$, либо ее образ при отображении $(z, w) \mapsto (z, \bar{w})$ является примером «причудливого шара» в \mathbb{C}^2 и алгебраической кривой, высекающей на его границе неквазиположительное зацепление, т.е. либо L_f , либо $L_{\bar{f}}$ является неквазиположительной S -границей.

Пока что это неконструктивное доказательство существования, так как мы еще не знаем, которое из зацеплений не квазиположительно (мы установим это чуть позже). Однако, если заменить $f(z)$ на $f(z + \frac{1}{2}) + \overline{f(z - \frac{1}{2})}$, то получившееся зацепление будет амфихиральным, потому что оно инвариантно относительно инволюции $(z, w) \mapsto (-z, -\bar{w})$. Следовательно, оно неквазиположительно (тоже по теореме 1.1), и оно является S -границей по той же причине, что и выше.

Покажем, что зацепление $L_{\bar{f}}$ квазиположительно (и значит, по теореме 1.1, L_f таковым не является). В самом деле, $L_{\bar{f}}$ изотопно замыканию косы из 3 нитей $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1})(\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1)$. Нам неизвестно, является ли L_f сильной S -границей.

Квазиположительность $L_{\bar{f}}$ можно также увидеть геометрически следующим образом. Компоненты L_f можно параметризовать с учетом ориентаций посредством отображения

$$t \mapsto (e^{it}, 2\epsilon e^{it}), \quad t \mapsto (2\epsilon e^{-it}, e^{-it}), \quad t \mapsto (\frac{1}{2}\epsilon e^{it}, e^{it})$$

(здесь мы приблизили коэффициенты с точностью до $O(\epsilon^2)$). Поэтому

$$L_f = S^3 \cap \left(\{w = 2\epsilon z\} \cup \{z = 2\epsilon w\}^{\text{op}} \cup \{2z = \epsilon w\} \right),$$

где $\{\dots\}^{\text{op}}$ означает обращение ориентации на комплексной прямой. Любые две тройки различных комплексных прямых, проходящих через начало координат, друг другу изотопны. Следовательно,

$$L_f \sim S^3 \cap \left(\{w = 0\} \cup \{w = \epsilon z\} \cup \{z = \epsilon w\}^{\text{op}} \right). \quad (1)$$

Поэтому $L_{\bar{f}}$ изотопно образу правой части (1) при отображении $(z, w) \rightarrow (z, \bar{w})$. Этот образ допускает параметризацию $t \mapsto (e^{it}, 0)$, $t \mapsto (e^{it}, \epsilon e^{-it})$, $t \mapsto (\epsilon e^{-it}, e^{it})$, но это (опять с точностью до $O(\epsilon^2)$) параметризация зацепления $S^3 \cap \{w(zw - \epsilon) = 0\}$. Таким образом, зацепление $L_{\bar{f}} \sim S^3 \cap \{w(zw - \epsilon) = 0\}$ квазиположительно.

Замечание 4.1. Третий способ убедиться в том, что зацепление $L_{\bar{f}}$ квазиположительно, — это заметить, что его можно получить из примера Вермера (см. [14, стр. 34]), в котором явно задана функция $F(z) = (1+i)\bar{z} - iz\bar{z}^2 - z^2\bar{z}^3$, обладающая следующими свойствами: $F'_z \neq 0$ в единичном круге Δ , и $F|_{\partial\Delta} = 0$. Поэтому график функции F вполне вещественен и, следовательно, у него есть малая окрестность, являющаяся строго псевдовыпуклым шаром B . Можно проверить, что зацепление, высекаемое осью z на ∂B , изотопно $L_{\bar{f}}$, из чего следует, что $L_{\bar{f}}$ квазиположительно в силу [1].

§5. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ \mathbb{C} -ГРАНИЦ, ВЫСЕКАЕМЫХ КОМПЛЕКСНОЙ ПРЯМОЙ, И ИХ СВОЙСТВА

Ясно, что в §4 можно было взять произвольную функцию $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, график которой G_f трансверсален сфере S^3 и высекает на ней нетривиальное зацепление L_f . В этом случае теорема Хайдена (теорема 1.1) гарантирует, что либо L_f , либо его зеркальный образ $L_{\bar{f}}$ неквазиположителен. Это, однако, очень маленькое семейство зацеплений, и мы его опишем в этом разделе. Все они являются итерированными торическими зацеплениями, поэтому подходящий язык для их описания — *EN-диаграммы* (называемые также *диаграммами сращивания* или *сплайс-диаграммами*). Это некие графы, введенные Эйзенбудом и Нейманом в [3]. Точнее, если считать эквивалентными диаграммы, получающиеся друг из друга при помощи некоторых простых операций (см. [3, Thm. 8.1]), то каждое итерированное торическое зацепление соответствует единственному классу эквивалентности диаграмм.

Вычисление структуры итерированного торического зацепления L_f из исходных данных очень похоже на аналогичное вычисление в [6] (в обоих случаях исходные данные — это набор непересекающихся окружностей на плоскости, снабженных некоторой дополнительной информацией).

Итак, рассмотрим f , G_f и L_f , как выше, и пусть $\text{pr}_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — проекция $(z, w) \mapsto z$. Без ограничения общности можно считать, что L_f не пересекается с осью z . Тогда $\text{pr}_1(L_f)$ есть несвязное объединение гладко вложенных окружностей $C_1 \cup \dots \cup C_n$. Обозначим через D_1, \dots, D_n ограниченные компоненты связности множества $\mathbb{C} \setminus \text{pr}_1(L_f)$, занумерованные так, что C_j — внешняя компонента границы области D_j . Назовем область D_j *положительной* или *отрицательной* в соответствии со знаком числа $|f(z)|^2 + |z|^2 - 1$ для $z \in D_j$ (тогда $\text{pr}_1(G_f \cap B^4)$ есть объединение всех отрицательных D_j). Наделим каждую окружность C_j граничной ориентацией, индуцированной с примыкающей к ней компоненты $\mathbb{C} \setminus \text{pr}_1(L_f)$ (это будет также ориентацией, задаваемой проекцией зацепления L_f). Обозначим через a_j приращение функции $(\text{Arg } f)/(2\pi)$ вдоль C_j . Тогда зацепление L_f однозначно определяется по следующим комбинаторным данным: частичный порядок \prec на $\{C_1, \dots, C_n\}$, определяемый условием, что $C_i \prec C_j$, если C_i лежит внутри C_j , и числами a_j , приписанными немаксимальным (относительно данного порядка) C_j . Такие данные реализуемы тогда и только тогда, когда $\sum_{k \in I(j)} a_k = 0$ для каждой положительной области D_j ; здесь $I(j) = \{k \mid C_k \subset \partial D_j\}$.

Определение 5.1. Пусть K — компонента ориентируемого зацепления L . Пусть p, q и d целые числа такие, что $\text{НОД}(p, q) = 1$ и $d \geq 1$. Скажем, что LUL' (соответственно,

$(L \setminus K) \cup L'$ есть (pd, qd) -обмотка зацепления L вдоль K с оставленной основой (соответственно, с удаленной основой), если для некоторой трубчатой окрестности T узла K , не пересекающейся с $L \setminus K$, мы имеем:

- $L' \subset \partial T$, и L' есть объединение непересекающихся узлов $L' = K_1 \cup \dots \cup K_d$;
- $[K_j] = p[K]$ в $H_1(T)$ и $\text{lk}(K, K_j) = q$ для всех $j = 1, \dots, d$.

Итерированное торическое зацепление — это зацепление, полученное из тривиального узла последовательным применением обмоток обоих типов.

Замечание 5.2. Обращение ориентации некоторых компонент не нарушает свойства быть итерированным торическим зацеплением. Действительно, обращение ориентации компоненты K эквивалентно $(-1, 0)$ -обмотке вдоль K с удалением основы.

Предложение 5.3. L_f является итерированным торическим зацеплением.

Доказательство. Это следует из нижеприведенной леммы 5.4. \square

Лемма 5.4. Пусть $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ — зацепление в $S^3 = \partial B^4$ такое, что $\text{pr}_1|_L$ инъективно. Тогда L — итерированное торическое зацепление.

Доказательство. Можно предполагать, что L не пересекается с осью z . Пусть K_1, \dots, K_n — компоненты L , и пусть $C_j = \text{pr}_1(K_j)$. Мы будем называть C_j овалами. Согласно замечанию 5.2, на компонентах можно выбирать произвольные ориентации. Выберем на K_j ориентацию, соответствующую ориентации C_j против часовой стрелки. Обозначим через a_j индекс зацепления K_j с осью z (приращение функции $\text{Arg } F_j / (2\pi)$, если рассматривать K_j как график функции $F_j : C_j \rightarrow \mathbb{C}$). Зацепление L однозначно определено проекцией $\text{pr}_1(L)$ и числами a_1, \dots, a_n (если C_j — внешний овал, то L не зависит от a_j с точностью до изотопии).

Мы докажем утверждение леммы для более широкого класса зацеплений, а именно, мы будем допускать, что некоторые компоненты L — это слои проекции pr_1 , ориентированные так, чтобы их индекс зацепления с осью z был положительным (заметим, что с точностью до изотопии зацепление не изменится, если заменить такую компоненту на маленький овал с $a_j = 1$).

Без ограничения общности можно считать, что $\text{pr}_1(L)$ имеет единственный внешний овал. В противном случае L есть несвязная сумма зацеплений, каждое из которых соответствует некоторому внешнему овалу и всем овалам внутри него. Если $\text{pr}_1(L)$ состоит из единственного овала и точки внутри него, то L — зацепление Хопфа, и оно является $(1, 1)$ -обмоткой тривиального узла. Поэтому нам достаточно проверить, что нижеперечисленные операции (i)–(iii) являются обмотками (см. верхний ряд на рис. 3). Пусть K — компонента L вида $\text{pr}_1^{-1}(p)$ для некоторой точки p , и пусть D — такой диск, что $D \cap \text{pr}_1(L) = \{p\}$. Определим следующие операции:

- (i) Добавление компоненты, проецирующейся на ∂D и имеющей произвольный наперед заданный индекс пересечения a с осью z .
- (ii) Операция (i) с последующим удалением K .
- (iii) Замена K на $\text{pr}_1^{-1}(P)$, где $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset D$.

Тогда (i) (соответственно, (ii)) — это $(a, 1)$ -обмотка вдоль K с сохранением (соответственно, с удалением) основы, а (iii) — это $(k, 0)$ -обмотка вдоль K с удалением основы. \square

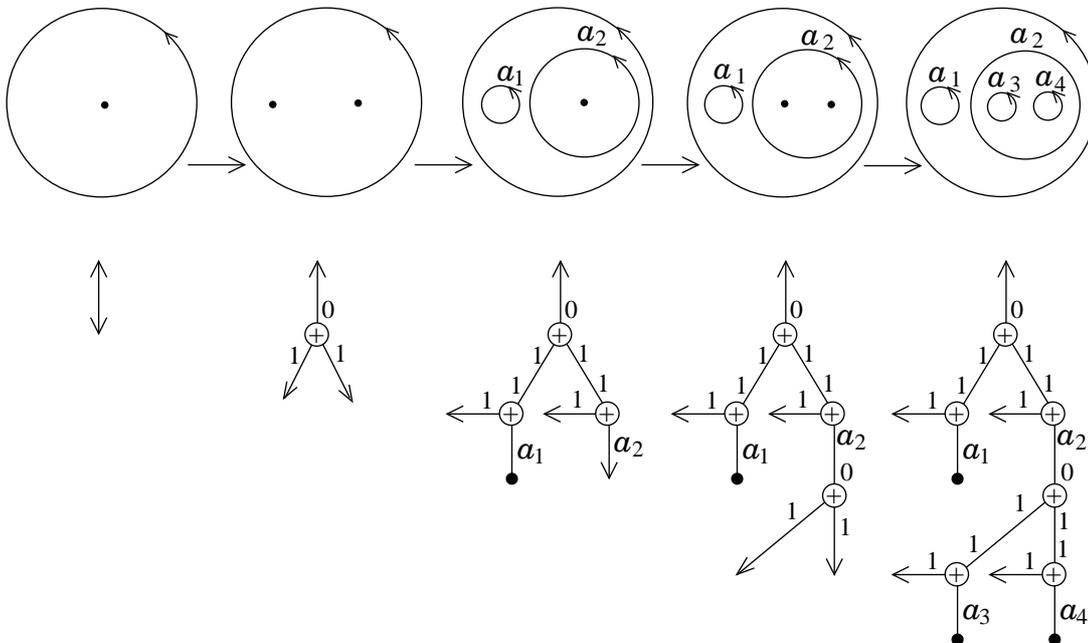


Рис. 3. Последовательные преобразования $pr_1(L)$ и EN-диаграмм.

В нижнем ряду на рис. 3 изображены последовательные преобразования EN-диаграмм при итерировании обмоток в доказательстве леммы 5.4.

На рис. 4 даны две EN-диаграммы зацепления L_f для расположения овалов и индексов зацепления, приведенных в левой части рисунка. Серым цветом закрашены области, составляющие $pr_1(G_f \cap B^4)$ (напомним, что сумма индексов зацепления вдоль границы каждой ограниченной белой, т.е. положительной, области должна равняться нулю). Левая EN-диаграмма соответствует доказательству леммы 5.4, а правая получена из нее применением допустимых эквивалентных преобразований, описанных в [3, Thm. 8.1 (3) и (6)]. В общем случае такие преобразования применимы к каждому фрагменту EN-диаграммы, отвечающему кольцевой компоненте множества

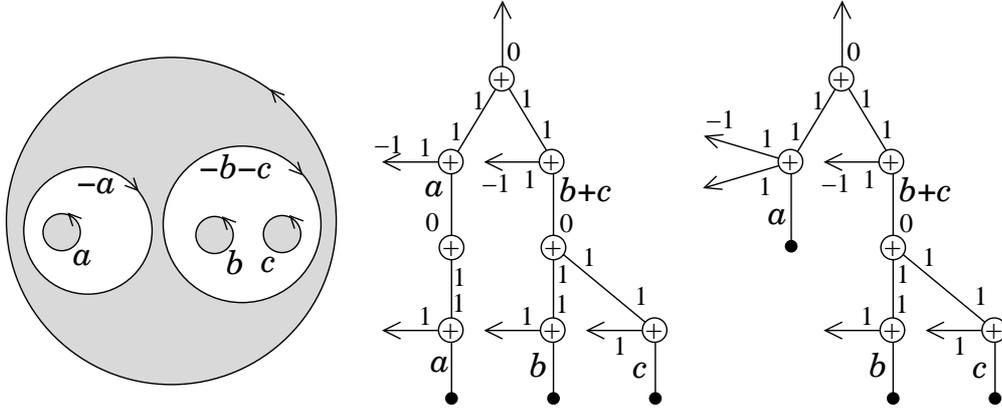


Рис. 4. $\text{pr}_1(L_f)$ and two EN-diagrams for a \mathbb{C} -boundary L_f

$\text{pr}_1(G_f \setminus B^4)$ (т.е. белой кольцевой области при раскраске, как на рис. 4).

Замечание 5.5. Нам неизвестно, являются ли сильными \mathbb{C} -границами какие-либо из неквазиположительных зацеплений, рассмотренных в этом разделе.

§6. ЗАЦЕПЛЕНИЯ С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ПЯТЬЮ ПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ

В этом разделе для каждого зацепления, допускающего проекцию с не более, чем пятью пересечениями (переходами), мы устанавливаем, принадлежит ли оно классам \mathcal{Q} , \mathcal{SB} или \mathcal{B} . В таблице 1 мы приводим ответы для всех таких зацеплений, не являющихся несвязной суммой с тривиальным узлом (не имеющих вид $L \sqcup O$, где O — тривиальный узел), однако из этого легко вывести и ответы для зацеплений вида $L \sqcup O \sqcup \dots \sqcup O$ с ≤ 5 пересечениями. Импликация $L \in \mathcal{C} \Rightarrow L \sqcup O \in \mathcal{C}$ (где \mathcal{C} — это \mathcal{Q} , \mathcal{SB} или \mathcal{B}) очевидна. Обратная импликация верна для класса \mathcal{Q} (см. [15]), но мы не знаем, имеет ли она место в общем случае для классов \mathcal{SB} и \mathcal{B} . Однако характер наших доказательств таков, что каждый раз, когда мы доказываем, что $L \notin \mathcal{C}$ (где \mathcal{C} — один из классов \mathcal{SB} или \mathcal{B}), те же рассуждения всегда легко адаптировать для доказательства того, что $L \sqcup O \sqcup \dots \sqcup O \notin \mathcal{C}$.

Список простых (т.е. неразложимых в связную или несвязную сумму) зацеплений взят из [9, 10] (но мы сокращаем 2_1^2 до 2_1). Через 4_{1-}^2 мы обозначаем зацепление 4_1^2 (ориентированное, как в [10]) с обращенной ориентацией одной из компонент. Заметим, что любой выбор ориентаций компонент у 5_1^2 дает один и тот же ориентированный изотопический тип. Во втором столбце мы приводим косы. Они служат как для идентификации зацепления, так и для подтверждения его квазиположительности, когда она имеет место. Разложение кос в произведение образующих также позволяет получить указанную нижнюю оценку для $\chi_s^-(L)$, используя тот факт, что если коса β' получена из β заменой σ_i^{-1} на σ_i , то $\chi_s^-(\beta) \geq \chi_s^-(\beta')$. (В наших доказательствах используются только нижние оценки для χ_s^- и верхние оценки для χ_s , поэтому читатель может считать, что в таблице 1 приведены лишь эти оценки эйлеровых характеристик.) Например, $\chi_s^-(4_{1-}^2) = \chi_s^-(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}) \geq \chi_s^-(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2) = \chi^-(\sigma_1) = 2$ (здесь « σ_1 » в « $\chi_s^-(\sigma_1)$ » рассмаривается как коса с 3 нитями).

Мы также используем неравенство Мурасуги в оценках для 4_1^2 , 4_{1-}^2 и 5_1^2 .

Ссылки на комментарии в конце раздела даны в таблице 1 в виде «(a)», «(b)», и т.д. Почти все доказательства основаны на общих результатах из §§2-3. Ниже мы приводим некоторые частные результаты, используемые в таблице.

Таблица 1

L	коса	$L \in \mathcal{Q}$	$L \in \mathcal{SB}$	$L \in \mathcal{B}$	$\chi_s(L)$	$\chi_s^-(L)$
2_1	σ_1^2	да	да	да		
2_1^*		нет	нет (a)	нет (b)	0	2
3_1	σ_1^3	да	да	да		
3_1^*		нет	нет (a)	нет (b)	-1	1
4_1	$(\sigma_1^{-1}\sigma_2)^2$	нет	нет (a)	нет (b)	-1	1
4_1^2	σ_1^4	да	да	да		
4_1^{2*}		нет	нет (a)	нет (b)	-2	2
4_{1-}^2		нет	нет (a)	нет (b)	0	2
4_{1-}^{2*}	$\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2$	да	да	да		
$2_1\#2_1$		да	да	да		
$2_1\#2_1^*$		нет (c)	да (d)	да		
$2_1^*\#2_1^*$		нет	нет	нет (f,e)	-1	3
$2_1 \sqcup 2_1$		да	да	да		
$2_1 \sqcup 2_1^*$		нет	нет (a)	да (d)	0	2
$2_1^* \sqcup 2_1^*$		нет	нет	нет (f,e)	0	4
5_1	σ_1^5	да	да	да		
5_1^*		нет	нет (a)	нет (b)	-3	1
5_2	$\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2^{-1}$	да	да	да		
5_2^*		нет	нет (a)	нет (b)	-1	1
5_1^2	$(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2\sigma_1$	нет (i)	да (j)	да		
5_1^{2*}		нет	нет	нет (f)	0	2
$3_1\#2_1$		да	да	да		
$3_1\#2_1^*$		нет (c)	да (d)	да		
$3_1^*\#2_1$		нет	нет	нет (f,g)	0	
$3_1^*\#2_1^*$		нет	нет	нет (f,e)	-2	2
$3_1 \sqcup 2_1$		да	да	да		
$3_1 \sqcup 2_1^*$		нет (c)	нет (a,g)	да (d)	-1	1
$3_1^* \sqcup 2_1$		нет	нет (f,g)	нет (h)	-1	1
$3_1^* \sqcup 2_1^*$		нет	нет	нет (f,e)	-1	3

Следующая теорема непосредственно вытекает из неравенства Франкса–Вильямса–Мортон [5, 12] в сочетании с предложением 3.2 (в [9], в большинстве случаев неквазиположительность узлов выводится из этого результата).

Теорема 6.1. ([2, теорема 3.2]). *Если L — квазиположительное зацепление, то $\text{ord}_v P_L \geq 1 - \chi_s(L)$, где $P_L(v, z)$ — многочлен HOMFLY, нормализованный условиями*

$$P_0 = 1, P_{L_+} = vzP_{L_0} + v^2P_{L_-}.$$

Предложение 6.2. *Зацепление $3_1^* \sqcup 2_1$ не является \mathbb{C} -границей.*

Доказательство. Пусть $L = L_1 \sqcup L_2$, где L_1 реализует 3_1^* и L_2 реализует 2_1 . Предположим, что L есть \mathbb{C} -граница $\partial(A \cap B)$, где A — гладкая алгебраическая кривая в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, а B — четырехмерный шар, гладко вложенный в пространство \mathbb{C}^2 , рассматриваемое в качестве аффинной карты в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Без ограничения общности можно считать, что $A \setminus B$ имеет только одну неограниченную (в \mathbb{C}^2) компоненту. Пусть Σ — несвязное объединение поверхностей $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, и пусть $j : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (B, \partial B)$ такое погружение с отрицательными самопересечениями, что $j(\partial\Sigma_i) = L_i$, $i = 1, 2$. Можно считать, что Σ_1 — это диск, а Σ_2 — кольцо. Обозначим через A' результат склейки $A \setminus B$ и Σ по границе, и продолжим j на A' так, что $j(A') = (A \setminus B) \cup j(\Sigma)$.

Имеют место равенства $\chi_s(L) = -1$ и $\chi_s^-(L) = 1$ (см. таблицу 1), значит $\chi_s^-(L) > \chi_s(L)$, и следовательно, $\chi(A') > \chi(A)$. Поэтому множество A' не может быть связным по теореме 3.1. Напомним, что $A \setminus B$ имеет только одну неограниченную компоненту, следовательно, у поверхности A' есть компонента A'_0 такая, что $j(A'_0)$ ограничено в \mathbb{C}^2 . Поскольку $j(A' \setminus A'_0)$ пересекается с B , для некоторого $k \in \{1, 2\}$ имеет место $j(A'_0) \cap B = j(\Sigma_k)$ и, следовательно, $j(A'_0) \cap \partial B = L_k$. Поскольку $[j(A' \setminus A'_0)] = [j(A)]$ в $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$, из теоремы 3.1 следует, что $\chi(A) \geq \chi(A' \setminus A'_0)$, а значит

$$\chi(A) + \chi(A'_0) \geq \chi(A') = \chi(A \setminus B) + \chi(\Sigma) \geq \chi(A) - \chi_s(L) + \chi(\Sigma),$$

и, таким образом, $\chi(A'_0) \geq \chi(\Sigma) - \chi_s(L) = 2$. Покажем, что это невозможно. В самом деле, положим $\Sigma_0 = A'_0 \setminus \Sigma_k$. Тогда $j(\Sigma_0)$ можно рассматривать как гладкую поверхность с границей $-L_k$, вложенную в одноточечную компактификацию \mathbb{C}^2 , откуда следует, что $\chi(\Sigma_0) \leq \chi_s(L_k) \leq 0$ (так как $\chi_s(3_1) = -1$ и $\chi_s(2_1) = 0$), а мы предположили, что $\chi(\Sigma_1) = 1$ и $\chi(\Sigma_2) = 0$. \square

Предложение 6.3. *Зацепление 5_1^2 (см. рис. 5) является сильной \mathbb{C} -границей.*

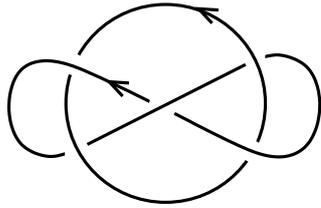


Рис. 5. Зацепление 5_1^2

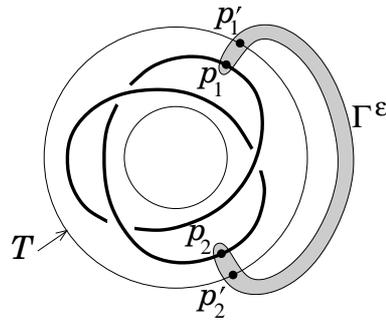


Рис. 6

Доказательство. Положим $A = \{(z, w) \mid w^2 = z^2 + z^3\}$. Пусть $1 \ll r \ll R$, и пусть $\Delta_r, \Delta_R \subset \mathbb{C}$ — диски соответствующих радиусов. Положим $U_t = ([t, r] \times \Delta_R) \cup \partial(\Delta_r \times \Delta_R)$. Пусть $z_1 = r \exp(\pi i/3)$, $z_2 = \bar{z}_1$, и обозначим через w_j , $j = 1, 2$, такое решение

уравнения $w^2 = z_j^2 + z_j^3$, у которого $\text{Im } w_j > 0$; тогда $w_1 \approx w_2 \approx r^{3/2}i$. Положим $p_j = (z_j, w_j)$ и $p'_j = (z_j, Ri)$. Пусть γ — вложенная дуга в Δ_r , соединяющая z_1 с z_2 и обходящая отрезок $[0, r]$, и пусть $\Gamma = [p_1, p'_1] \cup (\gamma \times \{Ri\}) \cup [p'_2, p_2]$. Для множества $X \subset \mathbb{C}^2$ и числа $\varepsilon > 0$ обозначим ε -окрестность X в \mathbb{C}^2 через X^ε . Наконец, для $0 \ll \delta \ll \varepsilon$, обозначим через B_t малое сглаживание множества $(U_t \setminus \Gamma^\varepsilon)^\delta$.

Тогда $A \cap \partial B_0$ является сильной \mathbb{C} -границей, изотопной 5_1^2 , во вложенной трехмерной сфере ∂B_0 . Действительно, мы имеем $U_r = \partial(\Delta_r \times \Delta_R)$, и при этом $A \cap U_r$ является трилистником, лежащим в «вертикальном» полнотории $T = (\partial\Delta_r) \times \Delta_R$; см. рис. 6, где кусочно гладкая трехмерная сфера U_r представлена ее центральной проекцией на единичную сферу с последующей стереографической проекцией на трехмерное пространство.

Следовательно, зацепление $A \cap B_r$ такое, как изображено в левой части рисунка 7 (ср. с теоремой 2.4 и ее доказательством). Рассмотрим семейство зацеплений $(B_t, A \cap B_t)$, где t непрерывно меняется от r до 0. При этой деформации зацепление меняется только в небольшой области на «внутренней» стороне сферы, а именно, при изменении параметра t меняется только та часть зацепления, которая лежит в секторе $-\eta < \text{Arg } z < \eta$ ($0 < \eta \ll 1$) полнотория $(\partial\Delta_{r-\delta}) \times \Delta_R$. Когда параметр t проходит значение $t = \delta$, сфера ∂B_t проходит через двойную точку кривой A (в начале координат), и при этом зацепление перестраивается так, как изображено в средней части рисунка 7. Получившееся в результате зацепление — это в точности 5_1^2 (см. правую часть рисунка 7). \square

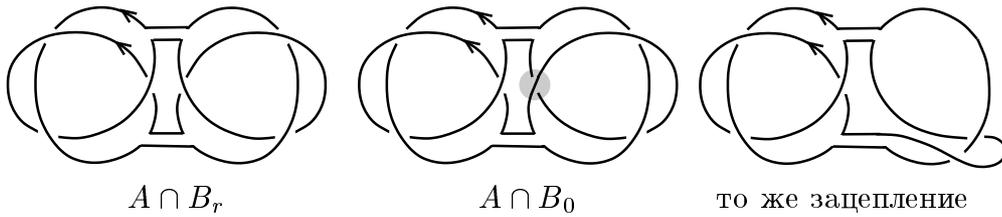


Рис. 7

Комментарии к таблице 1.

- (a). Потому что $\chi_s(L) \neq \chi_s^-(L)$ (см. предложение 3.2).
- (b). По лемме 3.8 в сочетании с тем фактом, что $L \notin \mathcal{SB}$.
- (c). По теореме 1.2.
- (d). По теореме 2.1, примененной к нодальной или каспидальной кубике $y^2 = ax^2 + x^3$ ($a = 0$ или 1), где B_0 — малый шар с центром в начале координат и B — малый (для $2_1 \# 2_1^*$ и $2_1 \sqcup 2_1^*$) или большой (в других случаях) шар, содержащий B_0 . Несложно проверить, что получающееся зацепление является сильной \mathbb{C} -границей в соответствующих случаях.
- (e). Можно воспользоваться тем, что $\chi_s(L) = \chi_s(L^*)$, и применить предложение 3.6 для вычисления $\chi_s(L^*)$.
- (f). По предложению 3.7.

- (g). Вложенная поверхность в четырехмерном шаре, границей которой является L , не может содержать диска в качестве компоненты, следовательно, $\chi_s(L) \leq 0$. (В случае $3_1^* \# 2_1$ можно также вычислить $\chi_s(L) = \chi_s(L^*)$ при помощи предложения 3.2.)
- (h). См. предложение 6.2.
- (i). По теореме 6.1.
- (j). См. предложение 6.3.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. M. Boileau, S. Orevkov, *Quasipositivity d'une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **332** (2001), 825–830.
2. M. Boileau, L. Rudolph, *Nœuds non concordants à un \mathbb{C} -bord*, Vietnam J. Math. **23** (1995), 13–28.
3. D. Eisenbud, W. Neumann, *Three dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Annals of Math. Studies 110, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1985.
4. R. Fintushel, R. Stern, *Immersed spheres in 4-manifolds and the immersed Thom conjecture*, Turkish J. of Math. **19** (1995), 145–157.
5. J. Franks, R. Williams, *Braids and the Jones-Conway polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 97–108.
6. P. M. Gilmer, S. Yu. Orevkov, *Signatures of real algebraic curves via plumbing diagrams*, J. Knot Theory Ramif. **27** (2018), no. 3, 1840003, 33 pp.
7. K. Hayden, *Minimal braid representatives of quasipositive links*, Pac. J. Math. **295** (2018), 421–427.
8. P. Kronheimer, T. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Letters **1** (1994), 797–808.
9. C. Livingston, A. H. Moore, *KnotInfo: Table of Knot Invariants*, <http://www.indiana.edu/knotinfo>, June 17, 2020.
10. C. Livingston, A. H. Moore, *LinkInfo: Table of Link Invariants*, <http://linkinfo.sitehost.iu.edu>, June 17, 2020.
11. G. Mikhalkin, *Adjunction inequality for real algebraic curves*, Math. Res. Letters **4** (1997), no. 1, 45–52.
12. H. Morton, *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986), 107–110.
13. С. Ю. Немировский, *Комплексный анализ и дифференциальная топология на комплексных поверхностях*, УМН **54:4** (1999), 47–74.
14. R. Nirenberg, R. O. Wells, *Approximation Theorems on Differentiable Submanifolds of a Complex Manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 15–35.
15. S. Yu. Orevkov, *Квазиположительные зацепления и связные суммы*, Функц. анализ и прилож. **54** (2020), no. 1, 81–86.
16. L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191–201.
17. L. Rudolph, *Plane curves in fancy balls*, Enseign. Math. **31** (1985), 81–84.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА, УЛ. ГУБКИНА 8, МОСКВА, РФ (Н.К. и С.О.)

IMT, L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, ТУЛУЗА, ФРАНЦИЯ (С.О.)