О ЛИНИЯХ УРОВНЯ КОНФОРМНОГО ИЗОМОРФИЗМА ОБЛАСТИ НА КРУГ

С. Ю. Оревков

Пусть D – односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$. По теореме Римана существует голоморфная функция, задающая конформный изоморфизм области D на единичный круг. Обозначим через γ_r линию уровня модуля этой функции, отвечающую значению r. В настоящей заметке речь идет о поведении линий уровня γ_r при подходе к границе. Это поведение в некоторых отношениях бывает неожиданным. Например, в [1] показано, что число точек перегиба не всегда монотонно возрастает. Однако, в том вопросе, который исследуется здесь, линии уровня ведут себя так, как того и следовало бы ожидать.

Определение. Пусть множество A лежит снаружи от жордановой кривой γ. Назовем *внешним расстоянием* от γ до A величину

$$\text{вн. расст.}(\gamma, A) = \sup_{z\in\gamma} \inf_{\alpha} |\alpha|,$$

где $|\alpha|$ – длина кривой α, а inf берется по всем кривым, соединяющим точку z с множеством A, и расположенным снаружи от γ.

Обозначим через f функцию, задающую конформное отображение единичного круга на область D. Тогда γ_r – образ окружности $|z| = r$ при этом отображении. Кроме того, обозначим через $S(1-r)$ площадь образа кольца $r \le |z| < 1$ при отображении f.

Теорема 1. *Если граница ∂D области D ограничена, то* вн. расст.$(\gamma_r, \partial D) \to 0$ *при* $r \to 1$. *Этот предел равномерен по всем областям, в том смысле, что существует независимая от выбора области D функция $\Phi(s)$, монотонно убывающая и стремящаяся к нулю при $s \to 0$ такая, что* вн. расст.$(\gamma_r, \partial D) \le R\Phi(S(1-r))$, *где R – радиус круга, содержащего ∂D.*

Эта теорема была высказана в виде гипотезы А.Г. Витушкиным.

В качестве следствия получаем новое (и на наш взгляд, более простое) доказательство следующей теоремы, сформулированной в качестве гипотезы В.П. Хавиным [2] и доказанной А.Л. Варфаломеевым [3]. Для числа $a > 0$ и множества $K \subset \mathbb{C}$ назовем функцию *a-аналитической на K*, если она аналитична в некоторой окрестности множества K, и во всех точках $z \in K$ имеет радиус сходимости больший, чем a.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Теорема. (А.Л. Варфаломеев). *Пусть K – связный компакт в $\mathbb{C}$, и $a > 0$. Тогда существует открытое множество V, содержащее K, такое, что каждая a-аналитическая на K функция однозначно аналитически продолжается в V.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что K лежит в единичном круге. Пусть $U_1, \dots, U_n$ – компоненты множества $\mathbb{C} - K$, площадь которых больше, чем $\Phi^{-1}(a)$. (Из ограниченности K следует, что их конечное число.) Обозначим через V_j $(j = 1, \dots, n)$ внутренность той линии уровня конформного изоморфизма U_j на круг, начиная с которой вн. раст. до границы меньше, чем a. Тогда любая a-аналитическая в K функция продолжается в $\mathbb{C} - \bigcup V_j$. Действительно, возьмем минимальную линию уровня, во внешность которой продолжается функция. Тогда, если вн. раст. $< a$, то функция продолжилась бы во внешность чуть меньшей линии.

Теорема 2. *Если площадь области D конечна, то* вн. расст.$(\gamma_r, \partial D) \to 0$ *при* $r \to 1$.

Однако для областей с границей, уходящей на бесконечность, доказать равномерность этого предела нам не удалось.

Замечание 1. Для вещественных диффеоморфизмов области на круг теоремы 1, 2 не верны.

Теоремы 1 и 2 непосредственно вытекали бы из следующего утверждения.

Гипотеза. *Пусть K – круг, лежащий снаружи от γ_r, и имеющий с γ_r касание второго порядка. Тогда K пересекается с ∂D.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция f конформно отображает единичный круг на область D конечной площади S. Тогда f представляется в виде суммы голоморфных функций f_1 и f_2 таких, что*

$$|f_1'(z)| \le (1 - |z|)^{-1}, \tag{1}$$

$$|f_2'(z)| \le g'(|z|), \tag{2}$$

где g – непрерывная на $[0, 1]$ и дифференцируемая на $[0, 1)$ функция, такая что $g(1) < S$.

Доказательство. Пусть $f = \sum a_k z^k$, $K = \{k \in \mathbb{Z}_+ : |a_k| > 1/k\}$. Положим $f_1(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+ - K} a_k z^k$, $f_2(z) = \sum_{k \in K} a_k z^k$, $g(r) = \sum_{k \in K} |a_k| r^k$. Тогда неравенства (1) и (2) очевидны. Докажем, что функция g непрерывна на $[0, 1]$ и дифференцируемая на $[0, 1)$. Согласно внутренней теоремы площадей [4, с. 418], S – площадь области D – равна $\sum_k |a_k|^2 k$. Значит,

$$S > \sum_{k \in K} |a_k|^2 k > \sum_{k \in K} \left(\frac{1}{k}\right)^2 k = \sum_{k \in K} \frac{1}{k}.$$

Следовательно, по неравенству Коши–Буняковского,

$$\sum_{k \in K} |a_k| = \sum_{k \in K} \left(|a_k| k^{1/2}\right) k^{-1/2} < \left(\Big(\sum_{k \in K} |a_k|^2 k\Big)\Big(\sum_{k \in K} \frac{1}{k}\Big)\right)^{1/2} < S.$$

Замечание 2. В случае, когда область лежит в единичном круге, можно положить $f_1 = f$, $f_2 = g = 0$, и тогда приведенная лемма тривиально вытекает из леммы Шварца [4, с. 363]. Таким образом, эта лемма нужна только для доказательства теоремы 2, а в доказательстве теоремы 1 (а, значит, и в доказательстве теоремы Варфаломеева) она фактически не используется.

Доказательство теорем 1 и 2. Из соображений подобия и монотонности функции Φ следует, что теорему 1 достаточно доказывать при $R = 1$.

Пусть z_0 – произвольная точка окружности $\{|z| = r_0\}$. Обозначим: $h = 1 - r_0$, $L(h)$ =вн. расст.$(\gamma_{r_0}, \partial D)$, $S(h)$ – площадь образа кольца $\{r_0 \le |z| \le 1\}$ при отображении f. Введем на плоскости (z) полярные координаты: $z = r\exp(i\varphi)$. Пусть $\alpha_\theta : [0, h] \to \mathbb{C}$ – кривая, имеющая в координатах (r, φ) параметризацию $\alpha_\theta(s) = (r_0 + s, \varphi_0 + s\theta/h)$, где (r_0, φ_0) – полярные координаты точки z_0 (т.е. α_θ – отрезок спирали Архимеда, соединяющий точку z_0 с точкой единичной окружности $\exp(i(\varphi_0 + \theta))$).

Тогда в силу определения вн. расст.

$$\begin{aligned} L(h) &= \text{вн. расст.}(\gamma_{r_0}, \partial D) \le \inf_{0\le\theta\le h} |f(\alpha_\theta)| \le \frac{1}{h}\int_0^h |f(\alpha_\theta)|\, d\theta \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h d\theta \int_0^h |f'(\alpha_\theta(s))| \cdot \left|\frac{d\alpha_\theta}{ds}\right| ds. \end{aligned}$$

Сделаем замену $s = u$, $\theta = hv/u$. Тогда $\partial(s,\theta)/\partial(u,v) = h/u$, $\alpha_\theta(s) = z(u,v) = (u + r_0)\exp(i(v + \varphi_0))$. Учитывая, что $|d\alpha_\theta/ds| = r\sqrt{1 + (\theta/h)^2} < \sqrt{2}$ при $\theta < h$, $r < 1$, получаем

$$\begin{aligned} L(h) &< \sqrt{2}\int_0^h \frac{du}{u}\int_0^u |f'(z(u,v))|\, dv \\ &< \sqrt{2}\int_0^{h\omega} \frac{du}{u}\int_0^u |f_1'|\, dv + \sqrt{2}\int_{h\omega}^h \frac{du}{u}\int_0^u |f_1'|\, dv + \sqrt{2}\int_0^h \frac{du}{u}\int_0^u |f_2'|\, dv \\ &= \sqrt{2}(I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned}$$

где $f = f_1 + f_2$ – разложение из леммы (см. также замечание 2), а $\omega = \omega(h)$ – некоторая функция от h, стремящаяся к нулю при $h \to 0$, которую мы выберем позже. Оценим отдельно каждый из трех интегралов. В силу (1) имеем $|f_1'| \le 1/(1 - r) = 1/(h - u) \le 1/(h - h\omega)$ при $u \le h\omega$. Следовательно,

$$I_1 < \Phi_1 = \omega/(1 - \omega). \tag{3}$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$I_2 < \left(\int_{h\omega}^h \frac{du}{u^2}\int_0^u dv\right)^{1/2} \left(\int_{h\omega}^h du \int_0^u |f_1'|^2\, dv\right)^{1/2}.$$

Но выражение, стоящее под вторым корнем, есть площадь образа при отображении f фигуры, высекаемой из кольца $r_0 + h\omega \le |z| \le 1$ кривыми α_0 и α_h, следовательно, оно меньше, чем $S(h)$. Итак,

$$I_2 < \Phi_2 = \sqrt{-S(h)\ln\omega}. \tag{4}$$

Чтобы $\Phi_1 \to 0$ и $\Phi_2 \to 0$ при $h \to 0$, достаточно положить $\omega = \exp(-S(h)^{-1/2})$. Теорема 1 доказана.

Наконец, в силу (2) имеем $I_3 < h \cdot (g(1) - g(r_0))$, что вместе с (3) и (4) доказывает теорему 2.

Автор благодарен А.Г. Витушкину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**]. *Базилевич И.Е., Корицкий Г.В.* О некоторых свойствах однолистных конформных отображений // Матем. сб. 1953. Т. 32(74). С. 209–218.
[**2**]. *Хавин В.П.* Ряды Голубева и аналитичность в окрестности континуума // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 81. С. 33–35.
[**3**]. *Варфоломеев А.Л.* Аналитическое продолжение с континуума на его окрестность // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 113. С. 27–40.
[**4**]. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного // М.: Физматгиз, 1956.

НИИ Системных Исследований РАН, Москва