НОВАЯ АФФИННАЯ M-СЕКСТИКА

С.Ю. Оревков

Аффинной M-кривой мы будем называть аффинную вещественную алгебраическую кривую C, имеющую максимально возможное число $(m^2-m+2)/2$ компонент связности, где m — степень кривой C. Это эквивалентно тому, что проективное замыкание $\bar{C}$ кривой C является проективной M-кривой, т.е. имеет максимально возможное число $1+(m-1)(m-2)/2$ компонент связности, и пересекает бесконечно удаленную прямую L в m различных вещественных точках, лежащих на одной компоненте связности кривой C. Это определение отличается от приведенного в [1, 3], однако, оно нам представляется более естественным.

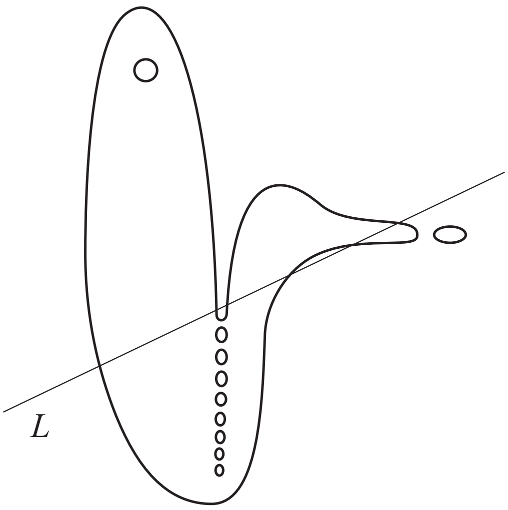

Рис. 1.

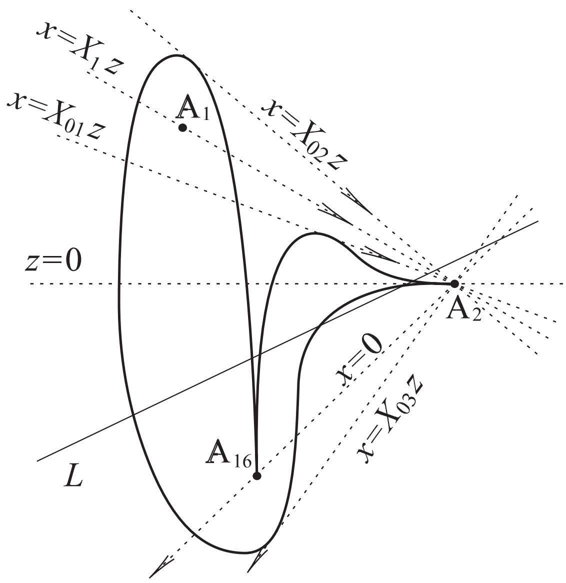

Рис. 2.

В работе [1] построено 33 изотопических типа M-кривых степени 6. Другие построения (причем, более подробно изложенные) этиз 33 кривых приведены в [2]. В [1, 3] объявлено также, что все остальные изотопические типы кроме 9 не реализуемы, однако, доказательства по крайней мере трех из этих запретов неверны, так как соответствующие изотопические типы реализуемы гладкими поверхностями в $\mathbf{CP}^2$, обладающими всеми используемыми в доказательствах свойствами алгебраических кривых (см. [4]). Недавно автору [4] удалось запретить все остававшиеся изотопические типы кроме 33 построенных в [1, 2], и кроме $A_3(0,5,5)^*$, $A_4(1,4,5)^*$, $B_2(1,8,1)$, $B_2(1,4,5)$, $C_2(1,3,6)^*$ в обозначениях [1, 2] (звездочкой помечены вышеупомянутые случаи, для которых доказательства запретов в [1, 3] заведомо ошибочны).

Настоящая заметка посвящена построению кривой, реализующей $B_2(1,8,1)$ (см. Рис. 1). Она строится возмущением подходящей особой рациональной кривой на основании Леммы Шустина [5] о независимости устранения особенностей.

Построение прямой и секстики, изображенных на Рис. 1. Сначала построим неприводимую вещественную секстику C, имеющую особенности A_1, A_2, A_{16} (напомним, что A_n — это особенность вида $y^2 \pm x^{n+1} = 0$). Из формулы рода следует, что такая кривая рациональна и не имеет других особенностей. Выберем на $\mathbf{RP}^2$ координаты $(x:y:z)$ так, чтобы особенности A_{16} и A_2 находились в точках (0:0:1) и (0:1:0), с касательными $y=0$ и $z=0$. Параметризация $\mathbf{CP}^1 \to C$, $0 \mapsto (0:0:1)$, $\infty \mapsto (0:1:0)$ имеет вид

$$x(t) = a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4, \quad y(t) = b_4t^4 + b_5t^5 + b_6t^6, \quad z(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3. \tag{1}$$

Диагональными заменами координат в $\mathbf{CP}^1$ и $\mathbf{CP}^2$ можно сделать

$$a_2 = a_3 = b_4 = c_0 = 1. \tag{2}$$

Условие тогоб что в точке (0:0:1) имеется особенность A_{16}, эквивалентно существованию чисел $\gamma_2, \dots, \gamma_7$, таких что

$$\operatorname{ord}_{t=0}\Big(y(t)z(t)^6 - \sum_{k=2}^{7} \gamma_k x(t)^k z(t)^{7-k}\Big) = 16. \tag{3}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно 7 раз раздуть данную особенность. (3) дает систему уравнений и неравенств на неизвестные a_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, $\gamma_2, \dots, \gamma_7$. Решая линейные (относительно соответствующих неизвестных) уравнения, находим последовательно γ_2, c_1, γ_3, c_2, γ_4, c_3, γ_5, γ_6, γ_7 и получаем систему из трех нелинейных уравнений на a_4, b_5, b_6. При помощи результантов исключаем a_4, b_6 и получаем, что b_5 (обозначим его через β) удовлетворяет уравнению

$$311\beta^3 - 293\beta^2 + 85\beta - 7 = 0. \tag{4}$$

Остальные коэффициенты в (1) выражаются через β по формулам

$$a_4 = (-317\beta^2 + 221\beta - 24)/56, \quad b_6 = (13\beta^2 - 5\beta)/8, \quad c_1 = 2 - \beta,$$

$$c_2 = (-398431\beta^2 + 312615\beta - 58304)/3624, \quad c_3 = 256(-58843\beta^2 + 46797\beta - 9236)/140883.$$

Уравнение (4) имеет единственный вещественный корень $\beta = 0.1395037384...$ Таким образом, существует единственная с точностью до проективной замены координат вещественная кривая C с требуемым набором особенностей. Пусть $F(X,Y) = 0$ — ее уравнение в аффинных координатах $X = x/z$, $Y = y/z$. Используя формулу $F(X,Y) = \operatorname{Res}_t\big(x(t) - z(t)X, y(t) - z(t)Y\big)$, выразим через β коэффициенты многочлена F, и затем вычислим многочлен $R(X) = \operatorname{Discr}_Y(F)$. Его разложение над полем $\mathbf{Q}(\beta)$ имеет вид $X^{17}(X - X_1)^2 R_0(X)$, где

$$X_1 = (1438630331\beta^2 - 801094822\beta + 83747003)/72828 \approx -0.15259$$

и R_0 — неприводимый над $\mathbf{Q}(\beta)$ многочлен степени 5, имеющий 3 вещественных корня $X_{01} \approx -0.15409$, $X_{02} \approx -0.15085$, $X_{03} \approx -0.13551$. То, что $\operatorname{ord}_{X=0} R(X) = 17$, доказывает другим способом, что в (0:0:1) особенность A_{16}. Вычисляя кратный корень $Y = Y_1$ многочлена $F(X_1, Y)$, находим ординату особой точки типа A_1:

$$Y_1 = (160515886061\beta^2 - 86960685268\beta + 9007482215)/23409 \approx -0.50314$$

Вычисляя в этой точке гессиан

$$\begin{aligned} F''_{XX}F''_{YY} - (F''_{XY})^2 = (&-9162439211650660293587811087155 2\beta^2 \\ &+ 50238947254921921240844068192256\beta \\ &- 52253918109675510897569083555 84)/7162977429658927721337 \\ \approx\ & 1.6694 \cdot 10^{-9} > 0, \end{aligned}$$

убеждаемся, что (X_1, Y_1) — уединенная двойная точка.

Для каждого вещественного корня многочлена R подставим в F его приближенное значение, и найдем все вещественные корни получившегося многочлена от Y. Результаты этих вычислений приведены в таблице

$X = X_{01}$	$X = X_1$	$X = X_{02}$	$X = X_{03}$	$X = 0$
-1.85807	-1.48933	-0.791026^*	0.691718^*	-4832.11
-0.35177	-0.50314^*	——	——	0.00000^*
-0.30441^*	-0.43017	——	——	27.7307

где звездочкой помечены кратные корни.

Находя число вещественных корней многочленов $F(X, \cdot)$ для промежуточных значений X и вычисляя знаки коэффициентов, отвечающих за поведение кривой при $t \to \infty$ ($a_4 = 0.011... > 0$, $b_6 = -0.055... < 0$, $c_3 = -7.001... < 0$), убеждаемся, что кривая C расположена так, как показано на Рис. 2 (стрелки указывают направление возрастания координаты Y). Выберем прямую L, близкую к оси $x = 0$ (см. Рис. 2). Из результатов Шустина [5, Лемма] следует, что кривую C можно возмутить так, чтобы из A_{16} получилось 8 овалов, а из A_1 и A_2 — по одному.

Замечания. **1.** Несложно проверить, что $\beta = (97 - 12\alpha - 14\alpha^2)/311$, где $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha = 3$. Однако, формулы для γ_j, F и R весьма громоздки независимо от того, использовать α или β. По-видимому, система координат, зафиксированная посредством (2), выбрана не самым удачным образом.

2. Приближенные вычисления производились с точностью 10^{-1000}.

Цитированная литература

1. А.Б. Корчагин, Е.И. Шустин, *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Известия АН СССР, сер. мат., Т. 52, N°6, 1988, С. 1181–1199.
2. A.B. Korchagin, *Smoothing of 6-fold singular points and constructions of 9th degree M-curves*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), V. 173, 1996, P. 141–155.
3. Е.И. Шустин, *К изотопической классификации аффинных M-кривых степени 6*, Методы качественной теории и теории бифуркаций, Горький, Изд-во ГГУ, 1988, С. 97–105.
4. S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Preprint, 1997.
5. Е.И. Шустин, *Новая M-кривая 8-й степени*, Мат. Заметки, Т. 42, N°2, 1987, С. 180–186.