ПРОИЗВЕДЕНИЯ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННОСТИ В $SL_2(\mathbb{R})$

С. Ю. Оревков

А н н о т а ц и я. В статье вычислено произведение любого набора классов сопряженности в группе $SL_2(\mathbb{R})$.

1. Введение

В настоящей статье мы вычисляем произведение любого набора классов сопряженности в группе $SL_2(\mathbb{R})$ (см. теорему 3.1 в §3). Вычисление длинное, но совершенно стандартное. Пожалуй, главная трудность была в лишь том, чтобы представить ответ в удобочитаемом виде.

Все произведения классов сопряженности вычислены в [9] для простых конечных групп порядка меньше миллиона и для всех спорадических простых конечных групп. В [12] то же самое сделано для конечных унитарных групп $GU_3(\mathbb{F}_q)$ и $SU_3(\mathbb{F}_q)$, а также для конечных линейных групп $GL_3(\mathbb{F}_q)$ и $SL_3(\mathbb{F}_q)$. Похожие вопросы изучались разными авторами, см. [2, 5, 8, 10, 15] и имеющиеся там ссылки.

Мой особый интерес к вычислению произведений классов в различных линейных или унитарных группах мотивирован возможными приложениями к плоским вещественным или комплексным алгебраическим кривым, см. [3, 11]. Вероятно, самый интересный и нетривиальный случай, когда произведения классов вычислены полностью, это случай унитарной группы $SU(n)$, см. [1, 4]. Представляется вероятным, что подход Белкале [4] можно распространить (хотя бы частично) на псевдоунитарные группы $SU(p,q)$, используя технику из [7]. Мы предполагаем это сделать в последующих статьях. Отметим, что некоторые произведения классов сопряженности в группах $PU(n,1)$ вычислены в [6, 13, 14].

Группа $SU(1,1)$ изоморфна $SL_2(\mathbb{R})$. В самом деле, отображение

$$\Phi : SL_2(\mathbb{R}) \to SU(1,1), \qquad A \mapsto \Phi(A) = P^{-1}AP, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

является изоморфизмом; напомним, что $SU(1,1) = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) \mid A^*JA = J\}$, где $J = \operatorname{diag}(1,-1)$. Основной мотивацией для вычисления произведений классов сопряженности в $SL_2(\mathbb{R})$ было желание получить представление о том, как могло бы выглядеть решение той же задачи для групп $SU(p,q)$.

класс	параметры	представитель	необходимое и достаточное условие на $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$
$\mathfrak{c}_1^{\varepsilon}$	$\{-1,1\}$	$\varepsilon I = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$	$A = \varepsilon I$
$\mathfrak{c}_2^{\varepsilon,\delta}$	$\{-1,1\}^2$	$\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & 0 \\ \delta & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$	$\operatorname{tr} A = 2\varepsilon \quad \& \quad \delta(c-b) > 0$
$\mathfrak{c}_3^{\alpha}$	$]0,2\pi[\,\setminus\{\pi\}$	$\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right)$	$\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha \quad \& \quad c\sin\alpha > 0$
$\mathfrak{c}_4^{\lambda}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$	$\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$	$\operatorname{tr} A = \lambda + \lambda^{-1}$

Таблица 1. Классы сопряженности в $SL_2(\mathbb{R})$. Для $\mathfrak{c}_2^{\varepsilon,\delta}$ (соответственно, $\mathfrak{c}_2^{\alpha}$) имеют место эквивалентности $\delta(c-b)>0 \Leftrightarrow (\delta c > 0$ или $\delta b < 0)$ (соответственно, $c\sin\alpha > 0 \Leftrightarrow b\sin\alpha < 0$)

2. Классы сопряженности

Пусть $G = SL_2(\mathbb{R})$. Классы сопряженности в G такие, как указано в таблице 1. Этот факт несложно вывести, например, из [5, §2].

Можно дать более геометричную характеризацию классов сопряженности. Для $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2)$ положим $\vec{x}\wedge\vec{y} = x_1y_2 - x_2y_1$.

Предложение 2.1. *Пусть $A \in G\setminus\{I,-I\}$ и $0<\alpha<\pi$. Тогда:*
(a). $A \in \mathfrak{c}_2^{\varepsilon,\delta}$, $\varepsilon,\delta = \pm 1$, если и только если $\operatorname{tr} A = 2\varepsilon$ и $\delta\vec{x}\wedge A\vec{x} \ge 0$ для всех $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$;
(b). $A \in \mathfrak{c}_2^{\alpha}$ если и только если $\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha$ и $\vec{x}\wedge A\vec{x} > 0$ для всех $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$. $\square$

Объединение всех классов вида $\mathfrak{c}_i^{\cdots}$ обозначим через $\mathfrak{c}_i$ $(i = 1,2,3,4)$. Для $X \subset G$ обозначим через X^{c} дополнение $G\setminus X$. Положим также

$$\mathfrak{c}_2^{\varepsilon,*} = \mathfrak{c}_2^{\varepsilon,+}\cup\mathfrak{c}_2^{\varepsilon,-}, \qquad \mathfrak{c}_4^{+} = \bigcup_{\lambda>1}\mathfrak{c}_4^{\lambda}, \qquad \mathfrak{c}_4^{-} = \bigcup_{\lambda<-1}\mathfrak{c}_4^{\lambda},$$

$$\overline{\mathfrak{c}_4^{+}} = \mathfrak{c}_4^{+}\cup\{I\}\cup\mathfrak{c}_2^{+*}, \qquad \overline{\mathfrak{c}_4^{-}} = \mathfrak{c}_4^{-}\cup\{-I\}\cup\mathfrak{c}_2^{-*}.$$

Для интервала j (открытого или замкнутого с любого конца), лежащего в $]0,2\pi[\setminus\{\pi\}$, положим $\mathfrak{c}_3^{j} = \bigcup_{\alpha\in j}\mathfrak{c}_3^{\alpha}$. Если левый конец интервала j есть «$]0\dots$» или «$]\pi\dots$», то «$]\dots$» можно заменить на «$[\dots$» или на «$\langle[\dots$». Аналогично, если правый конец интервала j есть «$\dots\pi[$» или «$\dots 2\pi[$», то «$\dots[$» можно заменить на «$\dots]$» или на «$\dots]\rangle$», и это будет означать:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_3^{[0,\dots} &= \mathfrak{c}_2^{++}\cup\mathfrak{c}_3^{]0,\dots}, & \mathfrak{c}_3^{\dots,\pi]} &= \mathfrak{c}_3^{\dots,\pi[}\cup\mathfrak{c}_2^{-+},\\
\mathfrak{c}_3^{[\pi,\dots} &= \mathfrak{c}_2^{--}\cup\mathfrak{c}_3^{]\pi,\dots}, & \mathfrak{c}_3^{\dots,2\pi]} &= \mathfrak{c}_3^{\dots,2\pi[}\cup\mathfrak{c}_2^{+-},\\
\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\dots} &= \mathfrak{c}_4^{+}\cup\mathfrak{c}_3^{[0,\dots}, & \mathfrak{c}_3^{\dots,\pi]\rangle} &= \mathfrak{c}_3^{\dots,\pi]}\cup\mathfrak{c}_4^{-},\\
\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,\dots} &= \mathfrak{c}_4^{-}\cup\mathfrak{c}_3^{[\pi,\dots}, & \mathfrak{c}_3^{\dots,2\pi])} &= \mathfrak{c}_3^{\dots,2\pi]}\cup\mathfrak{c}_4^{+},
\end{aligned}$$

например, $\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]} = \mathfrak{c}_4^+ \cup \mathfrak{c}_2^{++} \cup \left(\bigcup_{0<\alpha<\pi} \mathfrak{c}_3^\alpha\right) \cup \mathfrak{c}_2^{-+}$. Пусть

$$G^+ = \overline{\mathfrak{c}_4^+} \cup \mathfrak{c}_3^{]0,\pi[}.$$

3. Формулировка основного результата

Теорема 3.1. *(a). Для классов сопряженности, содержащихся в G^+ (см. замечание 3.2), их попарные и тройные произведения такие, как указано в таблицах 2 и 3; на рис. 1 представлены все тройки классов из $\mathfrak{c}_3$, произведения которых содержит I.*

(b). Пусть $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_2^{+-} = \mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_3^{\alpha} = \{-I\}^{\mathrm{c}}, && \\
&\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_3^{\alpha} = \mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta} = \{I\}^{\mathrm{c}}, && \\
&\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta} = \{-I\}^{\mathrm{c}} && \text{при } \alpha+\beta \ge \pi, \\
&\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta} = \{I\}^{\mathrm{c}} && \text{при } \alpha+\beta \le \pi, \\
&\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}\mathfrak{c}_3^{\delta} = \{-I\}^{\mathrm{c}} && \text{при } \pi < \alpha+\beta+\gamma+\delta < 3\pi,
\end{aligned}$$

произведения вида $\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}\mathfrak{c}_2^{+\pm}$ такие, как указано в таблице 3, а остальные произведения четырех нескалярных классов, содержащихся в G^+, дают всю группу G.

(c). Произведение любых пяти нескалярных классов — вся группа G.

Замечание 3.2. Как видно из таблицы 1, для любого класса сопряженности $\mathfrak{c}$ либо $\mathfrak{c} \subset G^+$, либо $-\mathfrak{c} \subset G^+$. Поэтому произведение любых классов сопряженности легко выражается через произведение классов из G^+.

Пусть $\tilde{G} = PSL_2(\mathbb{R})$. Обозначим образ в $\tilde{G}$ класса $\mathfrak{c}_i^{\cdots}$ через $\tilde{\mathfrak{c}}_i^{\cdots}$.

Следствие 3.3. *(a). Имеют место равенства $\tilde{\mathfrak{c}}_4^{\lambda}\tilde{\mathfrak{c}}_4^{\lambda} = \tilde{G}$ и*

$$\tilde{\mathfrak{c}}_2^{++}\tilde{\mathfrak{c}}_2^{++} = \tilde{\mathfrak{c}}_2^{+-}\tilde{\mathfrak{c}}_2^{+-} = \tilde{\mathfrak{c}}_4^{\lambda}\tilde{\mathfrak{c}} = \tilde{G} \setminus \{\tilde{I}\}, \qquad \text{где } \tilde{\mathfrak{c}} \ne \tilde{\mathfrak{c}}_4^{\lambda}, \tilde{I}$$

(остальные попарные произведения классов в $\tilde{G}$ см. в таблице 2).

(b). Пусть $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Следующие тройные произведения совпадают с $\tilde{G} \setminus \{\tilde{I}\}$:

$$\tilde{\mathfrak{c}}_2^{++}\tilde{\mathfrak{c}}_2^{+-}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\alpha}, \quad \tilde{\mathfrak{c}}_2^{+-}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\alpha}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\beta} \ (\text{при } \alpha+\beta<\pi), \quad \tilde{\mathfrak{c}}_2^{+\pm}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\alpha}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\beta} \ (\text{при } \alpha+\beta=\pi),$$
$$\tilde{\mathfrak{c}}_2^{++}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\alpha}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\beta} \ (\text{при } \alpha+\beta>\pi), \quad \tilde{\mathfrak{c}}_3^{\alpha}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\beta}\tilde{\mathfrak{c}}_3^{\gamma} \ (\text{при } \pi<\alpha+\beta+\gamma<2\pi).$$

Произведение любых других трех нетривиальных классов — вся группа $\tilde{G}$.

(c). Произведение любых четырех нетривиальных классов сопряженности — вся группа $\tilde{G}$.

	I	$\mathfrak{c}_2^{++}$	$\mathfrak{c}_2^{+-}$	$\mathfrak{c}_3^{\gamma}$	$\mathfrak{c}_4^{\nu}$
$\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}$	$\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle}$	$\{I\}^{\mathrm{c}}$	$\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle}\cup\overline{\mathfrak{c}_4^{+}}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}$	$\overline{\mathfrak{c}_4^{+}}$	$\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle}\cup\overline{\mathfrak{c}_4^{+}}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]}\cup\overline{\mathfrak{c}_4^{+}}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_2^{+-}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]}\cup\overline{\mathfrak{c}_4^{+}}$	$\{I\}^{\mathrm{c}}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_3^{\alpha}$	$\mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi]\rangle}$	$\big(\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[0,\alpha]}\big)^{\mathrm{c}}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_3^{\alpha}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\alpha[}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}$	$\big(\{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[\alpha,\pi]}\big)^{\mathrm{c}}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_4^{\lambda}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}$	$\{I\}^{\mathrm{c}}$	$\{-I\}^{\mathrm{c}}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_4^{\lambda}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}$	$\{-I\}^{\mathrm{c}}$	$\{I\}^{\mathrm{c}}$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta},\ \alpha+\beta<\pi$	$\mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi]\rangle}$	$\big(\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[0,\alpha+\beta]}\big)^{\mathrm{c}}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}$	См. табл. 3	$\swarrow$
$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta},\ \alpha+\beta=\pi$	$\{-I\}\cup\mathfrak{c}_4^{-}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}$		$\swarrow$
$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta},\ \alpha+\beta>\pi$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,\alpha+\beta]}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}$	$\big(\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi]}\big)^{\mathrm{c}}$		$\swarrow$
$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_4^{\lambda}$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}$	$\{I\}^{\mathrm{c}}$	$\{-I\}^{\mathrm{c}}$	$\{I\}^{\mathrm{c}}$	G
$\mathfrak{c}_4^{\lambda}\mathfrak{c}_4^{\lambda}$	$\{-I\}^{\mathrm{c}}$	G	G	G	G
$\mathfrak{c}_4^{\lambda}\mathfrak{c}_4^{\mu},\ \lambda\neq\mu$	$\{I,-I\}^{\mathrm{c}}$	G	G	G	G

Таблица 2. Двойные и тройные произведения классов сопряженности в $SL_2(\mathbb{R})$ («$\swarrow$» означает «см. другие ячейки этой таблицы»). Значения параметров: $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ и $\lambda,\mu,\nu>1$.

Условие на α,β,γ	$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}$	$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}\mathfrak{c}_2^{++}$	$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}\mathfrak{c}_2^{+-}$
$\alpha+\beta+\gamma<\pi$	$\big(\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[0,\alpha+\beta+\gamma[}\big)^{\mathrm{c}}$	G	$G\setminus\{I\}$
$\alpha+\beta+\gamma=\pi$	$\{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}$	$G\setminus\{-I\}$	$G\setminus\{I\}$
$\pi<\alpha+\beta+\gamma<2\pi$	$\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}$	$G\setminus\{-I\}$	$G\setminus\{I\}$
$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$	$\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}$	$G\setminus\{-I\}$	$G\setminus\{I\}$
$\alpha+\beta+\gamma>2\pi$	$\big(\{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{]\alpha+\beta+\gamma-2\pi,\pi]}\big)^{\mathrm{c}}$	$G\setminus\{-I\}$	G

Таблица 3. Тройные и некоторые четверные произведения классов сопряженности в $SL_2(\mathbb{R})$, содержащие $\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}$ при $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$.

Следствие 3.4. $\mathrm{cn}(\tilde{G})=\mathrm{ecn}(\tilde{G})=4$ *(в обозначениях из [9]).*

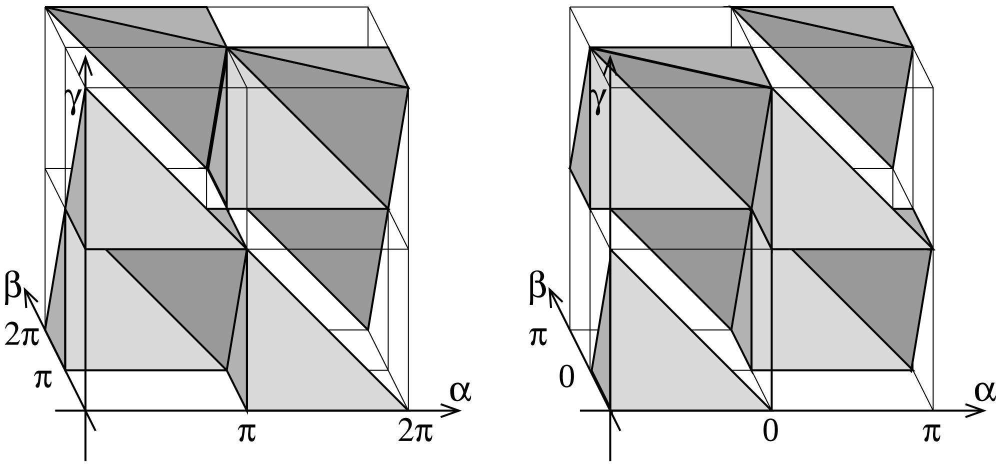

Рис. 1. Множества $\{(\alpha,\beta,\gamma)\in(]0,2\pi[\setminus\{\pi\})^3 \mid I\in\mathfrak{c}_3^\alpha\mathfrak{c}_3^\beta\mathfrak{c}_3^\gamma\}$ и $\{(\alpha,\beta,\gamma)\in(]-\pi,\pi[\setminus\{0\})^3 \mid I\in\mathfrak{c}_3^\alpha\mathfrak{c}_3^\beta\mathfrak{c}_3^\gamma\}$.

4. Значение следа на произведениях пары классов

Пусть Φ — гомоморфизм, заданный в (1); см. введение.

Лемма 4.1. *a).* $SU(1,1)=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ \bar b & \bar a\end{smallmatrix}\right)\mid a,b\in\mathbb{C}, a\bar a-b\bar b=1\}$.

b). $\Phi(\mathfrak{c}_3^\alpha)$ *есть класс сопряженности матрицы* $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \bar\lambda\end{smallmatrix}\right)$, *где* $\lambda=e^{\alpha i}$.

Доказательство. Пусть $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, $ad-bc=1$. Тогда $A\in SU(1,1)$ если и только если $A^*J=JA^{-1}$. При этом:

$$A^*J=\left(\begin{smallmatrix} \bar a & \bar c\\ \bar b & \bar d\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar a & -\bar c\\ \bar b & -\bar d\end{pmatrix},\quad JA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b\\ c & -a\end{pmatrix}. \quad \square$$

Лемма 4.2. *Пусть* $A\in\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]}$ *и* $B\in\overline{\mathfrak{c}_4^+}$. *Тогда* $AB\notin\mathfrak{c}_3^{[\pi,2\pi]}\cup\{I,-I\}$ *за исключением случая, когда обе матрицы* A *и* B *лежат в* $\mathfrak{c}_2$ *и имеют общий собственный вектор.*

Доказательство. Пусть v — вещественный собственный вектор матрицы B, не являющийся собственным вектором для A. Условие $B\in\overline{\mathfrak{c}_4^+}$ влечет положительность соответствующего собственного значения λ. Из предложения 2.1 следует, что $v\wedge Av\geq 0$. Кроме того, $v\wedge Av\neq 0$, поскольку вектор v не собственный для A. Поэтому $v\wedge ABv=\lambda v\wedge Av>0$, и требуемый результат вытекает из предложения 2.1. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть* $0<\alpha,\beta<\pi$. *Тогда:*

(a). $\{\mathrm{tr}(AB)\mid A\in\mathfrak{c}_3^\alpha,\ B\in\mathfrak{c}_3^\beta\}=\,]-\infty,\,2\cos(\alpha+\beta)]$;

(b). Если $A\in\mathfrak{c}_3^\alpha$, $B\in\mathfrak{c}_3^\beta$ *и* $\mathrm{tr}(AB)=2\cos(\alpha+\beta)$, *то* $AB\in\mathfrak{c}_3^{\alpha+\beta}$.

Доказательство. Пусть $A\in\mathfrak{c}_3^\alpha$ и $B\in\mathfrak{c}_3^\beta$. В силу леммы 4.1 можно считать, что $\Phi(A)=\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \bar\lambda\end{smallmatrix}\right)$ и $\Phi(B)=Q\left(\begin{smallmatrix} \mu & 0\\ 0 & \bar\mu\end{smallmatrix}\right)Q^{-1}$ при $\lambda=e^{\alpha i}$, $\mu=e^{\beta i}$ и $Q=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ \bar b & \bar a\end{smallmatrix}\right)$ при $a\bar a-b\bar b=1$.

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= (\lambda\mu + \bar\lambda\bar\mu)a\bar a - (\lambda\bar\mu + \bar\lambda\mu)b\bar b = 2(1+b\bar b)\cos(\alpha+\beta) - 2b\bar b\cos(\alpha-\beta)\\ &= 2\cos(\alpha+\beta) - 4b\bar b\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

из чего легко следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть* $0 < \alpha < \pi$. *Тогда* $\{\operatorname{tr}(AB) \mid A \in \mathfrak{c}_3^\alpha,\ B \in \mathfrak{c}_2^{++}\} = \ ]-\infty, 2\cos\alpha[$ *и* $\{\operatorname{tr}(AB) \mid A \in \mathfrak{c}_3^\alpha,\ B \in \mathfrak{c}_2^{+-}\} = \ ]2\cos\alpha, \infty[$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{c}_3^\alpha$ и $B \in \mathfrak{c}_2^{+\pm}$. Фиксируем квадратичную форму, инвариантную относительно A, и выберем положительно ориентированный ортонормальный базис (e_1, e_2) такой, что e_2 является собственным вектором для B. В этом базисе матрицы соответствующих операторов имеют вид: $A' = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ и $B' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \pm p & 1\end{pmatrix}$, где $p > 0$. Следовательно, $\operatorname{tr} A'B' = 2\cos\alpha \mp p\sin\alpha$. $\square$

Лемма 4.5. $\{\operatorname{tr}(AB) \mid A, B \in \mathfrak{c}_2^{++}\} = \{\operatorname{tr}(AB) \mid A, B \in \mathfrak{c}_2^{--}\} = \ ]-\infty, 2]$ *и* $\{\operatorname{tr}(AB) \mid A \in \mathfrak{c}_2^{++},\ B \in \mathfrak{c}_2^{+-}\} = [2, \infty[$.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $A, B \in \mathfrak{c}_2^{++}$ (остальные два случая аналогичны). Пусть $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathfrak{c}_2^{++}$. Тогда $b \le 0$ (см. таблицу 1) и $\operatorname{tr} AB = a + b + d = b + \operatorname{tr} B = b + 2$. Более того, b может принимать любое неположительное значение. Действительно, в качестве B можно взять матрицу $B_1 = \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(b < 0)$ или $B_2 = A$. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть* $A \in \mathfrak{c}_4$. *Тогда для любых* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *существуют матрицы* $B, C \in G$ *такие, что* $\operatorname{tr} B = t_1$, $\operatorname{tr} C = t_2$ *и* $AB = C$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $A = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$, $|\lambda| > 1$. Пусть $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Тогда $\operatorname{tr} B = a + d$ и $\operatorname{tr} AB = \lambda a + \lambda^{-1} d$. Поэтому достаточно найти a и d из системы уравнений $a + d = t_1$, $\lambda a + \lambda^{-1} d = t_2$, а затем найти b и c такие, что $bc = ad - 1$. $\square$

5. Двойные произведения классов сопряженности

Лемма 5.1. *Пусть* $0 < \alpha, \beta < \pi$. *Тогда произведение* $\mathfrak{c}_3^\alpha \mathfrak{c}_3^\beta$ *такое, как указано в таблице 2.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{c}_3^\alpha$, $B \in \mathfrak{c}_3^\beta$, и пусть $C = AB$.

Из леммы 4.3 следует, что множество значений $\operatorname{tr} C$ требуемое. Поэтому надо лишь показать, что класс сопряженности матрицы C однозначно определяется ее следом. При $C \in \mathfrak{c}_4$ это очевидно. Рассмотрим по отдельности все остальные случаи.

Случай 1. $\alpha + \beta < \pi$. Ясно, что $C \notin \{\pm I\}$.

Случай 1.1. $C \in \mathfrak{c}_2^{\varepsilon,\delta}$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$. Тогда $\varepsilon = -1$ по лемме 4.3, поэтому остается проверить, что $\delta \ne -1$. Предположим, что $\delta = -1$, т. е. $C \in \mathfrak{c}_2^{--}$. Поскольку $B = (-A^{-1})(-C)$, причем $-A^{-1} \in \mathfrak{c}_3^{\pi-\alpha}$ и $-C \in \mathfrak{c}_2^{++}$, то из леммы 4.4 вытекает $2\cos\beta = \operatorname{tr} B < \operatorname{tr}(-A^{-1}) = 2\cos(\pi - \alpha)$, что противоречит предположению $\alpha + \beta < \pi$.

Случай 1.2. $C \in \mathfrak{c}_3$. Пусть $C \in \mathfrak{c}_3^\gamma$, $\gamma \in \,]0, 2\pi[\, \setminus \{\pi\}$. Тогда лемма 4.3 дает $\cos\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{tr} C \leq \cos(\alpha+\beta)$, следовательно

$$\gamma \geq \alpha + \beta. \tag{2}$$

Поэтому остается исключить случай $\gamma > \pi$.

Предположим, что $\gamma > \pi$. Без потери общности можно считать, что $\alpha \geq \beta$. Мы имеем $(-A^{-1})(-C) = B$, причем $-A^{-1} \in \mathfrak{c}_3^{\pi-\alpha}$, $-C \in \mathfrak{c}_3^{\gamma-\pi}$. Обе величины $\pi-\alpha$ и $\gamma-\pi$ лежат в $]0,\pi[$. Следовательно, лемма 4.3, примененная к $-A^{-1}$, $-C$ и B, дает $\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tr} B \leq \cos((\pi-\alpha)+(\gamma-\pi)) = \cos(\gamma-\alpha)$. Вместе с (2), это неравенство влечет $\gamma-\alpha \geq 2\pi-\beta$. Таким образом, $\gamma \geq 2\pi+\alpha-\beta$, что противоречит предположениям $\alpha \geq \beta$ и $\gamma < 2\pi$.

Случай 2. $\alpha+\beta = \pi$. Результат следует из леммы 4.3.

Случай 3. $\alpha+\beta > \pi$. Тогда $C^{-1} = (-B^{-1})(-A^{-1})$, причем $-B^{-1} \in \mathfrak{c}_3^{\pi-\beta}$, $-A^{-1} \in \mathfrak{c}_3^{\pi-\alpha}$ и $(\pi-\beta)+(\pi-\alpha) \in \,]0,\pi[$, тем самым этот случай сводится к случаю 1. □

Лемма 5.2. *Пусть $0 < \alpha < \pi$. Тогда произведение $\mathfrak{c}_3^\alpha \mathfrak{c}_2^{+\pm}$ такое, как указано в таблице 2.*

Доказательство. Результат следует из лемм 4.4 и 4.2. □

Лемма 5.3. *$\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}$, $\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}$ и $\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_2^{+-}$ такие, как указано в таблице 2.*

Доказательство. $\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}$ имеет требуемый вид по леммам 4.5 и 4.2. Произведение $\mathfrak{c}_2^{+-}\mathfrak{c}_2^{+-}$ получается из $\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}$ переходом к обратным матрицам. Вычисление $\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-}$ вытекает из леммы 4.5 и из того наблюдения, что $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ лежит в $\mathfrak{c}_2^{++}$, $\{I\}$ или $\mathfrak{c}_2^{+-}$ в зависимости от знака $1-t$. □

Лемма 5.4. *Произведение $\mathfrak{c}_4^\lambda$ с любым классом сопряженности такое, как указано в таблице 2.*

Доказательство. Пусть $\lambda > 1$, и пусть $\mathfrak{c}$ — произвольный класс сопряженности. Обозначим через X то, чему должно быть равно произведение $\mathfrak{c}_4^\lambda\mathfrak{c}$ согласно таблице 2. Тот факт, что $\mathfrak{c}_4^\lambda\mathfrak{c}$ содержится в X, либо очевиден, либо следует из леммы 4.2. Докажем обратное включение. Пусть $A \in \mathfrak{c}_4^\lambda$, $B_0 \in \mathfrak{c}$ и $C_0 \in X$. Мы будем предполагть, что $B_0, C_0 \neq \pm I$ (иначе все очевидно). Положим $t_1 = \operatorname{tr} B_0$ и $t_2 = \operatorname{tr} C_0$. По лемме 4.6 можно выбрать матрицы B и C такие, что $\operatorname{tr} B = t_1$, $\operatorname{tr} C = t_2$ и $AB = C$. Переходя при необходимости к обратным матрицам, можно предполагать, что $B \sim B_0$ (заметим, что $A^{-1} \sim A$). Из $\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} C_0$ следует, что C сопряжена либо C_0, либо C_0^{-1}. Однако только один из этих двух классов сопряженности может содержаться в X (см. таблицу 2), что завершает доказательство. □

Все двойные произведения вычислены в леммах 5.1–5.4. Зная их, легко вычислить тройные и четверные произведения, см. ниже.

6. Тройные произведения классов сопряженности

В силу предыдущих вычислений мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++} &= \mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_2^{++} = \big(\mathfrak{c}_3^{]0,\pi[} \cup \mathfrak{c}_2^{++} \cup -\mathfrak{c}_2^{+-} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{++}\\ &= \mathfrak{c}_3^{]0,\pi]\rangle} \cup \mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle} \cup -\overline{\mathfrak{c}_4^{+}} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \{I\}^{\mathrm{c}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-} &= \mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_2^{+-} = \big(\mathfrak{c}_3^{]0,\pi[} \cup \mathfrak{c}_2^{++} \cup -\mathfrak{c}_2^{+-} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{+-}\\ &= \mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi[} \cup \overline{\mathfrak{c}_4^{+}} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle} = \big(\{-I\} \cup \mathfrak{c}_3^{[\pi,2\pi[}\big)^{\mathrm{c}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++} &= \mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_2^{++} = \big(\mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi[} \cup -\mathfrak{c}_2^{+-} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{++}\\ &= \mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi]\rangle} \cup -\overline{\mathfrak{c}_4^{+}} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \big(\{I\} \cup \mathfrak{c}_3^{[0,\alpha]}\big)^{\mathrm{c}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-} &= \mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_2^{+-} = \big(\mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi[} \cup -\mathfrak{c}_2^{+-} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{+-}\\ &= \mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi[} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_4^{\lambda}\,\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{++} &= \mathfrak{c}_4^{\lambda}\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_4^{\lambda}\big(\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]} \cup -\mathfrak{c}_4\big) = \mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} \cup -\{-I\}^{\mathrm{c}} = \{I\}^{\mathrm{c}},\\ \mathfrak{c}_4^{\lambda}\,\mathfrak{c}_2^{++}\mathfrak{c}_2^{+-} &= \mathfrak{c}_4^{\lambda}\overline{\mathfrak{c}_4^{+}} = \mathfrak{c}_4^{\lambda}\big(\mathfrak{c}_4^{+} \cup \langle\text{подмножество в } \mathfrak{c}_4{}^{\mathrm{c}}\rangle\big) = \{-I\}^{\mathrm{c}},\\ \mathfrak{c}_4^{\lambda}\,\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_2^{++} &= \mathfrak{c}_4^{\lambda}\mathfrak{c}_3^{]\alpha,\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_4^{\lambda}\big(-\mathfrak{c}_4^{+} \cup \langle\text{подмножество в } \mathfrak{c}_4{}^{\mathrm{c}}\rangle\big) = \{I\}^{\mathrm{c}},\\ \mathfrak{c}_4^{\lambda}\,\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta} &= \mathfrak{c}_4^{\lambda}\big(-\mathfrak{c}_4^{+} \cup \langle\text{подмножество в } \mathfrak{c}_4{}^{\mathrm{c}}\rangle\big) = \{I\}^{\mathrm{c}},\\ \mathfrak{c}_4^{\lambda}\,\mathfrak{c}_4^{\mu}\,\mathfrak{c} &= G \qquad\qquad \text{для любого нескалярного класса } \mathfrak{c}.\end{aligned}$$

Если $\alpha+\beta<\pi$, то

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_2^{++} &= \mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_2^{++} = \big(\mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi[} \cup -\mathfrak{c}_2^{+-} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{++}\\ &= \mathfrak{c}_3^{]\alpha+\beta,\pi]\rangle} \cup -\overline{\mathfrak{c}_4^{+}} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \big(\{I\} \cup \mathfrak{c}_3^{[0,\alpha+\beta]}\big)^{\mathrm{c}}.\end{aligned}$$

Если $\alpha+\beta=\pi$, то

$$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_2^{++} = \big(\{-I\} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{++} = -\mathfrak{c}_2^{++} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}.$$

Если $\alpha+\beta>\pi$, то

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_2^{++} &= \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,\alpha+\beta]}\mathfrak{c}_2^{++} = \big(-\mathfrak{c}_3^{]0,\alpha+\beta-\pi[} \cup -\mathfrak{c}_2^{++} \cup -\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_2^{++}\\ &= -\mathfrak{c}_3^{]0,\pi]\rangle} \cup -\mathfrak{c}_3^{[0,\pi]\rangle} \cup -\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}.\end{aligned}$$

Если $\alpha+\beta+\gamma<\pi$, то

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_3^{\gamma} &= \mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_3^{\gamma} = \big(\mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi-\gamma[}\cup\mathfrak{c}_3^{\pi-\gamma}\cup\mathfrak{c}_3^{]\pi-\gamma,\pi[}\cup-\mathfrak{c}_2^{+-}\cup-\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_3^{\gamma}\\
&= \mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta+\gamma]\rangle}\cup(\{-I\}\cup-\mathfrak{c}_4^{+})\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,\pi+\gamma[}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\gamma[}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle}\\
&= \big(\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[0,\alpha+\beta+\gamma[}\big)^{\mathrm{c}}.
\end{aligned}$$

Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_3^{\gamma} &= \mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_3^{\gamma} = \big(\mathfrak{c}_3^{\alpha+\beta}\cup\mathfrak{c}_3^{]\alpha+\beta,\pi[}\cup-\mathfrak{c}_2^{+-}\cup-\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_3^{\gamma}\\
&= (\{-I\}\cup\mathfrak{c}_4^{-})\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,\pi+\gamma[}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\gamma[}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}.
\end{aligned}$$

Если $\pi<\alpha+\beta+\gamma<2\pi$ и $\alpha+\beta<\pi$, то

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_3^{\gamma} &= \mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi]\rangle}\mathfrak{c}_3^{\gamma} = \big(\mathfrak{c}_3^{[\alpha+\beta,\pi[}\cup-\mathfrak{c}_2^{+-}\cup-\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_3^{\gamma}\\
&= \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,\pi+\gamma[}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\gamma[}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}.
\end{aligned}$$

Если $\pi<\alpha+\beta+\gamma<2\pi$ и $\alpha+\beta=\pi$, то

$$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_3^{\gamma} = \big(\{-I\}\cup-\mathfrak{c}_4^{+}\big)\mathfrak{c}_3^{\gamma} = -\mathfrak{c}_3^{\gamma}\cup-\mathfrak{c}_3^{\langle[0,\pi]\rangle} = \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}.$$

Все остальные тройные произведения можно свести к этим, переходя к обратным матрицам, и если надо, меняя знак. Например, если $\pi<\alpha+\beta+\gamma<2\pi$ и $\alpha+\beta>\pi$, то

$$\pi<(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi, \qquad (\pi-\alpha)+(\pi-\beta)<\pi,$$

следовательно,

$$\mathfrak{c}_3^{\alpha}\,\mathfrak{c}_3^{\beta}\,\mathfrak{c}_3^{\gamma} = (-\mathfrak{c}_3^{\pi-\alpha})^{-1}(-\mathfrak{c}_3^{\pi-\beta})^{-1}(-\mathfrak{c}_3^{\pi-\gamma})^{-1} = \big(-\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}\big)^{-1} = \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}.$$

7. Четверные произведения. Окончание доказательства теоремы 3.1

Как видно из таблицы 2, любое тройное произведение нескалярных классов сопряженности содержит $\mathfrak{c}_4$, а произведение $\mathfrak{c}_4$ с любым другим нескалярным классом содержит $\{I,-I\}^{\mathrm{c}}$. Таким образом, для вычисления произведения X четырех нескалярных классов достаточно проверить, лежат ли в нем I и $-I$. В свою очередь, чтобы выяснить, лежит ли $\pm I$ в X, достаточно проверить для одного из этих четырех классов, лежит ли обратный к нему класс в произведении трех других.

Проверим, например, что $X:=\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}\mathfrak{c}_2^{++}=\{-I\}^{\mathrm{c}}$ при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (см. таблицу 3). Действительно,

$$\begin{aligned}
\big(\mathfrak{c}_2^{++}\big)^{-1} &= \mathfrak{c}_2^{+-}\in\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}=\{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}, &&\text{тем самым } I\in X,\\
-\big(\mathfrak{c}_2^{++}\big)^{-1} &= \mathfrak{c}_2^{-+}\notin\mathfrak{c}_3^{\alpha}\mathfrak{c}_3^{\beta}\mathfrak{c}_3^{\gamma}=\{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}, &&\text{тем самым } -I\notin X.
\end{aligned}$$

В качестве другого примера вычислим произведение $\mathfrak{c}_3^\alpha\mathfrak{c}_3^\beta\mathfrak{c}_3^\gamma\mathfrak{c}_3^\delta$, которое мы пока обозначим через X. Мы будем рассматривать только случай $\alpha+\beta+\gamma+\delta\le 2\pi$, так как другой случай, когда эта сумма лежит в интервале $[2\pi,4\pi[$, можно свести к этому, переходя к обратным матрицам. Пусть $Y=\mathfrak{c}_3^\alpha\mathfrak{c}_3^\beta\mathfrak{c}_3^\gamma$. Тогда

$$Y=\begin{cases}\Big(\{I\}\cup\mathfrak{c}_3^{[0,\alpha+\beta+\gamma[}\Big)^{\mathrm{c}}, & \alpha+\beta+\gamma<\pi,\\ \{-I\}\cup\mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}, & \alpha+\beta+\gamma=\pi,\\ \mathfrak{c}_3^{\langle[\pi,2\pi]\rangle}, & \alpha+\beta+\gamma>\pi.\end{cases}$$

Следовательно, $\big(\mathfrak{c}_3^\delta\big)^{-1}=-\mathfrak{c}_3^{\pi-\delta}\in Y$, откуда $I\in X$, а поскольку $-\big(\mathfrak{c}_3^\delta\big)^{-1}=\mathfrak{c}_3^{\pi-\delta}$, мы получаем

$$-I\in X\;\Leftrightarrow\;\mathfrak{c}_3^{\pi-\delta}\in Y\;\Leftrightarrow\;\pi-\delta\notin\,]0,\alpha+\beta+\gamma[\;\Leftrightarrow\;\pi-\delta\ge\alpha+\beta+\gamma,$$

откуда $X=G$ при $\alpha+\beta+\gamma+\delta\le\pi$ и $X=\{-I\}^{\mathrm{c}}$ при $\pi<\alpha+\beta+\gamma+\delta\le 2\pi$.

Цитированная литература

1. S. Agnihotri, C. Woodward, *Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus*, Math. Research Letters **5** (1998), 817–836.
2. Z. Arad, M. Herzog (eds.), *Products of conjugacy classes in groups*, Lecture Notes in Math. 1112, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y., Tokyo, 1985.
3. E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, J. I. Cogolludo Agustín, *Effective invariants of braid monodromy*, Trans. Am. Math. Soc. **359** (2007), no. 1, 165–183.
4. P. Belkale, *Local systems on* $\mathbb{P}^1-S$ *for* S *a finite set*, Compos. Math. **129** (2001), 67–86.
5. J. I. Brenner, *Covering theorems for nonabelian simple groups, IV*, Jñānābha Ser. A **3** (1973), 77–84.
6. E. Falbel, R. A. Wentworth, *On products of isometries of hyperbolic space*, Topology Appl. **156** (2009), 2257–2263.
7. O. García-Prada, M. Logares, V. Muñoz, *Moduli spaces of parabolic* $U(p,q)$*-Higgs bundles*, Q. J. Math. **60** (2009), no. 2, 183–233.
8. N.L. Gordeev, *Products of conjugacy classes in perfect linear groups. Extended covering number*, Записки научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 67–89.
9. S. Karni, *Covering number of groups of small order and sporadic groups*, Ch. 3 in [2], pp. 52–196.
10. M.W. Liebeck, A. Shalev, *Diameter of finite simple groups: sharp bounds and applications*, Ann. of Math. **154** (2001), 383–406.
11. S. Yu. Orevkov, *Quasipositivity test via unitary representations of braid groups and its applications to real algebraic curves*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), no. 7, 1005–1023.
12. S. Yu. Orevkov, *Products of conjugacy classes in finite unitary groups* $GU(3,q^2)$ *and* $SU(3,q^2)$, Ann. Fac. Sci. de Toulouse. Mathématiques (6) **22** (2013), no. 2, 219–251.
13. J. Paupert, *Elliptic triangle groups in* $PU(2,1)$*, Lagrangian triples and momentum maps*, Topology **46** (2007), 155–183.
14. J. Paupert, P. Will, *Involution and commutator length for complex hyperbolic isometries*, Michigan Math. J. **66** (2017), 699–744.
15. C. Simpson, *Products of matrices*, Differential geometry, global analysis, and topology (Halifax, NS, 1990), CMS Conf. Proc., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991., pp. 157–185.