Математика

Представлено академиком В. А. Васильевым

УДК 515.162.8

КУБИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ГЕККЕ И ИНВАРИАНТЫ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

С. Ю. Оревков

Введение

Пусть α — дифференциальная 1-форма, задающая стандартную (тугую) контактную структуру в $\mathbb{R}^3$, например, $\alpha = x\,dy - y\,dx + dz$. Зацепление L в $\mathbb{R}^3$ называется *трансверсальным*, если $\alpha|_L$ нигде на L не обращается в нуль. Трансверсальные зацепления рассматриваются с точностью до изотопий, при которых в каждый момент зацепление остается трансверсальным. В последнее время трансверсальные зацепления и их инварианты активно изучаются, см., например, [2, 6, 7, 11] и приведенные там многочисленные ссылки. В настоящем сообщении мы предлагаем подход к построению инвариантов трансверсальных зацеплений, обобщающий подход Джонса [5] к построению инвариантов обычных зацеплений. Подход чисто алгебраический: вся геометрия сводится к трансверсальным аналогам теорем Александера и Маркова, доказанным в [1] и [10] соответственно.

Пусть B_n – группа кос из n нитей (n-кос). Обозначим стандартные (артиновские) образующие через $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Пусть $B_\infty = \lim B_n$ — предел относительно вложений $B_n \to B_{n+1}$, $\sigma_i \mapsto \sigma_i$. Пусть k — коммутативное кольцо и u, v переменные. Положим $A = k[u]$, $A_v = k[u,v]$ и обозначим соответствующие групповые алгебры через kB_∞, AB_∞ и A_vB_∞. Пусть $\pi : kB_\infty \to H_\infty$ — некоторый сюръективный морфизм k-алгебр. Продолжим его до морфизмов (которые тоже обозначим через π) A- и A_v-алгебр $AB_\infty \to AH_\infty = H_\infty \otimes_k A$ и $A_vB_\infty \to A_vH_\infty = H_\infty \otimes_k A_v$.

Через R обозначим A-подмодуль в AB_∞, порожденный всеми элементами вида

$$XY - YX, \quad X\sigma_n - uX, \qquad \text{где}\ \ X, Y \in B_n,\ n \ge 1, \tag{1}$$

а через R_v обозначим A_v-подмодуль в A_vB_∞, порожденный элементами вида (1), а также вида $X\sigma_n^{-1} - vX$, где $X \in B_n$, $n \ge 1$. Пусть $M = AH_\infty/\pi(R)$ и $M_v = A_vH_\infty/\pi(R_v)$. Проекцию на фактор $t_v : A_vH_\infty \to M_v$ естественно назвать *универсальным марковским следом* на H_∞. По теоремам Александера и Маркова он задает инвариант зацепления $P_{t_v}(L) = u^{(-n-e)/2}v^{(-n+e)/2}t_v(X) \in M_v \otimes_{A_v} k[u^{\pm 1/2}, v^{\pm 1/2}]$, где L — замыкание n-косы X и $e = e(X) = \sum_j e_j$ при $X = \prod_j \sigma_{i_j}^{e_j}$.

Точно так же, из трансверсальных аналогов теорем Александера и Маркова следует, что проекция на фактор[1] $t : AH_\infty \to M$ задает инвариант трансверсального зацепления $P_t(L) = u^{-n}t(X) \in M \otimes_A k[u^{\pm 1}]$, где L — замыкание n-косы X.

[1]Автор предлагает называть ее *универсальным полумарковским следом* на H_∞.

Понятно, что от таких инвариантов мало толку, если для M или M_v нет разумного решения проблемы тождества. Например, если $\ker\pi = 0$, то P_t не намного полезнее тавтологического инварианта $I(L) = L$. Однако если $k = \mathbb{Z}[\alpha]$ и $A_vH_\infty = A_vB_\infty/(\sigma_1^2+\alpha\sigma_1+1)$, то $M_v = A_v/(u+\alpha+v) \cong A$ и P_{t_v} — многочлен HOMFLY-PT с точностью до замены переменных.

В [8] описан модуль M_v, когда H_∞ есть фактор алгебры kB_∞ по кубическим соотношениям вида

$$\sigma_1^3 - \alpha\sigma_1^2 + \beta\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2^\delta\sigma_1^{-\delta}\sigma_2^\delta = \sum_{\varepsilon\in E} c_{\varepsilon,\delta}\sigma_1^{\varepsilon_1}\sigma_2^{\varepsilon_2}\sigma_1^{\varepsilon_3}, \quad \delta = \pm 1, \tag{2}$$

$E = \{\varepsilon \in \{-1,0,1\}^3 \mid \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1\varepsilon_3 = 0\}$, $\alpha, \beta, c_{\varepsilon,\delta} \in k$. В этом случае $M_v = A_v/I_v$ и басис Гребнера идеала I_v можно вычислить по крайней мере теоретически. Более того, его удалось найти на практике в частном случае, когда H_∞ — алгебра Фунара [4] и $\beta = 0$. Вычисления можно существенно ускорить с использованием [9].

В настоящей статье конструкция из [8] применена для нахождения M, когда H_∞ задано соотношениями (2). В этом случае $M \cong \hat{A}/\hat{I}$, где $\hat{A} = A[v_1, v_2, \dots]$ и $\hat{I}$ — идеал в $\hat{A}$. При фиксированном d получен алгоритм нахождения идеала $\hat{I} + (v_{d+1}, v_{d+2}, \dots)$. Тем самым, построена бесконечная последовательность (индексированная параметром d) вычислимых инвариантов трансверсальных зацеплений, которая несет ту же информацию, что и универсальный полумарковский след на кубической алгебре Гекке, заданной соотношениями (2).

1. Моноид кос с отмеченными точками

Обозначим через $\hat{B}_n$ моноид n-кос с конечным числом точек, отмеченных на нитях. Алгебраически он описывается как моноид, заданный образующими $\sigma_1^{\pm1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm1}, q_1, \dots, q_n$ (см. рис. 1) и стандартными соотношениями группы кос вместе с соотношениями $q_iq_j = q_jq_i$, $i, j = 1, \dots, n-1$, и $q_i\sigma_j = \sigma_j q_{T_j(i)}$, где T_j — транспозиция $(j, j+1)$. Элементы из $\hat{B}_n$ единственным способом записываются в виде $q_1^{a_1}\dots q_n^{a_n}X$, $X \in B_n$, $a_i \geq 0$, т. е., $\hat{B}_n = Q_n \rtimes B_n$, где Q_n — свободный абелев моноид с образующими $q_1, \dots, q_n$.

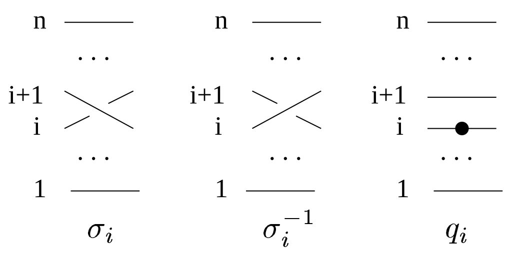


Рис. 1. Образующие $\hat{B}_n$

Обозначим через $\hat{B}_\infty^\sqcup$ дизъюнктное объединение $\bigsqcup_{n=1}^\infty \hat{B}_n$. Когда возможна неоднозначность толкования, будем писать $(X)_n$, чтобы подчеркнуть, что слово X представляет элемент из $\hat{B}_n$, например, замыкание косы $(1)_n$ есть тривиальное n-компонентное зацепление.

Теорема 1. *Трансверсальные зацепления находятся в биекции с фактором множества $\hat{B}_\infty^\sqcup$ по отношению эквивалентности, порожденному*

$$\begin{aligned}
&(XY)_n \sim (YX)_n, && X, Y \in \hat{B}_n,\ n \geq 1 \,(\textit{сопряжения}),\\
&(X)_n \sim (X\sigma_n)_{n+1}, && X \in \hat{B}_n,\ n \geq 1 \quad (\textit{положительные преобразования Маркова}),\\
&(Xq_n)_n \sim (X\sigma_n^{-1})_{n+1}, && X \in \hat{B}_n,\ n \geq 1 \quad (\textit{отрицательные } q\textit{-преобразования Маркова}).
\end{aligned}$$

Доказательство. Легко следует из леммы 2. $\square$

Обозначим через $\overset{s}{\sim}$ (сильная эквивалентность) отношение эквивалентности на $\hat{B}_\infty^\sqcup$, порожденное одними сопряжениями и положительными преобразованиями Маркова.

Лемма 1. (Ключевая лемма) *Пусть* $X \in \hat{B}_n$, $\varepsilon = \pm 1$, $X'_\varepsilon = X\sigma_n^{-1}\sigma_{n-1}^{2\varepsilon}$ *и* $X''_\varepsilon = X\sigma_{n-1}^{2\varepsilon}\sigma_n^{-1}$. *Тогда* $(X'_\varepsilon)_{n+1} \overset{s}{\sim} (X''_\varepsilon)_{n+1}$.

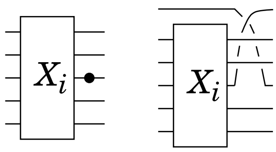
Доказательство. Обозначим $a = \sigma_{n-1}$, $b = \sigma_n$, $c = \sigma_{n+1}$, $\bar{a} = a^{-1}$, $\bar{b} = b^{-1}$, $\bar{c} = c^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
X'_1 =& X\bar{b}a\,a \xrightarrow{\text{Mm}} X\,\underline{\bar{b}ab}\,\underline{bc\bar{b}\bar{b}}\,a = X\,ab\,\underline{\bar{a}\bar{c}\bar{c}}\,b\,\underline{ca} = X\,ab\bar{c}\bar{c}\bar{a}ba\,\underline{c}\\
&\xrightarrow{\text{cyc}}\underline{cX\,a}\,b\bar{c}\bar{c}\,\underline{\bar{a}ba} = X\,a\,\underline{cb\bar{c}\bar{c}}\,ba\bar{b} = X\,a\,\underline{\bar{b}\bar{b}cbb}\,a\bar{b} \xrightarrow{\text{Mm}} X''_1\\
X'_{-1} =& X\,\underline{\bar{b}\bar{a}\bar{b}}\,b\bar{a} = X\bar{a}\bar{b}\,\bar{a}b\bar{a} \xrightarrow{\text{Mm}} X\bar{a}\,\underline{\bar{b}\bar{b}cb}\,\bar{a}b\bar{a} = \underline{X\,\bar{a}c}\,b\bar{c}\bar{c}\bar{a}b\bar{a} = \underline{c}X\,\bar{a}b\bar{c}\bar{c}\bar{a}b\bar{a}\\
&\xrightarrow{\text{cyc}}X\,\bar{a}b\,\underline{\bar{c}\bar{c}\bar{a}}\,b\,\underline{\bar{a}c} = X\,\bar{a}b\bar{a}\,\underline{\bar{c}\bar{c}bc}\,\bar{a} = X\,\bar{a}b\bar{a}\,\underline{bc\bar{b}}\,\bar{b}\bar{a} \xrightarrow{\text{Mm}} X\,\bar{a}b\,\underline{\bar{a}\bar{b}\bar{a}} = X''_{-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Пусть $\deg_q : \hat{B}_n \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм моноидов, такой что $\deg_q(q_i) = 1$ и $\deg_q(\sigma_i) = 0$ при всех i. Назовем $\deg_q(X)$ *q-степенью* косы X.

Лемма 2. (Diamond-лемма) *Если* $(Xq_n)_n \overset{s}{\sim} (X'q_m)_m$, *то либо* $(X\sigma_n^{-1})_{n+1} \overset{s}{\sim} (X'\sigma_m^{-1})_{m+1}$, *либо найдутся* $Z, Z', Z'', Z''' \in \hat{B}_\infty^\sqcup$, *связанные с* $X\sigma_n^{-1}$ *и* $X'\sigma_m^{-1}$ *следующим образом (стрелки соответствуют отрицательным q-преобразованиям Маркова, уменьшающим q-степень):*

$$\begin{array}{ccccccc}
X\sigma_n^{-1} & \overset{s}{\sim} & Z & & Z''' & \overset{s}{\sim} & X'\sigma_m^{-1}\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Z' & \overset{s}{\sim} & Z'' & &
\end{array} \tag{3}$$



Y_i Z_i

Рис. 2

Доказательство. Поскольку $Xq_n \overset{s}{\sim} X'q_m$, найдется цепочка слов $Xq_n = Y_0, Y_1, \dots, Y_t$ вида $Y_i = X_i q_{k_i} \in \hat{B}_{n_i}$, такая что Y_t — циклическая перестановка слова $X'q_m$ и для любой пары последовательных индексов i, j ($j = i \pm 1$) одна из следующих возможностей имеет место с точностью до замены i на j:

(i) $n_j = n_i$, $k_j = k_i$, X_i и X_j представляют один элемент в $\hat{B}_\infty^{\sqcup}$;
(ii) $n_j = n_i + 1$, $k_j = k_i$, $X_i = UV$, $X_j = U\sigma_{n_i}V$;
(iii) $n_j = n_i$, $X_i = U\sigma_\ell^\varepsilon$, $X_j = \sigma_\ell^\varepsilon U$, $k_j = T_\ell(k_i)$, $\varepsilon = \pm 1$;
(iv) $n_j = n_i$, $k_j = k_i \neq \ell$, $X_i = Uq_\ell$, $X_j = q_\ell U$.

При $i < j$ обозначим $\sigma_i\sigma_{i+1}\dots\sigma_{j-1}$ через $\pi_{i,j}$ и положим $\pi_{i,i} = 1$. Пусть $Z_i = X_i\pi_{k_i,n_i}\sigma_{n_i}^{-1}\pi_{k_i,n_i}^{-1} \in \hat{B}_{n_i+1}$ (см. рис. 2). Достаточно проверить, что:

(a) $Z_i \overset{s}{\sim} Z_j$ в каждом из случаев (i)–(iv) (отсюда вытекает $X\sigma_n^{-1} = Z_0 \overset{s}{\sim} Z_t$) и
(b) либо $Z_t = X'\sigma_m^{-1}$, либо $Z_t \overset{s}{\sim} Z \to Z' \overset{s}{\sim} Z'' \leftarrow Z''' \overset{s}{\sim} X'\sigma_m^{-1}$, где стрелки означают то же, что и в (3).

Утверждение (a) либо очевидно, либо следует из леммы 1. Например, в случае (ii) имеем $Z_i \overset{s}{\sim} Z_j$, так как

$$\begin{aligned} &Z_i = UV\pi_{k_i,n_i}\sigma_{n_i}^{-1}\pi_{k_i,n_i}^{-1} \overset{s}{\sim} U\sigma_{n_i}^{-1}\sigma_{n_i+1}\sigma_{n_i}V\pi_{k_i,n_i}\sigma_{n_i}^{-1}\pi_{k_i,n_i}^{-1} \overset{\text{def}}{=} Z_i',\\ &Z_j = U\sigma_{n_i}V\pi_{k_i,n_i+1}\sigma_{n_i+1}^{-1}\pi_{k_i,n_i+1}^{-1} \qquad \text{и} \quad \sigma_{n_j}Z_j\sigma_{n_j}^{-1} = Z_i'. \end{aligned}$$

В случае (iii) при $k_i = \ell + 1$, $\varepsilon = -1$, имеем $Z_i \overset{s}{\sim} Z_j$ по лемме 1, так как

$$\begin{aligned} Z_i &= U\sigma_\ell^{-1}\pi_{\ell+1,n_i}\sigma_{n_i}^{-1}\pi_{\ell+1,n_i}^{-1} = V\sigma_{n_i-1}^{-2}\sigma_{n_i}^{-1}W,\\ Z_j &= U\pi_{\ell,n_i}\sigma_{n_i}^{-1}\pi_{\ell,n_i}^{-1}\sigma_\ell^{-1} = V\sigma_{n_i}^{-1}\sigma_{n_i-1}^{-2}W \qquad \text{при}\\ V &= U\pi_{\ell+1,n_i}\pi_{\ell,n_i-1}\sigma_{n_i-1}, \qquad W = \pi_{\ell,n_i-1}^{-1}\pi_{\ell+1,n_i}^{-1}. \end{aligned}$$

Во всех остальных случаях утверждение (a) доказывается либо так же, либо проще.

Остается доказать утверждение (b). Напомним, что Y_t — циклическая перестановка слова $X'q_m$. Если $Y_t = X'q_m$, то $Z_t = X'\sigma_m^{-1}$ и утверждение доказано. Иначе $X' = Uq_kV$ и $Y_t = Vq_mUq_k$ при некотором $k \le m$. Тогда:

$$\begin{aligned} &Z_t = Vq_mU\pi_{k,m}\sigma_m^{-1}\pi_{k,m}^{-1} \overset{s}{\sim} \sigma_mU\pi_{k,m}\sigma_m^{-1}\pi_{k,m}^{-1}V\sigma_m^{-1}q_{m+1} \overset{\text{def}}{=} Z \to Z'\\ &X'\sigma_m^{-1} = Uq_kV\sigma_m^{-1} \overset{s}{\sim} \pi_{k,m+1}^{-1}V\sigma_m^{-1}U\pi_{k,m+1}q_{m+1} \overset{\text{def}}{=} Z''' \to Z''. \end{aligned}$$

Легко проверить, что Z' и Z'' сопряжены. $\square$

Замечание 1. Теорему 1 можно доказать геометрически, основываясь на интерпретации отмеченных точек как введенных в [3] локальных модификаций, увеличивающих индекс Терстона-Беннекена (см. расширенную версию статьи [10]).

2. От A к $\hat{A}$

Пусть обозначения будут как во введении. Обозначим также через $\hat{A}\hat{B}_\infty$ полугрупповую алгебру моноида $\hat{B}_\infty$ с коэффициентами в $\hat{A}$. Тогда $kB_\infty \subset AB_\infty \subset \hat{A}\hat{B}_\infty$. Обозначим через $\hat{H}_\infty$ фактор алгебры $\hat{A}\hat{B}_\infty$ по двустороннему идеалу, порожденному $\ker\pi$, а через $\hat{\pi} : \hat{A}\hat{B}_\infty \to \hat{H}_\infty$ — проекцию на фактор.

Пусть $\hat{R}$ — подмодуль в $\hat{A}\hat{B}_\infty$, порожденный всеми элементами вида

$$XY - YX,\ \ X\sigma_n - uX,\ \ X\sigma_n^{-1} - Xq_n,\ \ q_{n+1}^a X - v_a X, \quad \text{где } X, Y \in \hat{B}_n,\ n, a \geq 1.$$

Положим $\hat{M} = \hat{H}_\infty / \hat{\pi}(\hat{R})$ и пусть $\hat{t} : \hat{H}_\infty \to \hat{M}$ – проекция на фактор.

Теорема 2. *(a). M и $\hat{M}$ изоморфны как A-модули. (b). Если алгебра H_∞ задана соотношениями* (2)*, то $\hat{A}$-модуль $\hat{M}$ порожден единственным элементом $\hat{t}(1)$.*

Доказательство. (a). Следует из теоремы 1. (b). Следует из того, что $\hat{H}_{n+1} = \langle q_{n+1}\rangle \hat{H}_n + \hat{H}_n\sigma_n\hat{H}_n + \hat{H}_n\sigma_n^{-1}\hat{H}_n$, где $\langle q_{n+1}\rangle = \{1, q_{n+1}, q_{n+1}^2, \dots\}$ $\square$

Итак, $\hat{M} \cong \hat{A}/\hat{I}$, где $\hat{I}$ — аннулятор модуля $\hat{M}$.

3. Описание идеала $\hat{I}$

С этого места мы предполагаем, что алгебра $\hat{H}_\infty$ задана соотношениями (2). Пусть F_n^+ (соответственно, $\hat{F}_n$) — моноид, свободно порожденный образующими $x_1^{\pm1}, \dots, x_{n-1}^{\pm1}$ (соответственно, $x_1^{\pm1}, \dots, x_{n-1}^{\pm1}$, $q_1, \dots, q_n$), и $\hat{A}\hat{F}_n$ полугрупповая алгебра моноида $\hat{F}_n$ над кольцом $\hat{A}$. Определим *основные подстановки* (basic replacements) как в [8; §2.1, (i)–$(viii)$] и добавим к ним

(ix) $x_i q_j \to q_{T_i(j)} x_i$

Зададим $\hat{A}\hat{F}_n^{\mathrm{red}}$ и $\mathbf{r} : \hat{A}\hat{F}_n \to \hat{A}\hat{F}_n^{\mathrm{red}}$ так же, как в [8; §2.2] при помощи подстановок (i)–(ix). Тогда $\hat{A}\hat{F}_n^{\mathrm{red}}$ является свободным $\hat{A}$-модулем, свободно порожденным элементами вида $qX_1X_2\dots X_{n-1}$, $q \in Q_n$, $X_i \in S_i$, где S_i те же, что в [8; (5)]. Определим $\hat{\tau}_n : \hat{A}\hat{F}_n^{\mathrm{red}} \to \hat{A}\hat{F}_{n-1}^{\mathrm{red}}$, полагая $\hat{\tau}_n(qq_n^a X x_{n-1} Y) = \mathbf{r}(qXq_{n-1}^a Y)$, $\hat{\tau}_n(qq_n^a X x_{n-1}^{-1} Y) = \mathbf{r}(qXq_{n-1}^{a+1} Y)$, $\hat{\tau}_n(qq_n^a X) = v_a qX$ для $q \in Q_{n-1}$, $X, Y \in F_{n-1}^+$. Продолжим $\hat{\tau}_n$ на $\hat{A}\hat{F}_n$, полагая $\hat{\tau}_n(X) = \hat{\tau}_n(\mathbf{r}(X))$, и определим $\hat{\tau} : \hat{A}\hat{F}_\infty \to \hat{A}\hat{F}_0 = \hat{A}$, полагая $\hat{\tau}(X) = \hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\dots\hat{\tau}_n(X)$ для $X \in \hat{A}\hat{F}_n$.

Пусть sh^n — эндоморфизм $\hat{A}$-алгебры $\hat{A}\hat{F}_\infty$, такой что $\mathrm{sh}^n\sigma_i = \sigma_{i+n}$, $\mathrm{sh}^n q_i = q_{i+n}$. Обозначим $\mathrm{sh} = \mathrm{sh}^1$. Для $X \in F_{n+1}^+$ зададим $\rho_{n,X} \in \mathrm{End}_{\hat{A}}(\hat{A}\hat{F}_n^{\mathrm{red}})$, $\rho_{n,X}(Y) = \hat{\tau}_{n+1}(X\,\mathrm{sh}\,Y)$.

Пусть $\hat{J}_4$ — наименьший $\hat{A}$-подмодуль в $\hat{A}\hat{F}_4^{\mathrm{red}}$, удовлетворяющий условиям:

(J1) $\mathbf{r}(\mathbf{r}(X_3X_2)X_1) - \mathbf{r}(X_3\mathbf{r}(X_2X_1)) \in \hat{J}_4$ при всех $X_j \in \mathrm{sh}^{3-j} S_j \setminus \{1\}$, $j = 1, 2, 3$;
(J2) $\rho_{4,X}(\hat{J}_4) \subset \hat{J}_4$ при всех $X \in S_4$.

Аналогично зададим $\hat{J}_3$ как наименьший $\hat{A}$-подмодуль в $\hat{A}\hat{F}_3^{\mathrm{red}}$, удовлетворяющий условиям:

(J1′) $q_i\mathbf{r}(X) - \mathbf{r}(\mathbf{r}(X)q_j) \in \hat{J}_3$ при всех $X = x_2^{\varepsilon_1}x_1^{\varepsilon_2}x_2^{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon_2 \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, $j = T_2T_1^{\varepsilon_2}T_2(i)$.

(J2′) $\rho_{3,X}(\hat{J}_3) \subset \hat{J}_3$ при всех $X \in S_3$;

Пусть $\hat{N} = \hat{A}\hat{F}_2^{\mathrm{red}} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}\hat{F}_2^{\mathrm{red}}$. Зададим $\hat{A}$-линейные отображения $\hat{\tau}_N : \hat{N} \to \hat{A}$ и $\rho_\delta : \hat{N} \to \hat{N}$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \{-1, 0, 1\}^2$, положив $\hat{\tau}_N(Y_1 \otimes Y_2) = \hat{\tau}(Y_1Y_2)$, $\rho_\delta(Y_1 \otimes Y_2) = x_1^{\delta_1} \otimes \hat{\tau}_3((\operatorname{sh} Y_1)x_1^{\delta_2} \operatorname{sh} Y_2)$. Пусть $\hat{L}$ — наименьший $\hat{A}$-подмодуль в $\hat{N}$, удовлетворяющий условиям

(L1) $\hat{\tau}_3(x_2^{\varepsilon_1}x_1^{\varepsilon_2}x_2^{\varepsilon_3}) \otimes x_1^{\varepsilon_4} - x_1^{\varepsilon_2} \otimes \hat{\tau}_3(x_2^{\varepsilon_3}x_1^{\varepsilon_4}x_2^{\varepsilon_1}) \in \hat{L}$ при всех $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$ и при всех $\varepsilon_2, \varepsilon_4 \in \{-1, 0, 1\}$;

(L2) $\rho_\delta(\hat{L}) \subset \hat{L}$ при всех $\delta \in \{-1, 0, 1\}^2$.

Теорема 3. $\hat{I} = \hat{\tau}(\hat{J}_4) + \hat{\tau}(\hat{J}_3) + \hat{\tau}_N(\hat{L})$.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство основной теоремы в [8] (переменные q_i не учитываются при построении весовой функции wt).

Каждый из модулей $\hat{J}_4$, $\hat{J}_3$, $\hat{L}$ задан как предел возрастающей цепочки подмодулей $\hat{A}$-модуля конечного ранга. Поскольку кольцо $\hat{A}$ не нетерово, это еще не дает алгоритма для их вычисления. Однако можно аппроксимировать $\hat{A}$ нетеровыми кольцами $\hat{A}_d = A[v_1, \dots, v_d]$, и тогда проекции $\operatorname{pr}_d(\hat{I})$ можно эффективно вычислить; здесь через $\operatorname{pr}_d : \hat{A} \to \hat{A}_d$ обозначена проекция на фактор по идеалу $(v_{d+1}, v_{d+2}, \dots)$. А именно, обозначим через $(\hat{A}\hat{F}_n^{\mathrm{red}})_d$, $(\hat{J}_4)_d$, $(\hat{J}_3)_d$, $(\hat{N})_d$, $(\hat{L})_d$ модули над $\hat{A}_d$, построенные вышеуказанным способом, но с дополнительными соотношениями $q_i^{d+1} = 0$ для всех i. Тогда $\operatorname{pr}_d(\hat{I}) = \hat{\tau}(\hat{J}_4)_d + \hat{\tau}(\hat{J}_3)_d + \hat{\tau}_N(\hat{L})_d$, и эти модули можно вычислить (по крайней мере, теоретически) как пределы возрастающих цепочек нетеровых модулей. Ранг модуля $(\hat{A}\hat{F}_4^{\mathrm{red}})_d$ (в котором лежит $(\hat{J}_4)_d$) равен $315(d + 1)^4$. Есть надежда, что эти вычисления можно выполнить практически, по крайней мере, при $d = 1$ или 2.

Замечание 2. При $\beta = 0$ (случай, когда в [8] найден базис Гребнера идеала I_v) получающийся инвариант трансверсальных зацеплений заведомо не может быть использован для доказательства трансверсальной непростоты зацеплений. Действительно, в этом случае $1 = \alpha\sigma_1^{-1} + \sigma_1^{-3}$, откуда $q_1 = q_1(\alpha\sigma_1^{-1} + \sigma_1^{-3}) = (\alpha\sigma_1^{-1} + \sigma_1^{-3})q_2 = q_2$. Поэтому $q_1 = q_2 = q_3 = \dots$, следовательно $v_1 = v_2 = \dots$, и мы получаем $M = M_v$, $t = t_v$ и $P_t(L) = (v/u)^{(n-e)/2}P_{t_v}(L)$, т. е. инвариант P_t сводится к инварианту обычных зацеплений P_{t_v} и индексу Терстона-Беннекена $n - e$.

Замечание 3. Согласно [9], все вычисления в огромном модуле $(\hat{A}\hat{F}_4^{\mathrm{red}})_d$ можно выполнять с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ и в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ при не очень больших m.

Цитированная литература

1. D. Bennequin, *Entrelacements et équation de Pfaff*, Astérisque **107–108** (1983), 87–161.
2. J. S. Birman, W. M. Menasco, *Stabilization in the braid groups II: Transversal simplicity of knots*, Geom. and Topol. **10** (2006), 1425–1452.

3. D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, Topology **36** (1997), 1025–1053.
4. L. Funar, *On cubic Hecke algebras*, Commun. Math. Phys. **173** (1995), 513–558.
5. V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. **126** (1987), 335–388.
6. R. Lipshitz, L. Ng, S. Sarkar, *On transverse invariants from Khovanov homology*, arXiv:1303.6371.
7. L. Ng, P. Ozsváth, D. Thurston, *Transverse knots distinguished by knot Floer homology*, J. Symplectic Geom. **6** (2008), 461–490.
8. S. Yu. Orevkov, *Markov trace on the Funar algebra*, arXiv:1206.0765.
9. С. Ю. Оревков, *О модулярном вычислении базисов Гребнера с целыми коэффициентами*, Записки научн. семин. ПОМИ (в печати).
10. S. Yu. Orevkov, V. V. Shevchishin, *Markov theorem for transversal links*, J. of Knot Theory and its Ramifications **12** (2003), 905–913; расширенная версия: arXiv:math/0112207.
11. P. S. Ozsváth, Z. Szabó, D. P. Thurston, *Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology*, Geom. and Topol. **12** (2008), 941–980.

Математический ин-т им. В. А. Стеклова

Университет им. Поля Сабатье (Тулуза-3)
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr