

## Изгибаемые в плоскости полные двудольные графы

Полный двудольный граф  $K_{3,3}$ , рассматриваемый как шарнирная конструкция в плоскости с шарнирами в вершинах и стержнями постоянной длины в качестве ребер, в общем случае допускает лишь движения как жесткого целого, то есть является неизгибаемым. Два экзотических типа его изгибаемости были найдены в 1899 году Диксоном. С тех пор в ряде работ различных авторов вопрос об изгибаемости в плоскости полных двудольных графов  $K_{m,n}$  был решен почти для всех пар  $(m, n)$ . В данной работе этот вопрос решен для всех полных двудольных графов как в евклидовой плоскости, так и на плоскости Лобачевского, и на сфере. Даны полные и независимые от предыдущих работ доказательства без сложных компьютерных вычислений, схожие во всех трех случаях: евклидовом, гиперболическом и сферическом.

Библиография: 9 названий.

**Ключевые слова:** Полный двудольный граф, изгибаемость в плоскости, алгебраические кривые.

### § 1. Введение. Основные результаты.

Мы находим необходимые и достаточные условия (теорема 1 и замечания 1 и 2) изгибаемости в евклидовой плоскости  $E^2$  шарнирных устройств, отвечающих полным двудольным графам  $K_{m,n}$ . В §8 и §9 мы решаем ту же задачу для гиперболической плоскости  $H^2$  и для сферы  $S^2$ . Большинство результатов не новы, но мы приводим полные доказательства, которые почти одинаковы для  $E^2$ ,  $H^2$  и  $S^2$ . Мы не знаем, может ли гиперболический случай иметь самостоятельный интерес, но он служит очень удобным связующим звеном между доказательством в евклидовом и сферическом случаях. А именно, при переходе от  $E^2$  к  $H^2$  изменены только некоторые формулы, но геометрические и комбинаторные аргументы точно такие же. Тогда как при переходе от  $H^2$  к  $S^2$  все формулы те же (только с  $\cos$  и  $\sin$  вместо  $\cosh$  и  $\sinh$ ), и лишь комбинаторная часть несколько расширена.

*Конфигурацией шарнирного устройства, отвечающего графу  $K_{m,n}$  или, сокращенно,  $(m, n)$ -конфигурацией* (по-английски:  $(m, n)$ -*framework*; в работе [6] — шарнирник с ШСС  $K_{m,n}$ ) будем называть набор точек на евклидовой плоскости  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n)$  такой, что  $p_i \neq q_j$  при всех  $i, j$ . Его части  $(p_1, \dots)$  и  $(q_1, \dots)$  мы будем называть *долями* (двудольного графа). Говоря об  $(m, n)$ -конфигурациях, точки  $p_i$  и  $q_j$  будем называть *шарнирами* (joints), а пары

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 (М.К.).

точек  $(p_i, q_j)$  из разных долей (т. е. ребра нашего двудольного графа) – *рычагами* (rods). Будем говорить, что  $\mathbf{p}$  есть  $(m, n)$ -конфигурация *без наложений*, если ее шарниры попарно не совпадают. Назовем  $(m, n)$ -конфигурацию *изгибаемой*, если она допускает *изгибание*, т. е. непрерывное непостоянное движение шарниров  $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, q_n(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , такое, что  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$  и длины рычагов постоянны, т. е.  $|p_i(t) - q_j(t)|$  не зависит от  $t$  при всех  $i, j$ , и при этом какие-то два шарнира из разных долей  $p_{i_0}$  и  $q_{j_0}$  неподвижны:  $p_{i_0}(t) = p_{i_0}$  и  $q_{j_0}(t) = q_{j_0}$ . Эти определения очевидным образом распространяются на любые связные графы, но нам это не требуется.<sup>1</sup>

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\min(m, n) \geq 3$ . Тогда  $(m, n)$ -конфигурация без наложений изгибаема в том и только в том случае, когда выполнено одно из двух следующих условий:

(D1) Точки  $p_1, \dots, p_m$  лежат на одной прямой  $P$ , точки  $q_1, \dots, q_n$  лежат на другой прямой  $Q$ , и эти две прямые взаимно перпендикулярны.

(D2) Можно выбрать декартову прямоугольную систему координат в плоскости и два прямоугольника со сторонами, параллельными ее координатным осям, и общим центром симметрии в начале координат так, что точки  $p_1, \dots, p_m$  будут лежать в вершинах одного из этих прямоугольников, а точки  $q_1, \dots, q_n$  – в вершинах другого. Поскольку все точки различны, в этом случае  $m \leq 4$  и  $n \leq 4$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Легко видеть, что любая  $(1, n)$ -конфигурация изгибаема (и имеет  $n - 1$  степень свободы), а  $(2, n)$ -конфигурация без наложений изгибаема тогда и только тогда, когда нет четверки шарниров  $p_i, q_j, p_k, q_l$ , расположенных в таком порядке на некоторой прямой (ср. с леммой 3.1). Все изгибаемые  $(m, n)$ -конфигурации без наложений при  $\min(m, n) \geq 2$  имеют одну степень свободы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Очевидно, что если в  $(m, n)$ -конфигурации  $\mathbf{p}$  есть совпадающие шарниры, то она изгибаема тогда и только тогда, когда изгибаема двудольная конфигурация без наложений  $\bar{\mathbf{p}}$ , полученная из нее отождествлением всех пар совпадающих шарниров. Ясно также, что число степеней свободы  $d(\mathbf{p})$  конфигурации  $\mathbf{p}$  равно  $\max_{\mathbf{q}} d(\bar{\mathbf{q}})$ , где максимум берется по всем конфигурациям  $\mathbf{q}$ , полученным из  $\mathbf{p}$  малыми изгибаниями. Тем самым  $d(\mathbf{p}) = d(\bar{\mathbf{p}}) \leq 1$ , кроме случая  $p_1 = \dots = p_m$ , в котором  $d(\mathbf{p}) = n - 1$ , или симметричного случая  $q_1 = \dots = q_n$ ,  $d(\mathbf{p}) = m - 1$ .

В случае  $m = n = 3$  изгибаемые конфигурации (D1) и (D2) были открыты Диксоном (см. [2; §27(d), §28(n)]). Они называются *механизмами Диксона первого и второго рода* соответственно. Мы будем пользоваться этим названием при любых  $m, n \geq 3$ . Механизм Диксона второго рода при  $m = n = 4$ , по-видимому, впервые описал Боттема в работе [1] (см. также [11]). Условия (D1) и (D2) можно эквивалентно сформулировать в терминах длин рычагов. Для (D2) мы это сделаем только при  $(m, n) = (3, 3)$ , из чего очевидным образом вытекают аналогичные условия также для  $(3, 4)$  и  $(4, 4)$ .

<sup>1</sup>В литературе по механике неизгибаемую конфигурацию принято называть фермой, а изгибаемую, в зависимости от контекста, механизмом или положением механизма.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** (а).  $(m, n)$ -конфигурация без наложений является механизмом Диксона первого рода (см. рис. 1(а)) тогда и только тогда, когда для каждого цикла  $p_i q_j p_k q_l$  суммы квадратов длин противоположных ребер равны. Число таких условий равно  $C_m^2 C_n^2 = \frac{1}{4}(m^2 - m)(n^2 - n)$ , но независимых среди них, как легко проверить, лишь  $(m - 1)(n - 1)$ , в качестве которых можно выбрать, например, только условия, отвечающие циклам  $p_i q_j p_k q_l$  с фиксированными  $i$  и  $j$  (в частности, при  $m = n = 3$  из девяти условий независимы четыре).

(б). Изгибаемая  $(3, 3)$ -конфигурация без наложений  $(p_0, p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$  является механизмом Диксона второго рода тогда и только тогда, когда с точностью до перенумерации вершин в долях  $|q_0 p_0| = |q_1 p_1| = |q_2 p_2| = a$ ,  $|q_0 p_1| = |q_1 p_0| = b$ ,  $|q_0 p_2| = |q_2 p_0| = c$ ,  $|q_1 p_2| = |q_2 p_1| = d$  (см. рис. 2) и выполнено соотношение  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ . В этом случае все 4-циклы, в которые дважды входит  $a$ , параллелограмматические, т. е. имеют противоположные стороны равной длины.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Следующий пример показывает, что без условия изгибаемости утверждение (б) предложения 1 неверно:  $p_0 = (b, 0)$ ,  $p_1 = (0, a)$ ,  $p_2 = (d, 0)$ ,  $q_0 = (b, a)$ ,  $q_1 = (0, 0)$ ,  $q_2 = (d, a)$ , где  $a, b, d$  положительны,  $b \neq d$  и  $bd = a^2$ . В самом деле, в этом случае выполнены все условия на длины рычагов, но данная конфигурация не является механизмом Диксона 2-го рода. Это также дает пример двух  $(3, 3)$ -конфигураций без наложений и с равными длинами соответственных рычагов, из которых одна изгибаема (механизм Диксона 2-го рода), а другая неизгибаема (в силу предложения 1). Данный пример — частный случай примера на рис. 1(б).

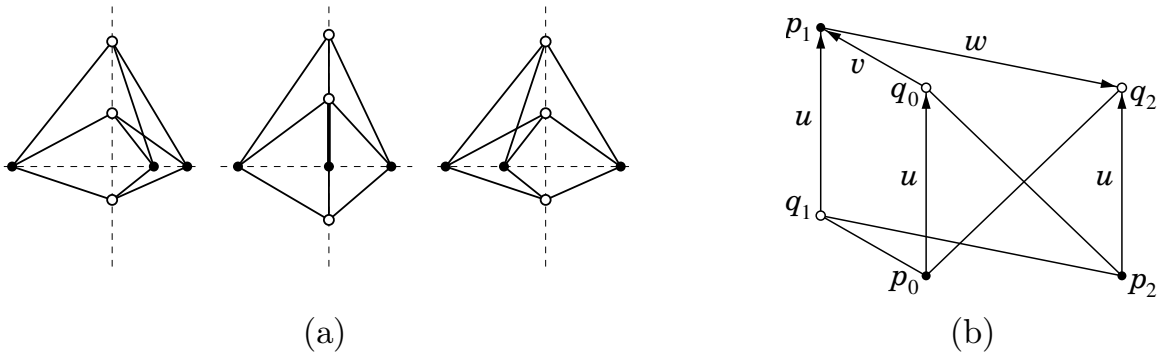


Рис. 1. (а) Механизм Диксона первого рода в движении. (б) Неизгибаемая  $(3, 3)$ -конфигурация с длинами, как у механизма Диксона второго рода. Здесь векторы  $u$ ,  $v$  и  $w$  удовлетворяют соотношениям  $u^2 + vw = u(v + w) = 0$ .

Доказательство предложения 1 несложно и оно приведено в конце этого раздела. Отметим, что в [8] теорема 1 доказана при  $m \geq 3$  и  $n \geq 5$ , а в [9] доказано, что длины рычагов изгибаемых  $(3, 3)$ -конфигураций без наложений такие, как в предложении 1, что в совокупности с этим предложением дает теорему 1 для  $m = n = 3$ . Другое доказательство теоремы 1 для  $m = n = 3$  приведено в [5; пример 4.3]. Сведение же общего случая к случаю  $m = n = 3$  совсем просто. Приведем его.

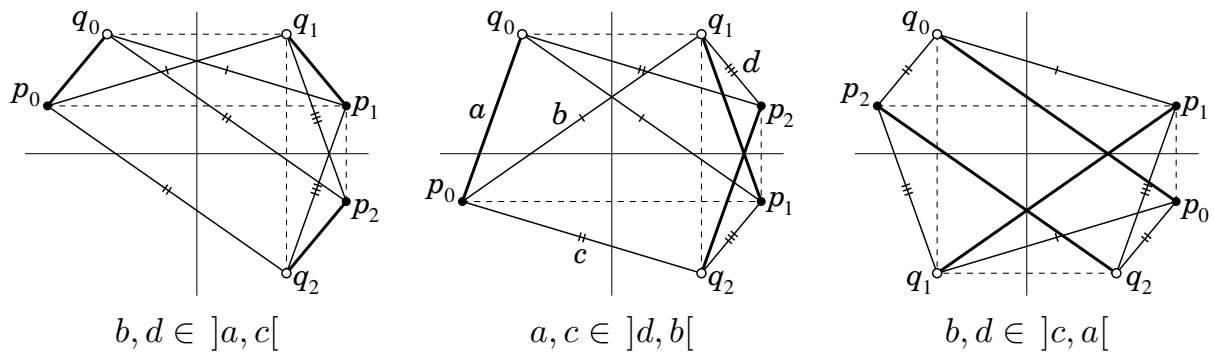


Рис. 2. Механизм Диксона второго рода. Условия на длины определяются (с точностью до перестановки  $b$  и  $d$ ) тем, лежат ли  $p_1$  и  $q_1$  в одном и том же квадранте, в соседних или в противоположных. Во всех случаях  $p_0q_0p_2q_2$  является параллелограммом, тогда как  $p_1q_1p_kq_k$ ,  $k = 0, 2$ , — антипараллелограммами.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** (В предположении, что для  $m = n = 3$  она верна.) Рассмотрим изгибаемую  $(m, n)$ -конфигурацию без наложений. Точки  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  удовлетворяют одному из условий (D1) или (D2).

Пусть они удовлетворяют условию (D1). Тогда точки  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_j$ ,  $j \geq 3$ , не удовлетворяют условию (D2). Следовательно, поскольку подграф, натянутый на них, изгибаем, они удовлетворяют условию (D1), т. е. точка  $q_j$  лежит на прямой  $Q$ . Таким образом, все точки  $q_1, \dots, q_n$  лежат на прямой  $Q$ . По тем же причинам точки  $p_1, \dots, p_m$  лежат на  $P$ .

Предположим теперь, что  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  удовлетворяют условию (D2). Рассмотрим набор точек  $(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_j)$ ,  $j \geq 3$ . Он тоже удовлетворяет условию (D2), так как точки  $p_1, p_2, p_3$  не лежат на одной прямой, а значит, условие (D1) не может выполняться. Априори можно было бы предположить, что условие (D2) выполнено для некоторого другого выбора координатных осей, однако в треугольнике  $p_1p_2p_3$  есть только одна пара перпендикулярных сторон, однозначно определяющих соответствующий прямоугольник, а значит направления осей и начало системы координат, совпадающее с центром прямоугольника. Заметим также, что симметричный относительно начала координат прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, однозначно определяется любой из его вершин. Следовательно, точки  $q_1, q_2, q_j$  лежат в вершинах того же самого прямоугольника, что и точки  $q_1, q_2, q_3$ . Аналогично доказывается, что и все точки  $p_1, \dots, p_m$  лежат в вершинах одного и того же прямоугольника. Теорема доказана.

Оставшаяся часть этого раздела посвящена доказательству предложения 1. В §§2–7 мы даем независимое доказательство Теоремы 1 для  $m = n = 3$ . В §8 и §9 будут рассмотрены гиперболический и сферический случаи соответственно.

**ЛЕММА 1.1.** Пусть  $m, n \geq 2$ . Тогда при любом изгибании  $(m, n)$ -конфигурации без наложений (см. определение выше) неподвижны только два шарнира.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Следует из того, что неподвижность двух несовпадающих шарниров одной доли влечет неподвижность всех шарниров другой доли.

**ЛЕММА 1.2.** *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности диагоналей четырехугольника (возможно, самопересекающегося) является равенство сумм квадратов длин его противоположных сторон.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u, v, w$  суть векторы трех последовательных сторон четырехугольника. Тогда удвоенное скалярное произведение векторов диагоналей равно  $2(u + v)(v + w) = v^2 + (u + v + w)^2 - u^2 - w^2$ .

Ясно, что любой параллелограмматический четырехзвенник без наложений является либо *параллелограммом* (когда у него параллельны противоположные стороны), либо *антипараллелограммом* (когда у него параллельны диагонали). При этом он является одновременно и тем и другим тогда и только тогда, когда он *вырожден*, т. е. все вершины лежат на одной прямой.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.** (а). Следует из леммы 1.2.

(б). Условие на длины выводится из условия (D2) прямым вычислением. Докажем обратную импликацию. Поскольку  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ , из леммы 1.2 следует, что диагонали четырехзвенника  $p_0q_1p_1q_2$  взаимно перпендикулярны. То же можно сказать и о диагоналях четырехзвенника  $q_0p_1q_1p_2$  (см. рис. 2), т. е.  $p_0p_1 \perp q_1q_2$  и  $q_0q_1 \perp p_1p_2$ . По условию все три четырехзвенника  $\Pi_{ij} = p_iq_jp_jq_i$ ,  $i < j$ , параллелограмматичны.

Предположим, что  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_{12}$  оба являются невырожденными параллелограммами (см. рис. 1(b)). Тогда  $p_0q_0q_2p_2$  — тоже параллелограмм, а поскольку обе его диагонали имеют длину  $c$ , он является прямоугольником со сторонами  $a$  и  $\sqrt{c^2 - a^2}$ . Из этого следует, что при изгибании с неподвижными вершинами  $p_0, q_0$  вершины  $p_2$  и  $q_2$  тоже неподвижны, что противоречит лемме 1.1.

Полученное противоречие показывает, что  $\Pi_{01}$  или  $\Pi_{12}$  — антипараллелограмм (возможно, вырожденный). Пусть это будет  $\Pi_{01}$  (случай, когда это  $\Pi_{12}$ , рассматривается аналогично). Тогда  $q_1q_2 \perp p_0p_1 \parallel q_0q_1 \perp p_1p_2$ , значит,  $q_1q_2 \parallel p_1p_2$ , т. е.  $\Pi_{12}$  — тоже антипараллелограмм. Поэтому точки  $q_0$  и  $q_2$  зеркально симметричны точке  $q_1$  относительно взаимно перпендикулярных осей симметрии этих антипараллелограммов (см. рис. 2). То же можно сказать и о точках  $p_0, p_2$  и  $p_1$ . Предложение доказано.

**Благодарность.** Мы благодарим Маттео Галле за то, что он сообщил нам о статьях [3] и [5], и за некоторые комментарии к ним.

## § 2. Общая схема доказательства теоремы 1 для $m = n = 3$ .

Рассмотрим изгибание некоторой (3, 3)-конфигурации без наложений  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$ , при котором шарниры  $p_0, q_0$  закреплены. Тогда  $p_1, p_2, q_1, q_2$  движутся по окружностям, которые мы обозначим через  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  соответственно. Забудем на некоторое время про шарнир  $p_2$ . Тогда в общем положении (когда отрезок  $q_1p_1$  не ортогонален окружности  $P_1$ ) смещение шарнира  $q_1$  однозначно определяет смещение шарнира  $p_1$ , которое, в свою очередь, в общем положении определяет смещение  $q_2$ . Мы получаем зависимость  $q_2 = \mathcal{F}_1(q_1)$  (см. рис. 3).<sup>2</sup> Аналогично шарнир  $p_2$  осуществляет зависимость  $q_2 = \mathcal{F}_2(q_1)$ .

<sup>2</sup>В инженерной литературе эта зависимость называется передаточной функцией нулевого порядка или функцией положения (см., например, [7; §41]).

Чтобы наше шарнирное устройство не заклинило, функции  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  должны совпадать. Точка  $(q_1, \mathcal{F}_i(q_1))$ ,  $i = 1, 2$ , движется по некоторой вещественной алгебраической кривой  $C_i$  на торе  $Q_1 \times Q_2$ , и для изгибаемости  $\mathbf{p}$  надо, чтобы  $C_1$  и  $C_2$  имели общую неприводимую компоненту.

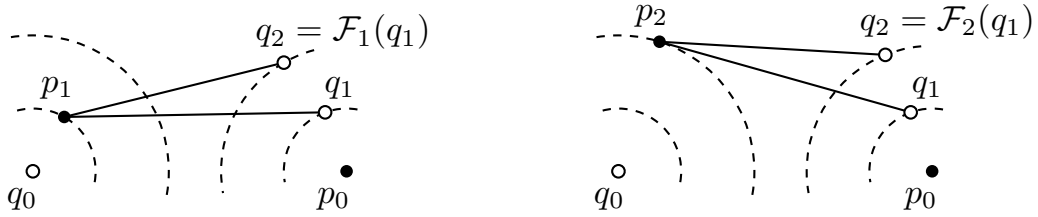


Рис. 3. Передаточные функции  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$

Перейдем к более формальному изложению. Фиксируем точки  $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^2$ . Без ограничения общности можно положить  $q_0 = (0, 0)$  и  $p_0 = (r, 0)$ . Фиксируем положительные числа  $r_{ij}$ ,  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ ,  $r_{00} = r$  (в евклидовом случае можно положить  $r = 1$ ). Обозначим также  $R_i = r_{i0}$  и  $r_i = r_{0i}$ ,  $i = 1, 2$ . Пусть  $M$  — множество всех наборов  $(p_1, p_2; q_1, q_2)$  таких, что  $|p_i q_j| = r_{ij}$ ,  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ . Естественно рассматривать  $M$  как пространство модулей  $(3, 3)$ -конфигураций с данной матрицей длин. Допуская некоторую вольность речи, элементы множества  $M$  мы тоже будем называть  $(3, 3)$ -конфигурациями, подразумевая что они включают в себя  $p_0$  и  $q_0$ . Как и выше, зададим окружности

$$P_k = \{p_k \in \mathbb{R}^2 : |q_0 p_k| = R_k\}, \quad Q_k = \{q_k \in \mathbb{R}^2 : |p_0 q_k| = r_k\}, \quad k = 1, 2,$$

и обозначим  $Q = Q_1 \times Q_2$ . Для  $k = 1, 2$  рассмотрим пространство  $(2, 3)$ -конфигураций  $(p_0, p_k; q_0, q_1, q_2)$  с теми же длинами:

$$M_k = \{(p_k, q_1, q_2) \in P_k \times Q : |p_k q_1| = r_{k1}, |p_k q_2| = r_{k2}\}.$$

Положим  $C_k = \tau_k(M_k)$ , где  $\tau_k : P_k \times Q \rightarrow Q$ ,  $k = 1, 2$ , — стандартные проекции (это те кривые, о которых выше шла речь при обсуждении передаточных функций). Ясно, что в общем случае  $C_1$  и  $C_2$  — алгебраические кривые на  $Q$  (хотя если, например, в  $M$  есть элемент, для которого  $p_0 = p_k$ , то  $C_k = Q$ ). Найдем уравнения, задающие  $C_1$  и  $C_2$ . Как и в [9], в качестве параметра на окружности  $Q_j$ ,  $j = 1, 2$ , мы выберем комплексное число  $t_j$ , пробегающее окружность  $|t_j| = r_j/r$  на комплексной плоскости, такое, что вектор  $p_0 q_j$  имеет координаты  $(r \operatorname{Re} t_j, r \operatorname{Im} t_j)$ . Другими словами, параметр точки  $q_j$  — это образ вектора  $\frac{1}{r} p_0 q_j$  при стандартном отождествлении  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{C}$ . Аналогично выберем параметры  $T_i$  на окружностях  $P_i$ . В этих координатах условия  $|p_i q_j| = r_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , принимают вид  $f_{ij}(T_i, t_j) = 0$ , где  $f_{ij}$  — числитель рациональной функции, получающейся из выражения  $r^2(1 + T_i - t_j)(1 + \bar{T}_i - \bar{t}_j) - r_{ij}^2$  в результате замены  $\bar{T}_i = R_i^2/(r^2 T_i)$ ,  $\bar{t}_j = r_j^2/(r^2 t_j)$ , т. е. (ср. с [9; eqs. (6)–(9)])

$$f_{ij}(T_i, t_j) = (1 + T_i - t_j)(r^2 T_i t_j + R_i^2 t_j - r_j^2 T_i) - r_{ij}^2 T_i t_j.$$

$C_i$  есть проекция множества решений системы уравнений  $f_{i1} = f_{i2} = 0$ , поэтому она задается уравнением  $F_i(t_1, t_2) = 0$ , где

$$F_i(t_1, t_2) = R_i^{-2} \operatorname{Res}_{T_i}(f_{i1}, f_{i2}) \quad (2.1)$$

(см. замечание 4 ниже). Выражение для  $F_i$  как многочлен от  $t_1, t_2$  и от всех  $r_{ij}$  содержит 126 мономов, и  $\deg_{t_j} F_i = 4$ . В случае изгибаемости без наложений образы проекций  $M$  на  $Q_j$  не дискретны по лемме 1.1, из чего вытекает следующий факт.

ЛЕММА 2.1. *Если  $M$  содержит изгибаемую  $(3, 3)$ -конфигурацию без наложений, то*

$$\operatorname{Res}_{t_1}(F_1, F_2) = \operatorname{Res}_{t_2}(F_1, F_2) = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, задача нахождения изгибаемых  $(3, 3)$ -конфигураций без наложений сводится к вычислению результата  $F_1$  и  $F_2$  и решению системы уравнений, полученной приравниванием нулю его коэффициентов. Именно этим способом в работе [9] получен упомянутый во введении результат о том, что длины рычагов у изгибаемых  $(3, 3)$ -конфигураций без наложений такие, как у механизмов Диксона. Согласно [9],  $\operatorname{Res}(F_1, F_2)$  содержит 4.900.722 мономов. В [9] также сказано: “the computations are very extensive with respect to time and memory”. К тому же, как мы поняли из [9], обработка решения системы уравнений, полученного с помощью Maple или Singular, требует написания некой дополнительной программы.

Когда мы занялись задачей об изгибаемых  $(3, 3)$ -конфигурациях, мы, не зная о работе [9], тоже попробовали решить эту систему уравнений, но не справились с вычислительными трудностями и стали искать способы их обойти.<sup>3</sup> В результате мы нашли изложенное ниже доказательство, в котором самое длинное вычисление — нахождение результата (7.1), занимающее на компьютере 25 мс. Следует отметить, что выбор параметров  $T_i$  и  $t_j$ , заимствованный из [9], сильно упростил вычисления в лемме 4.1 (до этого мы использовали стандартную параметризацию окружности тангенсом половинного угла).

В общих чертах наше доказательство заключается в следующем. Если в  $M$  есть изгибаемая  $(3, 3)$ -конфигурация без наложений, то кривые  $C_1$  и  $C_2$  имеют общую компоненту, т. е. многочлены  $F_1$  и  $F_2$  имеют общий множитель. Если один из  $F_1, F_2$  неприводим, они пропорциональны. Это дает уравнения, которые легко решить.

Если же  $F_1$  и  $F_2$  имеют общий множитель, не будучи пропорциональными, мы смотрим, как комплексификации кривых  $M_i, C_i, C_{ij} = \{f_{ij} = 0\}$  и  $P_i$  отображаются друг на друга при проекциях. Несложный анализ показывает, что для каждого  $i = 1, 2$  либо одна из  $C_{ij}$  приводима, либо проекции  $C_{i1} \rightarrow P_i$  и  $C_{i2} \rightarrow P_i$  разветвлены над одними и теми же точками. Оба эти условия приводят к уравнениям, решая которые, мы получаем либо параллелограмматический цикл, либо *дельтоид* (4-цикл, симметричный относительно диагонали), специальным образом расположенный относительно  $p_0, q_0$ . Варьируя выбор закрепленных шарниров, мы приходим либо к механизму Диксона 1-го рода, либо к конфигурации с тремя параллелограмматическими циклами, примыкающими друг к другу, как в механизме Диксона 2-го рода. В последнем случае вычислить результат  $F_1$  и  $F_2$  уже совсем просто.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Даже когда коэффициенты в  $f_{ij}$  при  $T_i^2$  равны нулю, результат в (2.1) понимается как результат квадратичных многочленов ( $R_{2,2}$  в

<sup>3</sup>Вероятно, если бы мы тогда были знакомы с работой [9], то не стали бы этого делать.

обозначениях из [4; Ch. 12] — определитель матрицы Сильвестра  $4 \times 4$ ). Аналогично, результаты в (2.2) и дискриминанты  $D_j$  и  $\Delta_j^\pm$  в §6 соответствуют  $R_{4,4}$  и  $D_2$  из [4; Ch. 12].

### § 3. Предварительные леммы

**ЛЕММА 3.1.** (Следует из леммы 1.1.) *Если при  $m, n \geq 2$  в  $(m, n)$ -конфигурации в каком-либо 4-цикле есть рычаг, длина которого равна сумме длин остальных трех рычагов цикла, то эта конфигурация неизгибаема.*

**ЛЕММА 3.2.** *Пусть  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$  — изгибаемая  $(3, 3)$ -конфигурация без наложений. Предположим, что  $|q_0 p_j| = |q_1 p_j|$  для всех  $j = 0, 1, 2$ , т. е. шарниры  $q_0$  и  $q_1$  равноудалены от каждого из шарниров  $p_0, p_1, p_2$ . Тогда  $\mathbf{p}$  — механизм Диксона 1-го рода.*

Поскольку изгибаемые конфигурации нежестки (т. е. инфинитезимально изгибаемы), эта лемма сразу вытекает из теоремы Уайтли<sup>4</sup> [10], согласно которой  $(m, n)$ -конфигурация без наложений при  $\min(m, n) \geq 3$  нежестка тогда и только тогда, когда либо все шарниры лежат на кривой второго порядка, либо все шарниры одной доли и хотя бы один шарнир другой доли лежат на прямой (при  $m = n = 3$  второе условие есть частный случай первого). Однако, поскольку мы хотим дать самодостаточное (self-contained) доказательство теоремы 1, докажем лемму 3.2 непосредственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим длины рычагов через  $r_i = |p_0 q_i| = |p_1 q_i|$ ,  $R_i = |p_2 q_i|$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Рассмотрим непрерывную деформацию  $\mathbf{p}(t)$ . Условие равноудаленности означает, что точки  $q_j$  коллинеарны и  $q_0 q_1 \perp p_0 p_1$  в течение всей деформации. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что  $q_j$  остаются на оси  $y = 0$ , а  $p_0$  и  $p_1$  остаются на оси  $x = 0$ . Пусть  $q_i = (x_i, 0)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и обозначим  $x$ -координату точки  $p_2$  через  $a$ . Тогда

$$r_0^2 - x_0^2 = r_j^2 - x_j^2, \quad R_0^2 - (x_0 - a)^2 = R_j^2 - (x_j - a)^2, \quad j = 1, 2. \quad (3.1)$$

Дифференцируя эти тождества по  $t$ , получаем систему четырех линейных однородных уравнений относительно производных  $x'_0, x'_1, x'_2, a'$ . Ее определитель равен  $a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)$ . Изгибаемость влечет существование ненулевого решения, поэтому  $a = 0$ .

### § 4. Общий случай: $F_1$ и $F_2$ пропорциональны

Введем обозначения, как в §2, и предположим, что  $M$  содержит изгибаемую  $(3, 3)$ -конфигурацию без наложений  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$ .

**ЛЕММА 4.1.** *Если  $F_1 = \lambda F_2$  для некоторого числа  $\lambda$ , то  $\mathbf{p}$  реализует механизм Диксона 1-го рода.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим  $F = F_1 - \lambda F_2$ . Это многочлен, имеющий вид  $\sum_{k,l=0}^4 c_{kl} t_1^k t_2^l$ , где  $c_{kl}$  — многочлены от  $r_{ij}^2$ , причем  $c_{00} = c_{01} = c_{43} = c_{44} = 0$ .

<sup>4</sup>С ее помощью в [8] доказана теорема 1 при  $m \geq 3$  и  $n \geq 5$ .



По условию все коэффициенты  $c_{kl}$  должны тождественно обращаться в нуль. Имеет место симметрия  $c_{4-k,4-l} = r_1^{2k-4} r_2^{2l-4} c_{k,l}$ , поэтому из этих 21 уравнений только 11 различны. Вычисление показывает, что

$$c_{04} = r_1^4 (R_1^2 - r - \lambda R_2^2 + \lambda r^2),$$

$$c_{20} = r_2^4 (r_1^2 (\lambda - 1) - \lambda r_{21}^2 + r_{11}^2), \quad c_{02} = r_1^4 (r_2^2 (\lambda - 1) - \lambda r_{22}^2 + r_{12}^2).$$

*Случай 1.*  $\lambda = 0$ . Тогда уравнения  $c_{04} = c_{20} = c_{02} = 0$  дают  $R_1 = r$ ,  $r_1 = r_{11}$  и  $r_2 = r_{12}$ , т. е. шарниры  $p_0$  и  $p_1$  равноудалены от всех шарниров  $q_j$  и результат вытекает из леммы 3.2.

*Случай 2.*  $\lambda = 1$ . Тогда уравнения  $c_{04} = c_{20} = c_{02} = 0$  дают  $R_1 = R_2$ ,  $r_{11} = r_{21}$  и  $r_{12} = r_{22}$ , т. е. шарниры  $p_1$  и  $p_2$  равноудалены от всех шарниров  $q_j$  и результат опять вытекает из леммы 3.2.

*Случай 3.*  $R_2 = r$  и  $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$ . Тогда из уравнения  $c_{04} = 0$  находим  $R_1 = r$ . Выражая  $r_{11}^2$  и  $r_{12}^2$  из уравнений  $c_{20} = c_{02} = 0$  и подставляя результат в  $c_{12} + c_{13} = 0$ , получаем уравнение

$$\lambda(\lambda - 1)r_1^2(r_{22}^2 - r_2^2)^2 = 0,$$

откуда находим  $r_{22} = r_2$ , и тогда уравнение  $c_{21} = 0$  принимает вид

$$\lambda(\lambda - 1)r_2^2(r_{21}^2 - r_1^2)^2 = 0.$$

В итоге получаем  $R_2 = r$ ,  $r_{21} = r_1$  и  $r_{22} = r_2$ , т. е. шарниры  $p_0$  и  $p_2$  равноудалены от всех шарниров  $q_j$  и результат опять вытекает из леммы 3.2.

*Случай 4.*  $R_2 \neq r$  и  $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$ . Из  $c_{04} = 0$  находим  $\lambda = (R_1^2 - r)/(R_2^2 - r)$ . Поэтому из  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq 1$  следует, что  $R_1 \neq r$  и  $R_1 \neq R_2$ .

Выразив  $r_{11}^2$  и  $r_{12}^2$  из уравнений  $c_{20} = 0$  и  $c_{02} = 0$  соответственно и подставив результат (и найденное выражение для  $\lambda$ ) в уравнения  $c_{12} + c_{13} = 0$  и  $c_{21} = 0$ , получаем, соответственно,  $\mu r_1^2(A + B)^2 = 0$  и  $\mu r_2^2 AB = 0$ , где

$$\mu = r_1^2(R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 - r^2)(R_2^2 - r^2)^{-2},$$

$$A = r^2 + r_{21}^2 - r_1^2 - R_2^2, \quad B = r_1^2 + r_{22}^2 - r_2^2 - r_{21}^2, \quad A + B = r^2 + r_{22}^2 - r_2^2 - R_2^2.$$

Поскольку  $\mu \neq 0$ , заключаем, что  $AB = A + B = 0$ , откуда  $A = B = 0$ . При подстановке в  $c_{20}$  и в  $c_{02}$  выражения для  $a$  и замене  $R_2^2 = r^2 + r_{21}^2 - r_1^2$  (для  $c_{20}$ ) и  $R_2^2 = r^2 + r_{22}^2 - r_2^2$  (для  $c_{02}$ ) получаем, соответственно,  $r^2 + r_{11}^2 = r_1^2 + R_1^2$  и  $r^2 + r_{12}^2 = r_2^2 + R_1^2$ . Эти условия в совокупности с  $A = 0$  и  $B = 0$  порождают все условия на длины рычагов из предложения 1(а). Лемма доказана.

## § 5. Комплексификация и компактификация рассматриваемых кривых

Для дальнейшего нам будет удобнее вместо аффинных координат  $T_i$  и  $t_j$  (см. §2) использовать в качестве параметров проективные (однородные) координаты  $(T_i : S_i)$  и  $(t_j : s_j)$ , пробегающие окружности  $\{r^2 T_i \bar{T}_i = R_i^2 S_i \bar{S}_i\}$  и  $\{r^2 t_j \bar{t}_j = r_j^2 s_j \bar{s}_j\}$  на комплексной проективной прямой  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

В этом и следующем разделе через  $P_i$  и  $Q_j$  мы будем обозначать копии  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , снабженные соответствующими координатами, а через  $M$ ,  $M_i$  и  $C_i$  — компактификации комплексификаций соответствующих алгебраических множеств, введенных в §2, т. е.  $M = \{\hat{f}_{11} = \dots = \hat{f}_{22} = 0\} \subset P_1 \times P_2 \times Q$ ,  $M_i = \{\hat{f}_{i1} = \hat{f}_{i2} = 0\} \subset P_i \times Q$  и  $C_i = \{\hat{F}_i = 0\} \subset Q$ , где  $Q = Q_1 \times Q_2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ,

$$\hat{f}_{ij}(T_i, S_i; t_j, s_j) = S_i^2 s_j^2 f_{ij}(T_i/S_i, t_j/s_j), \quad \hat{F}_i(t_1, s_1; t_2, s_2) = s_1^4 s_2^4 F_i(t_1/s_1, t_2/s_2).$$

Мы зададим также кривые  $C_{ij} = \{\hat{f}_{ij} = 0\} \subset P_i \times Q_j$ .

Несмотря на то, что множество  $M$  мы расширили, (3, 3)-конфигурациями мы будем называть только «настоящие (3, 3)-конфигурации», т. е. только те элементы  $M$ , у которых все координаты лежат на окружностях  $\{r^2 T_i \bar{T}_i = R_i^2 S_i \bar{S}_i\}$  и  $\{r^2 t_j \bar{t}_j = r_j^2 s_j \bar{s}_j\}$ ; их множество (т. е. «старое  $M$ ») обозначим через  $\mathbb{R}M$ . Это множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции, действующей на каждом сомножителе  $P_i$ ,  $Q_j$  как

$$(T_i : S_i) \mapsto (R_i^2 \bar{S}_i : r^2 \bar{T}_i), \quad (t_j : s_j) \mapsto (r_j^2 \bar{s}_j : r^2 \bar{t}_j). \quad (5.1)$$

## § 6. Следствия из приводимости многочленов $\hat{f}_{ij}$ и $\hat{F}_i$ .

Введем обозначения, как в §5, и предположим, что  $M$  содержит изгибаемую (3, 3)-конфигурацию без наложений  $\mathbf{p}$ . В этом разделе мы найдем необходимые условия приводимости многочлена  $\hat{F}_1$ . Упростим обозначения:  $T = T_1$ ,  $S = S_1$ ,  $R = R_1$ ,

$$a_j = r_{1j}, \quad A_0^\pm = R \pm r, \quad A_j^\pm = a_j \pm r_j, \quad j = 1, 2,$$

(т. е.  $A_j^\pm = r_{1j} \pm r_{0j}$ ,  $j = 0, 1, 2$ ). Положим  $D_j = \text{Discr}_{t_j}(f_{1j})$ . Вычисление дает:

$$D_j = d_j^+ d_j^-, \quad d_j^\pm = T^2 + (R^2 + r^2 - (A_j^\pm)^2)T + R^2, \quad j = 1, 2, \quad (6.1)$$

и при этом для  $\Delta_j^\pm = \text{Discr}_T(d_j^\pm)$  мы имеем

$$\Delta_j^\pm = (A_j^\pm + A_0^+)(A_j^\pm - A_0^+)(A_j^\pm + A_0^-)(A_j^\pm - A_0^-). \quad (6.2)$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$A_j^+ \pm A_k^- \neq 0, \quad A_j^+ + A_k^+ \neq 0, \quad j, k = 0, 1, 2. \quad (6.3)$$

ЛЕММА 6.1. (Доказательство очевидно.) Если многочлены  $T^2 + b_k T + R^2$ ,  $k = 1, 2$ , имеют общий корень, то они совпадают.

Напомним, что *дельтоид* — это 4-цикл, симметричный относительно одной из диагоналей, которую мы в этом случае будем называть *осью дельтоида*.

ЛЕММА 6.2. Многочлен  $\hat{f}_{1j}$ ,  $j = 1, 2$ , приводим над  $\mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда 4-цикл  $p_0 q_0 p_1 q_1$  либо параллелограмматичен, либо является дельтоидом.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Это утверждение не эквивалентно лемме 4 из статьи [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимость для дельтоида очевидна. Приводимость для параллелограмматического 4-цикла, не являющегося дельтоидом, тоже легко усматривается: одна неприводимая компонента отвечает параллелограммам, другая — антипараллелограммам. Докажем, что других случаев приводимости нет.

Пусть  $\hat{f}_{1j}$  приводим. Рассмотрим сначала случай, когда  $\hat{f}_{1j}$  имеет непостоянный множитель  $\hat{f}_0$  нулевой степени по  $t_j$ . Запишем  $\hat{f}_{1j} = c_2 t_j^2 + c_1 s_j t_j + c_0 s_j^2$ . Тогда  $\hat{f}_0$  делит все коэффициенты  $c_k(S, T)$ . Мы имеем  $c_0 = r_j^2 T(S - T)$  и  $c_2 = S(r^2 T - R^2 S)$ . Следовательно,  $R = r$  и  $\hat{f}_0 = S - T$ , т. е. при подстановке  $R = r$ ,  $S = T$  многочлен  $c_1$  должен тождественно по  $T$  обратиться в нуль. Произведя эту подстановку, получаем  $c_1 = (r_j^2 - a_j^2)T^2$ . Стало быть,  $R = r$  и  $r_j = a_j$ , что отвечает дельтоиду.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\hat{f}_{1j}$  не имеет непостоянных множителей нулевой степени по  $t_j$ . Тогда  $\hat{f}_{1j} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$ ,  $\deg_{t_j} \hat{f}_k = 1$ ,  $k = 1, 2$ . В этом случае дискриминант  $D_j$  должен быть полным квадратом. При этом  $d_j^+ - d_j^- = 4a_j r_j T$  (см. (6.1)), значит,  $d_j^+$  и  $d_j^-$  не совпадают, и тогда из леммы 6.1 следует, что  $d_j^\pm$  — тоже полные квадраты, т. е.  $\Delta_j^+ = \Delta_j^- = 0$ . Откуда, в силу (6.2) и (6.3),

$$A_j^+ - A_0^+ = A_j^- - A_0^- = 0 \quad \text{или} \quad A_j^+ - A_0^+ = A_j^- + A_0^- = 0. \quad (6.4)$$

Решая эти системы уравнений, получаем либо  $a_j = R$  и  $r_j = r$  (дельтоид), либо  $a_j = r$  и  $r_j = R$  (параллелограмм). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. *Предположим, что  $\hat{f}_{11}$  и  $\hat{f}_{12}$  неприводимы. Тогда:*

- (а) проекция  $M_1$  на любой из сомножителей  $P_1$ ,  $Q_1$  или  $Q_2$  конечна (т. е. прообраз любой точки конечен), а значит,  $M_1$  — алгебраическая кривая;
- (б) поверхности  $\{\hat{f}_{1j} = 0\} \subset P_1 \times Q$ ,  $j = 1, 2$ , пересекаются трансверсально всюду, кроме конечного числа точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а). Пусть  $\text{pr}_j : P_1 \times Q \rightarrow P_1 \times Q_j$ ,  $j = 1, 2$ , — стандартные проекции. Если  $\text{pr}_1^{-1}(p, q) = \{p\} \times \{q\} \times Q_2 \subset M_1$ , то  $\{p\} \times Q_2 \subset \text{pr}_2(M_1) = C_{12}$ , что противоречит неприводимости многочлена  $\hat{f}_{12}$ . Поэтому проекция  $M_1$  на  $P_1 \times Q_1$  конечна. Так же доказывается конечность проекций  $M_1$  на  $P_1 \times Q_2$  и на  $Q$ . Конечность проекций  $C_{1j}$  (а значит, и  $M_1$ ) на  $P_1$  и на  $Q_j$  сразу следует из неприводимости  $\hat{f}_{1j}$ .

(б). Рассмотрим на  $P_1 \times Q$  аффинную карту  $(T, t_1, t_2)$  (для остальных карт рассуждения аналогичны). В ней  $M_1$  задано уравнениями  $f_{11} = f_{12} = 0$ , и градиенты имеют вид  $\nabla f_{11} = (a, b, 0)$ ,  $\nabla f_{12} = (c, 0, d)$ . Если такие векторы пропорциональны, то  $b = 0$  или  $d = 0$ , т. е. одна из частных производных  $\partial f_{1j} / \partial t_j$  равна нулю. Это возможно лишь на конечном числе прямых вида  $T, t_j = \text{const}$ , причем, в силу (а), каждая такая прямая пересекает  $M_1$  в конечном числе точек. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.4. *Если  $\hat{f}_{11}$  и  $\hat{f}_{12}$  неприводимы, а  $\hat{F}_1$  — ненулевой приводимый многочлен, не являющийся степенью неприводимого многочлена, то 4-цикл  $p_0 q_1 p_1 q_2$  либо параллелограмматичен, либо является дельтоидом с осью  $p_0 p_1$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что  $C_{1j} = \{\hat{f}_{1j} = 0\} \subset P_1 \times Q_j$ . Обозначим через  $\tilde{\pi}_j : M_1 \rightarrow C_{1j}$  и  $\pi_j : C_{1j} \rightarrow P_1$  ограничения стандартных проекций  $P_1 \times Q \rightarrow P_1 \times Q_j \rightarrow P_1$  на соответствующие кривые. По условию, образ  $M_1$  при проекции  $P_1 \times Q \rightarrow Q$  — приводимая кривая  $C_1 = \{\hat{F}_1 = 0\}$ , следовательно, кривая  $M_1$  тоже приводима. Обозначим через  $M'_1$  и  $M''_1$  две различные неприводимые компоненты кривой  $M_1$ . По лемме 6.3, ни одна из них не может отображаться в точку при проекциях  $\tilde{\pi}_j$ . Поэтому, в силу двулистности этих проекций (напомним, что степень многочленов  $\hat{f}_{ij}$  по каждой переменной равна двум), они взаимно однозначны при ограничении на каждую из компонент кривой  $M_1$ . Следовательно, композиция

$$\eta = \pi_2 \circ \tilde{\pi}_2 \circ (\tilde{\pi}_1|_{M'_1})^{-1} : C_{11} \rightarrow M'_1 \rightarrow C_{12} \rightarrow P_1$$

имеет те же точки ветвления (критические значения), что и проекция  $\pi_2$ , а поскольку  $\eta = \pi_1$ , мы заключаем, что  $\pi_1$  и  $\pi_2$  имеют одни и те же точки ветвления.

Точки ветвления проекции  $\pi_j$  — это нули нечетной кратности многочлена  $D_j$  (см. (6.1)), значит,  $D_1 D_2$  — полный квадрат. Поскольку  $\pi_j$  — двулистная проекция неприводимой кривой  $C_{1j}$ , у каждой из  $\pi_1, \pi_2$  есть точки ветвления. Следовательно,  $D_1$  и  $D_2$  имеют общий корень. Тогда, по лемме 6.1, один из  $d_1^\pm$  совпадает с одним из  $d_2^\pm$ . Заметим, что  $d_1^+ - d_2^- = (A_2^- + A_1^+)(A_2^- - A_1^+)T$ , т. е.  $d_1^+ \not\equiv d_2^-$  в силу (6.3). Аналогично,  $d_1^- \not\equiv d_2^+$ . Поэтому имеет место один из следующих случаев.

*Случай 1.*  $d_1^+ \equiv d_2^+$  и  $d_1^- \equiv d_2^-$ . Поскольку  $d_1^\pm - d_2^\pm = (A_2^\pm + A_1^\pm)(A_2^\pm - A_1^\pm)T$ , из (6.3) следует, что

$$A_2^+ - A_1^+ = A_2^- - A_1^- = 0 \quad \text{или} \quad A_2^+ - A_1^+ = A_2^- + A_1^- = 0. \quad (6.5)$$

Решая эти системы уравнений, получаем либо  $a_1 = r_2$  и  $a_2 = r_1$  (параллелограмм), либо  $a_1 = a_2$  и  $r_1 = r_2$  (дельтоид с осью  $p_0 p_1$ ).

*Случай 2.*  $d_1^- \equiv d_2^-$ ,  $\Delta_1^+ = \Delta_2^+ = 0$ . В силу (6.2) и (6.3), второе условие дает  $A_1^+ - A_0^+ = A_2^+ - A_0^+ = 0$ , Исключая  $A_0^+$  и разлагая (как в случае 1)  $d_1^- - d_2^-$  на множители, мы опять получаем (6.5).

*Случай 3.*  $d_1^+ \equiv d_2^+$ ,  $\Delta_1^- = \Delta_2^- = 0$ . В силу (6.2) и (6.3), второе условие дает

$$(A_1^- - A_0^-)(A_1^- + A_0^-) = (A_2^- - A_0^-)(A_2^- + A_0^-) = 0, \quad (6.6)$$

что эквивалентно четырем системам линейных уравнений. Исключая из каждой из них  $A_0^-$  и добавляя уравнение  $A_2^+ - A_1^+ = 0$  (следующее из  $d_1^+ \equiv d_2^+$ ), мы каждый раз получаем одну из систем уравнений (6.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.5. Если  $\hat{f}_{11}$  и  $\hat{f}_{12}$  неприводимы и  $\hat{F}_1 = F^m$ ,  $m \geq 1$ , где  $F$  — нулевой или неприводимый многочлен, то  $\mathbf{p}$  — механизм Диксона 1-го рода<sup>6</sup>.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При  $F = 0$  это утверждение есть частный случай (при  $\lambda = 0$ ) леммы 4.1, поэтому пусть  $F \neq 0$ . Если  $m = 1$  (т. е.  $\hat{F}_1$  неприводим),

<sup>6</sup>Заметим, что для механизмов Диксона первого рода  $F_1 = (R_1^2 - r^2)F^2$  и  $F_2 = (R_2^2 - r^2)F^2$  с одним и тем же многочленом  $F$ .

то, поскольку  $\hat{F}_1$  и  $\hat{F}_2$  — биднородные многочлены одной и той же бистепени, имеющие общий множитель, они пропорциональны и результат опять следует из леммы 4.1.

Пусть  $m \geq 2$ . Докажем, что в этом случае проекция  $\pi : M_1 \rightarrow C_1$  двулистка. Предположим, что на  $C_1$  есть гладкая точка  $q$ , имеющая единственный прообраз. Пусть  $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (Q, q)$  — голоморфный росток, трансверсальный  $C_1$ . В силу леммы 6.3 можно считать, что поверхности  $\hat{f}_{1j} = 0$  гладки и трансверсальны друг другу над  $q$ . Тогда из формулы, выражающей результат двух многочленов через их корни (см., например, [4; Ch. 12, eq. (1.3)]), легко вывести, что  $F_1(\gamma(t))$  имеет при  $t = 0$  нуль первого порядка. Это противоречит условию  $m \geq 2$ , поэтому проекция  $\pi$  не может быть однолистной, а поскольку  $\deg_T \hat{f}_{ij} = 2$ , она двулистка.

Итак, почти все точки кривой  $C_1$  имеют два прообраза на  $M_1$ . Поэтому, так как  $\mathbf{p}$  изгибаема, можно считать, что  $\pi^{-1}(q_1, q_2) = \{(p_1, q_1, q_2), (p'_1, q_1, q_2)\}$ ,  $p'_1 \neq p_1$ . Само это множество и один его элемент инвариантны относительно инволюции (5.1), значит, и другой элемент инвариантен. Следовательно,  $(p'_1, p_2; q_1, q_2) \in \mathbb{RM}$ . Более того, это остается верным при изгибании  $\mathbf{p}$ . Следовательно,  $(4, 3)$ -конфигурация  $(p_0, p_1, p_2, p'_1; q_0, q_1, q_2)$  тоже изгибаема, причем в ней шарниры  $p_1$  и  $p'_1$  равноудалены от всех  $q_j$ . С помощью леммы 3.2 из этого несложно вывести, что  $\mathbf{p}$  есть механизм Диксона 1-го рода. Лемма доказана.

Напомним наше предположение о том, что в  $M$  есть изгибаемая  $(3, 3)$ -конфигурация без наложений  $\mathbf{p}$ . Цикл в  $\mathbf{p}$  назовем *закрепленным*, если он содержит ребро  $p_0q_0$ . Леммы 6.2, 6.4 и 6.5 можно подытожить следующим образом.

**ЛЕММА 6.6.** (Основная лемма.) *Если  $\mathbf{p}$  не механизм Диксона первого рода, то в  $(2, 3)$ -шарнирнике  $(p_0, p_1; q_0, q_1, q_2)$  содержится либо параллелограмматический 4-цикл, либо закрепленный дельтоид, либо незакрепленный дельтоид с осью  $p_0p_1$ .*

## § 7. Завершение доказательства теоремы 1

Пусть  $\mathbf{p}$  — изгибаемая  $(3, 3)$ -конфигурация без наложений, не являющаяся механизмом Диксона первого рода. Покажем, что  $\mathbf{p}$  — механизм Диксона второго рода.

**ЛЕММА 7.1.** *Любой дельтоид, содержащийся в  $\mathbf{p}$ , является ромбом.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $\mathbf{p}$  содержит дельтоид  $\Delta$ , не являющийся ромбом. Занумеруем шарниры так, что  $\Delta = p_0q_1p_1q_2$ , причем  $|p_0q_1| = |p_1q_1| \neq |p_0q_2| = |p_1q_2|$  (см. рис. 4, слева). По лемме 6.6 в  $(2, 3)$ -конфигурации  $(p_0, p_1; q_0, q_1, q_2)$  должен содержаться четырехзвенник  $\Delta'$ , реализующий один из нижеперечисленных случаев. В каждом из них, кроме последнего, мы покажем, что  $p_0$  и  $p_1$  равноудалены от  $q_0$ , что противоречит лемме 3.2.

*Случай 1. Параллелограмматический четырехзвенник.* Тогда  $\Delta'$  содержит оба шарнира  $p_0, p_1$ , а также по крайней мере один из шарниров  $q_i$ ,  $i = 1$  или 2. Поскольку  $|p_0q_i| = |p_1q_i|$ , мы заключаем, что  $\Delta'$  — ромб. При этом  $\Delta' \neq \Delta$  (так как  $\Delta$  не ромб), значит,  $q_0 \in \Delta'$ . Поэтому  $p_0$  и  $p_1$  равноудалены от  $q_0$ .

*Случай 2. Закрепленный дельтоид с осью  $p_0p_1$ .* Можно считать, что  $\Delta' = p_0q_0p_1q_1$ ,  $|p_0q_0| = |p_0q_1|$  и  $|p_1q_1| = |p_1q_0|$ . Тогда  $|p_0q_0| = |p_0q_1| = |p_1q_1| = |p_1q_0|$ .

*Случай 3. Закрепленный дельтоид с осью  $q_0q_j$ .* Тогда  $|p_0q_0| = |p_1q_0|$ .

*Случай 4. Незакрепленный дельтоид с осью  $p_0p_1$ .* Тогда  $\Delta' = \Delta$ , и это дельтоид с двумя осями, т. е. ромб. Противоречие. Лемма доказана.

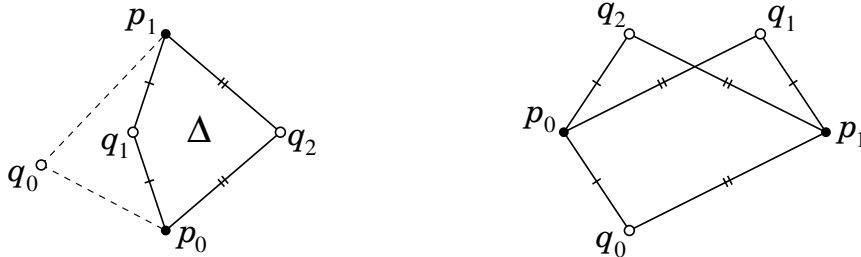


Рис. 4. Иллюстрация к доказательствам лемм 7.1 (слева) и 7.2 (справа).

**ЛЕММА 7.2.**  *$\mathbf{p}$  не содержит двух различных параллелограмматических четырехзвенников с тремя общими вершинами.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $\mathbf{p}$  содержит два различных параллелограмматических четырехзвенника  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с тремя общими вершинами. Без ограничения общности можно считать, что это  $q_0p_0q_1p_1$  и  $p_0q_1p_1q_2$  (см. рис. 4, справа). Тогда  $q_0p_0q_2p_1$  — дельтоид. По лемме 7.1 он должен быть ромбом, а значит,  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — тоже ромбы. Легко видеть, что это невозможно. Лемма доказана.

Из лемм 6.6 и 7.1 следует, что при удалении любого шарнира получающаяся (2, 3)-конфигурация содержит параллелограмматический четырехзвенник. С помощью леммы 7.2 из этого несложно вывести, что шарниры в  $\mathbf{p}$  можно перенумеровать так, что четырехзвенники  $\Pi_{ij} = p_iq_i p_jq_j$ ,  $i < j$ , будут параллелограмматическими, т. е. длины рычагов можно обозначить через  $a, b, c, d$ , как в предложении 1(b), и нам остается только доказать, что с точностью до перенумерации шарниров выполнено соотношение  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ . В обозначениях из §2 мы имеем

$$r = r_{11} = r_{22} = a, \quad R_1 = r_1 = b, \quad R_2 = r_2 = c, \quad r_{12} = r_{21} = d.$$

Сделав эти подстановки, мы выразим коэффициенты многочленов  $F_1$  и  $F_2$  в виде многочленов от  $a, b, c, d$ . По лемме 2.1 результат этих многочленов по  $t_1$  должен тождественно обращаться в нуль, в частности, должен обращаться в нуль результат многочленов  $F_1(t_1, -c/a)$  и  $F_2(t_1, -c/a)$ . Вычисление показывает, что он равен

$$16b^8c^{16}(a+c)^8(a^2+b^2-c^2-d^2)^4(a^2+d^2-b^2-c^2)^4(a^2+c^2-b^2-d^2)^4, \quad (7.1)$$

что завершает доказательство теоремы 1.

## § 8. Изгибаемость двудольных графов в плоскости Лобачевского

Пусть  $H^2$  — стандартная гиперболическая плоскость, т. е. полное односвязное двумерное риманово многообразие постоянной кривизны, равной  $-1$ . Обозначим расстояние в  $H^2$  через  $d_H(\cdot, \cdot)$ . Условие изгибаемости (D1) распространяется без изменений на гиперболический случай. Условие (D2) допускает следующую равносильную переформулировку, также распространяющуюся на гиперболический случай:

(D2) Имеются две ортогональные прямые и два четырехугольника, симметричные относительно каждой из них и с не принадлежащими им вершинами, такие, что  $p_1, \dots, p_m$  лежат в вершинах одного четырехугольника и  $q_1, \dots, q_n$  лежат в вершинах другого.

**ТЕОРЕМА 2.** *Теорема 1 верна для  $H^2$ .*

Доказательство теоремы 2 почти такое же, как и для теоремы 1. В этом разделе мы просто объясним, какие элементы доказательства (в основном, формулы) следует изменить.

**8.1. Координаты Лобачевского в  $H^2$ . Гиперболическая версия §1 и §3.** Очевидно, что леммы 1.1 и 3.1 справедливы в  $H^2$ . Для других утверждений из §1 и §3, удобно использовать следующий гиперболический аналог декартовой системы координат, называемый *системой координат Лобачевского*. Фиксируем ориентированную прямую  $\ell$  и точку  $O \in \ell$ . Тогда координаты  $(x, y)$  точки  $p$  задаются как  $x = \pm d_H(O, q)$  и  $y = \pm d_H(p, q)$ , где  $q$  — точка на  $\ell$  такая, что  $pq \perp \ell$ , а знаки выбираются в соответствии с квадрантом, содержащим  $p$ . В этих координатах имеем

$$\cosh d_H((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \cosh y_1 \cosh y_2 \cosh(x_2 - x_1) - \sinh y_1 \sinh y_2. \quad (8.1)$$

Следующее утверждение является гиперболическим аналогом леммы 1.2.

**ЛЕММА 8.1.** *Диагонали четырехугольника (возможно, самопересекающиеся) ортогональны тогда и только тогда, когда  $\cosh a \cosh c = \cosh b \cosh d$ , где  $a, b, c, d$  — длины его последовательных сторон.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим четырехугольник  $p_1p_2p_3p_4$  с  $d_H(p_1, p_2) = a$ ,  $d_H(p_2, p_3) = b$ ,  $d_H(p_3, p_4) = c$ ,  $d_H(p_4, p_1) = d$ . Введем координаты Лобачевского с прямой  $p_1p_3$  в качестве оси  $x$ . Пусть  $(x_k, y_k)$  — координаты точки  $p_k$ . (тогда  $y_1 = y_3 = 0$ ). Согласно (8.1) имеем

$$\cosh d_H(p_i, p_j) = \cosh(x_i - x_j) \cosh y_j, \quad i = 1, 3, \quad j = 2, 4,$$

откуда вытекает тождество, влекущее требуемый результат:

$$\cosh a \cosh c - \cosh b \cosh d = \sinh(x_1 - x_3) \sinh(x_4 - x_2) \cosh y_2 \cosh y_4.$$

Лемма доказана.

Ради согласованности с евклидовым случаем мы по-прежнему говорим, что 4-цикл является *параллелограмматическим*, если противоположные стороны

имеют одинаковую длину (хотя параллелизм уже не играет никакой роли). Мы называем его *антипараллелограммом* (соответственно, *параллелограммом*), либо если он *вырожден*, т. е. все его вершины коллинеарны, либо, если он невырожден и его стороны пересекаются (соответственно, не пересекаются).

Следующее утверждение — гиперболический аналог предложения 1 со схожим доказательством.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть  $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{m-1}; q_0, \dots, q_{n-1})$  —  $(m, n)$ -конфигурация без наложений в  $H^2$ . Обозначим  $u_{ij} = \cosh d_H(p_i, q_j)$ .

(а).  $\mathbf{p}$  удовлетворяет (D1) тогда и только тогда, когда  $u_{ij}u_{kl} = u_{il}u_{jk}$  для каждого цикла  $p_i q_j p_k q_l$ . Как и в предложении 1, эти условия для циклов с фиксированными  $i$  и  $j$  порождают все остальные.

(б). Если  $\mathbf{p}$  изгибаема и  $m = n = 3$ , то  $\mathbf{p}$  удовлетворяет (D2) тогда и только тогда, когда с точностью до перенумерации  $u_{00} = u_{11} = u_{22}$ ,  $u_{01} = u_{10}$ ,  $u_{12} = u_{21}$ ,  $u_{20} = u_{02}$  и  $u_{00} + u_{02} = u_{01} + u_{12}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (а). Следует из леммы 8.1.

(б). Условие на длины выводится из (D2) прямым вычислением в координатах Лобачевского. Докажем обратную импликацию. Пусть  $\mathbf{p}$  изгибаема и удовлетворяет условию на длины. Рассмотрим гладкую деформацию  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  с постоянными  $u_{ij}$ . Четырехзвенники  $\Pi_{ij} = p_i q_i p_j q_j$  параллелограмматичны. Предположим, что  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_{12}$  — параллелограммы. Выберем координаты Лобачевского так, чтобы осью  $x$  была прямая, проходящая через центры симметрии  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_{12}$  (можно считать, что это условие выполняется для каждого  $t$ ). Тогда произведение этих центральных симметрий есть сдвиг  $(x, y) \mapsto (x + a, y)$  такой, что  $p_0 \mapsto p_2$ ,  $q_0 \mapsto q_2$ . Тогда, поскольку  $u_{02} = u_{20}$ , из (8.1) следует, что  $p_0$  и  $q_0$  (а также  $p_2$  и  $q_2$ ) имеют равные  $x$ -координаты. Следовательно, имеем  $p_k = (x_k, (-1)^k y_p)$  и  $q_k = (x_k, (-1)^k y_q)$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Сдвигом по  $x$ -координате можно добиться выполнения равенства  $x_1(t) = 0$  для каждого  $t$ . Тогда по (8.1) имеем

$$\begin{aligned} u_{00} &= \cosh(y_p - y_q), \\ u_{02} - u_{00} &= \cosh y_p \cosh y_q (\cosh(x_2 - x_0) - 1), \\ u_{01} + u_{00} &= \cosh y_p \cosh y_q (\cosh x_0 + 1), \\ u_{12} + u_{00} &= \cosh y_p \cosh y_q (\cosh x_2 + 1). \end{aligned}$$

Дифференцируя эти тождества по  $t$ , получаем четыре линейных однородных уравнения относительно  $x'_0, x'_2, y'_p, y'_q$  (ср. с доказательством леммы 3.2). Определитель этой системы равен

$$\begin{aligned} (1 + \cosh x_0)(1 + \cosh x_2) &(\cosh y_p \cosh y_q)^2 \\ &\times (1 - \cosh(x_2 - x_0)) \sinh(y_p + y_q) \sinh(y_p - y_q). \end{aligned}$$

Он обращается в нуль только при  $y_p + y_q = 0$  (поскольку  $\mathbf{p}$  — конфигурация без наложений), и это влечет симметричность  $\mathbf{p}$  относительно оси  $x$ . Однако, это условие не может быть выполнено при непостоянной деформации.

Полученное противоречие показывает, что  $\Pi_{01}$  или  $\Pi_{12}$  является антипараллелограммом. Пусть это будет  $\Pi_{01}$  (случай  $\Pi_{12}$  аналогичен). Тогда мы



можем выбрать координаты Лобачевского так, что  $p_0 = (x_p, y_p)$ ,  $q_0 = (x_q, y_q)$ ,  $p_1 = (x_p, -y_p)$ ,  $q_1 = (x_q, -y_q)$ . Сдвигом вдоль оси  $x$  можно добиться равенства  $p_2 = (-x_p, -y_p)$  для некоторого  $y \in \mathbb{R}$ . Тогда по (8.1) получим

$$u_{00} + u_{02} - u_{01} - u_{12} = 2(\sinh y - \sinh y_p) \sinh y_q,$$

т.е.  $p_2 = (-x_p, -y_p)$ . Тогда  $q_2 = (-x_q, -y_q)$ , поскольку  $q_2$  однозначно определяется расстояниями до трех неколлинеарных точек  $p_0, p_1, p_2$ . Лемма доказана.

Используя координаты Лобачевского, доказательство леммы 3.2 можно повторить дословно, но тождества (3.1) следует заменить на

$$\frac{\cosh x_j}{\cosh x_0} = \frac{\cosh r_j}{\cosh r_0}, \quad \frac{\cosh(x_j - a)}{\cosh(x_0 - a)} = \frac{\cosh R_j}{\cosh R_0}, \quad j = 1, 2,$$

после чего определитель линейной системы для  $x'_0, x'_1, x'_2, a'$  окажется равным

$$\frac{\sinh a \sinh(x_0 - x_1) \sinh(x_0 - x_2) \sinh(x_1 - x_2)}{\cosh x_0 \cosh x_1 \cosh x_2 \cosh(x_0 - a) \cosh(x_1 - a) \cosh(x_2 - a)}.$$

## 8.2. Модель Пуанкаре для $H^2$ . Гиперболическая версия §2 и §§4–7.

В этом подразделе мы используем модель Пуанкаре  $H^2$  в единичном круге  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ , где геодезическими являются окружности, ортогональные  $\partial\mathbb{D}$ , а расстояние задано как

$$\cosh d_H(p, q) = 1 + \frac{2(p - q)(\bar{p} - \bar{q})}{(1 - p\bar{p})(1 - q\bar{q})}, \quad (8.2)$$

в частности,  $d_H$ -окружность радиуса  $r$  с центром в точке 0 является  $\mathbb{C}$ -окружностью  $\{|z| = l\}$ , где  $u = \cosh r$ ,  $l = \rho_H(u)$  и функция  $\rho_H : [1, +\infty) \mapsto [0, 1)$  определяется как  $\rho_H(u) = \sqrt{(u - 1)/(u + 1)}$ .

Мы по-прежнему обозначаем длины рычагов  $r_{ij} = d_H(p_i, q_j)$ ,  $R_i = r_{i0}$ ,  $r_j = r_{0j}$ ,  $r = r_{00}$ . Мы также полагаем

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \cosh r_{ij}, & U_i &= \cosh R_i, & u_j &= \cosh r_j, & u &= \cosh r, \\ l_{ij} &= \rho_H(u_{ij}), & L_i &= \rho_H(U_i), & l_j &= \rho_H(u_j), & l &= \rho_H(u). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Пусть  $q_0 = 0$  и  $p_0 = l$  (тогда  $d_H(p_0, q_0) = r$ ). Для кругов

$$P_k = \{p_k \in \mathbb{D} \mid d_H(q_0, p_k) = R_k\}, \quad Q_k = \{q_k \in \mathbb{D} \mid d_H(p_0, q_k) = r_k\}, \quad k = 1, 2,$$

фиксируем параметризации  $p_i(T_i) = lT_i$  и  $q_j(t_j) = (l + lt_j)/(l^2t_j + 1)$ , где параметры  $T_i$  и  $t_j$  пробегают окружности  $|T_i| = L_i/l$  и  $|t_j| = l_j/l$  соответственно. Чтобы проверить, что  $t_j \mapsto q_j(t_j)$  параметризует  $Q_j$ , заметим, что  $Q_j$  — это образ окружности

$$Q_j^* = \{q_j^* \in \mathbb{D} \mid d_H(q_0, q_j^*) = r_j\} = \{|z| = l_j\}$$

при отображении  $z \mapsto (l+z)/(lz+1)$ , которое является конформным изоморфизмом  $\mathbb{D}$ , переводящим 0 в  $l$  (т. е. переводящим  $q_0$  в  $p_0$ ). Зададим алгебраические множества  $M$ ,  $M_i$ ,  $C_i$  и  $C_{ij}$  так же, как и в евклидовом случае. Тогда кривая  $C_{ij}$  имеет определяющее уравнение  $f_{ij}(T_i, t_j) = 0$ , где  $f_{ij}$  — числитель рациональной функции от  $T_i, t_j$ , полученной из  $d_H(p_i(T_i), q_j(t_j)) - u_{ij}$  применением

(8.2) с заменами  $\bar{T}_i = L_i^2/(l^2 T_i)$  и  $\bar{t}_j = l_j^2/(l^2 t_j)$ . Таким образом, мы можем определить  $f_{ij}$  записав

$$\frac{f_{ij}(T_i, t_j)}{4(u+1)T_i t_j} = 1 + \frac{2\left(lT_i - q_j(t_j)\right) \left(\frac{L_i^2}{lT_i} - q_j\left(\frac{l_j^2}{l^2 t_j}\right)\right)}{(1 - L_i^2) \left(1 - q_j(t_j)q_j\left(\frac{l_j^2}{l^2 t_j}\right)\right)} - u_{ij}$$

( $f_{ij}$  инвариантна относительно  $T_i \leftrightarrow -t_j$ ,  $L_i \leftrightarrow l_j$ , хотя в приведенной формуле это сразу не видно). Функция  $f_{ij}$  есть многочлен от  $T_i, t_j$  степени 2 по каждой переменной; его коэффициенты являются рациональными функциями от  $l^2, L_i^2, l_j^2, u, u_{ij}$ . Подстановкой  $l = \rho_H(u)$ ,  $L_i = \rho_H(U_i)$ ,  $l_j = \rho_H(u_j)$  получаем представление  $f_{ij}$  в виде суммы 72 мономов от  $T_i, t_j, u, U_i, u_j, u_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Положим

$$F_i(t_1, t_2) = \frac{\text{Res}_{T_i}(f_{i1}, f_{i2})}{16(1+u)^4(1-U_i^2)}.$$

Это сумма 445 мономов от  $t_1, t_2$  и всех  $u_{ij}$ . Как и в §2, мы имеем  $\deg_{t_j} F_i = 4$  для каждой пары  $i, j$ .

Ниже мы используем обозначение  $A \doteq B$ , чтобы указать, что  $A = n\mu B$ , где  $n \in \mathbb{Q}$ , а  $\mu$  является произведением множителей вида  $(u_{ij} \pm 1)^{\pm 1}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1 В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ. Пусть  $c_{kl}$  — коэффициент при  $t_1^k t_2^l$  в  $F_1 - \lambda F_2$ . Имеем

$$c_{04} \doteq U_1^2 - u^2 - \lambda U_2^2 + \lambda u^2,$$

$$c_{20} \doteq u_1^2(\lambda - 1) - \lambda u_{21}^2 + u_{11}^2, \quad c_{02} \doteq u_2^2(\lambda - 1) - \lambda u_{22}^2 + u_{12}^2,$$

таким образом если  $\lambda(1-\lambda) = 0$ , то применимы рассуждения из доказательства леммы 4.1. Предположим, что  $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ . Пусть  $\Lambda = \mathbb{Q}[\lambda, u_{ij}]_{i,j=0,1,2}$  — кольцо многочленов от  $\lambda$  и всех  $u_{ij}$ . Коэффициенты  $c_{kl}$  представимы элементами кольца  $\Lambda$ . Пусть  $e_{kl}$  получено из  $c_{kl}$  факторизацией в кольце  $\Lambda$  с последующим отбрасыванием всех множителей вида  $u_{ij} \pm 1$ . Покажем, что любое вещественное решение системы уравнений  $c_{kl} = 0$ ,  $k, l = 0, \dots, 4$ , для которого  $u_{ij} > 1$  и  $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ , является решением системы уравнений  $b_{ij} = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , где  $b_{ij} = u_{00}u_{ij} - u_{i0}u_{0j}$ . Для этого достаточно показать, что идеал

$$(e_{02}, e_{20}, e_{03}, e_{30}, e_{04}, 1 + w_0\lambda(1-\lambda), 1 + w_1b_{11} + w_2b_{12} + w_3b_{21} + w_4b_{22})$$

в  $\Lambda[w_0, \dots, w_4]$  содержит 1. Это проверяется вычислением базиса Грёбнера (что в данном случае делается на компьютере очень быстро). Лемма доказана.

В доказательстве аналога леммы 6.2 для случая, когда  $\hat{f}_{1j}$  имеет непостоянный делитель  $\hat{f}_0$  нулевой степени по  $t_j$ , мы имеем  $\text{Res}_T(c_0, c_2) \doteq (U_1^2 - u^2)S^4$ . Отсюда  $U_1 = u$ , что дает

$$c_0 \doteq (S - T)((1 - u)S + (1 + u)T), \quad c_2 \doteq (S - T)((1 + u)S + (1 - u)T). \quad (8.4)$$

Таким образом,  $\hat{f}_0 = S - T$ , и после замены  $S = T$ ,  $U_1 = u$  получаем  $c_1 \doteq (u_1 - u_{1j})T^2$ .

Остальная часть §6 повторяется слово в слово, используя следующие равенства, где мы полагаем (как и в §6)  $A_j^\pm = r_{1j} \pm r_{0j}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , и используем обозначение  $\mathfrak{s}(x)$  для  $\sinh(x/2)$ :

$$d_j^\pm \doteq (u-1)(U_1+1)T^2 + 2(u_j u_{1j} - uU_1 \pm \mathfrak{s}(2r_j)\mathfrak{s}(2r_{1j}))T + (u+1)(U_1-1), \quad (8.5)$$

$$\Delta_j^\pm \doteq \mathfrak{s}(A_j^\pm + A_0^+) \mathfrak{s}(A_j^\pm - A_0^+) \mathfrak{s}(A_j^\pm + A_0^-) \mathfrak{s}(A_j^\pm - A_0^-), \quad (8.6)$$

$$d_2^{\pm 2} - d_1^{\pm 1} \doteq \mathfrak{s}(A_2^{\pm 2} + A_1^{\pm 1}) \mathfrak{s}(A_2^{\pm 2} - A_1^{\pm 1}) T \quad (8.7)$$

(здесь  $\pm_1$  и  $\pm_2$  — независимые знаки).

Гиперболическая версия вычислений в конце §7 выглядит так: если

$$u_{11} = u_{22} = u, \quad U_1 = u_1, \quad U_2 = u_2, \quad u_{12} = u_{21},$$

то результат  $lF_1(t_1, \pm l_2/l)$  и  $lF_2(t_1, \pm l_2/l)$  по переменной  $t_1$  равен

$$(l \pm l_2)^8 (ll_2 \pm \varepsilon)^8 (u+1)^{16} (u_1^2 - 1)^4 (u_2 - 1)^8 (u + u_1 + u_2 + u_{12})^4 \\ \times (u + u_1 - u_2 - u_{12})^4 (u + u_2 - u_1 - u_{12})^4 (u + u_{12} - u_1 - u_2)^4 \quad (8.8)$$

при  $\varepsilon = 1$  (в этом разделе нужен только случай, когда “ $\pm$ ” есть “+”, однако оба знака понадобятся в конце §9.4).

## § 9. Изгибаемость двудольных графов на сфере

*Сферические  $(m, n)$ -конфигурации* и их изгибаемость определяются, как в плоском случае, но точки  $p_i$  и  $q_j$  берутся на единичной сфере  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  причем так, что  $p_i \neq \pm q_j$  для любых  $i, j$ . Сферическую  $(m, n)$ -конфигурацию назовем *конфигурацией без  $\mathbb{P}^2$ -наложений*, если  $p_i \neq \pm p_j$  и  $q_i \neq \pm q_j$  при  $i \neq j$ . Условия изгибаемости (D1) и (D2) повторяются почти дословно в сферическом случае (ср. [11; §6]). Их можно сформулировать следующим образом.

(SD1)  $p_1, \dots, p_n$  лежат в одной плоскости,  $q_1, \dots, q_m$  лежат в другой плоскости, причем эти плоскости ортогональны друг другу и проходят через центр сферы.

(SD2) Через начало координат проходят две взаимно ортогональные плоскости, и имеется два прямоугольника, симметричных относительно этих плоскостей, с вершинами, им не принадлежащими, таких, что  $p_1, \dots, p_m$  лежат в вершинах одного прямоугольника, а  $q_1, \dots, q_n$  — в вершинах другого.

Для  $m = n = 3$ , следующий сферический аналог теоремы 1 доказан в недавней статье [3].

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $\min(m, n) \geq 3$ . Пусть  $\mathbf{p}$  — сферическая  $(m, n)$ -конфигурация без  $\mathbb{P}^2$ -наложений. Тогда  $\mathbf{p}$  изгибаема, если и только если она удовлетворяет либо условию (SD1), либо одному из следующих условий:

(PD2)  $\mathbf{p}$  удовлетворяет (SD2) после применения антиподальной инволюции к некоторым точкам;

(CDA)  $\langle p_1, q_1 \rangle = \langle q_1, p_2 \rangle = \langle p_2, q_2 \rangle = -\langle q_2, p_1 \rangle$  и  $\langle p_0, q_k \rangle = \langle q_0, p_k \rangle = 0$ ,  $k = 1, 2$ , где  $m = n = 3$ ,  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ .

Экзотическое изгибание  $\mathbf{p}$  в случае (CDA) называется в [3] движением с постоянным диагональным углом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. (в предположении, что она верна при  $m = n = 3$ ). Доказательство повторяет сведение теоремы 1 к ее случаю  $m = n = 3$  (см. §1) с учетом того, что следует использовать леммы 9.1 и 9.2.

Следуя [3], будем называть лежащие на геодезической окружности точки сферы коциркулярными.

ЛЕММА 9.1. Если  $(3, 3)$ -конфигурация без  $\mathbb{P}^2$ -наложений удовлетворяет одному из условий (PD2) или (CDA), то точки любой ее доли не являются коциркулярными.

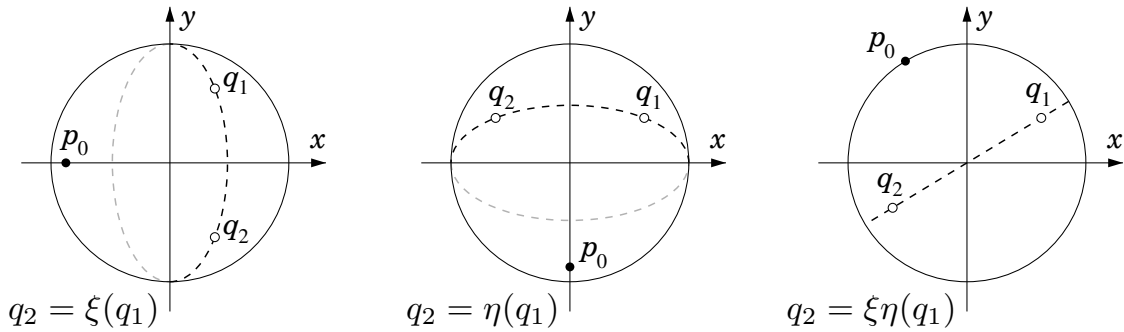
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай (PD2) очевиден. Предположим, что  $\mathbf{p}$  удовлетворяет (CDA), но  $p_0, p_1, p_2$  коциркулярны. В этом случае можно выбрать координаты так, что  $p_0 = (1, 0, 0)$ ,  $p_1 = (x_1, y_1, 0)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2, 0)$ . Из условия  $\langle p_0, q_1 \rangle = \langle p_0, q_2 \rangle = 0$  следует  $q_1 = (0, y_3, z_3)$ ,  $q_2 = (0, y_4, z_4)$ , тогда как из  $\langle q_0, p_1 \rangle = \langle q_0, p_2 \rangle = 0$  следует  $q_0 = (0, 0, \pm 1)$ , и значит, можно считать, что  $q_0 = (0, 0, 1)$ . Условия на  $\langle p_i, q_j \rangle$ ,  $j = 1, 2$ , дают  $y_1 y_3 = y_2 y_3 = y_2 y_4 = -y_1 y_4$ , следовательно,  $(y_1 - y_2) y_3 = (y_1 + y_2) y_4 = 0$ , т. е. либо  $y_3 y_4 = 0$ , либо  $y_1 = y_2 = 0$ . Если  $y_3 y_4 = 0$ , то  $q_0 = \pm q_1$  или  $q_0 = \pm q_2$ . Если  $y_1 = y_2 = 0$ , то  $p_0 = \pm p_1$ . Оба случая невозможны для  $(3, 3)$ -конфигурации без  $\mathbb{P}^2$ -наложений. Лемма доказана.

ЛЕММА 9.2. Если  $(3, 3)$ -конфигурация без  $\mathbb{P}^2$ -наложений  $\mathbf{p}$  удовлетворяет условию (CDA) и  $(3, 3)$ -конфигурация без  $\mathbb{P}^2$ -наложений  $\mathbf{p}'$  получается из  $\mathbf{p}$  заменой некоторого  $q_i$  на  $q'_i \neq \pm q_i$ , то  $\mathbf{p}'$  не удовлетворяет ни одному из условий (SD1), (PD2), (CDA).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.  $\mathbf{p}'$  не удовлетворяет (SD1) по лемме 9.1. Она не удовлетворяет и (CDA), поскольку любые пять точек конфигурации, удовлетворяющие (CDA), однозначно определяют шестую с точностью до антиподальной инволюции. Покажем, что  $\mathbf{p}'$  не удовлетворяет (PD2). Предположим противное. Условие (CDA) инвариантно относительно применения антиподальной инволюции к любой точке. Следовательно, мы можем считать, что  $\mathbf{p}'$  удовлетворяет (SD2), в то время как  $\mathbf{p}$  по-прежнему удовлетворяет (CDA). Тогда можно выбрать координаты так, чтобы каждая доля  $\mathbf{p}'$  находилась в вершинах прямоугольника, инвариантного относительно отражений  $\xi : (x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$  и  $\eta : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ .

Если  $q_i = q_0$ , то  $q_2$  — образ  $q_1$  при  $\xi$ ,  $\eta$  или  $\xi\eta$ . Тогда из условия  $\langle p_0 q_1 \rangle = \langle p_0 q_2 \rangle = 0$  следует, что  $p_0$  принадлежит  $\{y = 0\}$ ,  $\{x = 0\}$  или  $\{z = 0\}$  соответственно (см. рисунок 5). Это противоречит тому, что  $\mathbf{p}$  является конфигурацией без  $\mathbb{P}^2$ -наложений.

Если  $q_i \neq q_0$ , аргументы те же, но с  $q_0, p_1, p_2$  вместо  $p_0, q_1, q_2$ .


 Рис. 5. Проекция на  $xy$ -плоскость в доказательстве леммы 9.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Такие же, как в замечании 3, примеры могут быть построены и в сферическом случае.

Ниже мы приводим доказательство теоремы 3, которое является видоизменением доказательства теоремы 2. Все вычисления точно такие же, только  $\cosh x$  и  $\sinh x$  заменены на  $\cos x$  и  $\sqrt{-1} \sin x$ . Однако из-за антиподальной инволюции, которая может быть применена к любой точке, приходится разбирать больше случаев.

**9.1. Географические координаты. Сферическая версия §8.1.** Зададим расстояние  $d_S$  на  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  как длину кратчайшей геодезической:  $d_S(p, q) = \arccos \langle p, q \rangle$ . Система координат Лобачевского в  $H^2$  является гиперболическим аналогом системы обычных географических координат на единичной сфере:  $x$  (долгота) и  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$  (широта). Так,  $(x, y)$  — географические координаты точки  $(\cos x \cos y, \sin x \cos y, \sin y)$ . В этих координатах

$$\cos d_S((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \cos y_1 \cos y_2 \cos(x_2 - x_1) + \sin y_1 \sin y_2. \quad (9.1)$$

Почти всё в §8.1 остается справедливым, если заменить  $d_H$ ,  $\cosh$ ,  $\sinh$ , “координаты Лобачевского”, “коллинеарные”, “без наложений” на, соответственно,  $d_S$ ,  $\cos$ ,  $\sqrt{-1} \sin$ , “географические координаты”, “коциркулярные”, “без  $\mathbb{P}^2$ -наложений” (ср., например, (8.1) с (9.1)). Единственное отличие заключается в следующем.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В предложении 2(a) для  $S^2$  в общем случае неверно, что условия  $u_{ik}u_{jl} = u_{il}u_{jk}$  с фиксированными  $i$  и  $j$  порождают все остальные условия (например, когда  $p_i$  находится в северном полюсе, а все остальные точки на экваторе). Однако это верно, когда  $u_{ij} \neq 0$ .

**9.2. Стереографическая проекция на  $S$ . Сферическая версия §8.2.** Тогда как система координат Лобачевского является аналогом географических координат, модель Пуанкаре является аналогом стереографической проекции  $S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (что не удивительно, так как модель Пуанкаре есть стереографическая проекция гиперboloида в  $\mathbb{R}^3$ , наделенного  $(2, 1)$ -метрикой Минковского).

Стереографическая проекция отождествляет точку  $(x, y, z) \in S^2$  с числом  $(x + y\sqrt{-1})/(1 - z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . При этом отождествлении мы имеем (ср. с (8.2))

$$\cos d_S(p, q) = 1 - \frac{2(p - q)(\bar{p} - \bar{q})}{(1 + p\bar{p})(1 + q\bar{q})}, \quad (9.2)$$

в частности,  $d_S$ -окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $0$  отождествляется с  $\mathbb{C}$ -окружностью  $\{|z| = l\}$ , где  $u = \cos r$ ,  $l = \rho_S(u)$ , а функция  $\rho_S : [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty]$  определяется как  $\rho_S(u) = \sqrt{(1-u)/(1+u)}$ .

Как и в §8.2, положим  $r_{ij} = d_S(p_i, q_j)$ ,  $R_i = r_{i0}$ ,  $r_j = r_{0j}$ ,  $r = r_{00}$  и обозначим (ср. с (8.3))

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \cos r_{ij}, & U_i &= \cos R_i, & u_j &= \cos r_j, & u &= \cos r, \\ l_{ij} &= \rho_S(u_{ij}), & L_i &= \rho_S(U_i), & l_j &= \rho_S(u_j), & l &= \rho_S(u). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Определим окружности  $P_i, Q_j$ , их параметризации и многочлены  $f_{ij}$  и  $F_i$  теми же формулами, что и в §8.2, но с  $d_S$  вместо  $d_H$ , и с  $q_j(t_j) = (l + lt_j)/(1 - l_j^2)$ . Оказывается, выражения  $f_{ij}$  и  $F_i$  через  $u_{ij}$  точно такие же как в §8.2. В частности, равенства (8.4)–(8.7) с  $\mathfrak{s}(x) = \sqrt{-1} \sin(x/2)$  и (8.8) с  $\varepsilon = -1$  выполняются для сферических конфигураций.

**ЛЕММА 9.3.** (Ср. с леммой 4.1.) *Если  $u \neq 0$ ,  $\mathbf{p}$  является конфигурацией без  $\mathbb{P}^2$ -наложений и  $F_1 = \lambda F_2$ , то  $\mathbf{p}$  удовлетворяет условию (SD1).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство гиперболического случая  $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$  леммы 4.1 (см. §8.2) проходит без каких-либо изменений в сферическом случае в силу предположения  $u \neq 0$  (см. замечание 6).

Доказательство леммы 4.1 в случае  $\lambda(1 - \lambda) = 0$  не распространяется непосредственно на сферу, потому что  $u_{ij}$  может быть отрицательным. Однако можно применить рассуждения, как в случае  $\lambda(1 - \lambda) \neq 0$ . А именно, вычисление базисов Грёбнера показывает, что идеалы

$$\left( e_{02}, e_{20}, e_{03}, e_{30}, e_{04}, \lambda, 1 + \sum_j (u_{0j} - u_{1j})v_j, 1 + \sum_j (u_{0j} + u_{1j})w_j, 1 + u_{00}z \right),$$

$$\left( e_{11}, e_{02}, e_{20}, e_{03}, e_{30}, e_{04}, 1 - \lambda, 1 + \sum_j (u_{1j} - u_{2j})v_j, 1 + \sum_j (u_{1j} + u_{2j})w_j, 1 + u_{00}z \right)$$

кольца  $\Lambda[v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2, z]$  содержат 1. Это означает (ср. с доказательством леммы 4.1), что из условия  $\lambda = k$  (где  $k = 0, 1$ ) в сочетании с  $u \neq 0$  следует, что  $p_1$  и либо  $p_{2k}$ , либо его антипод равноудалены от каждого  $q_j$ . Следовательно,  $\mathbf{p}$  удовлетворяет условию (SD1) по лемме 3.2.

**9.3. Условия приводимости для  $\hat{F}_i$ .** Введем обозначения из §6 (приспособленные для сферического случая). Предположим, что  $M$  содержит изгибаемую без  $\mathbb{P}^2$ -наложений (3, 3)-конфигурацию  $\mathbf{p}$ . Напомним, что  $A_j^\pm = r_{1j} \pm r_{0j}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , и  $\mathfrak{s}(x) = \sqrt{-1} \sin(x)$ . Как и в §6, мы упрощаем обозначения, полагая  $T = T_1$ ,  $S = S_1$ ,  $R = R_1$ ,  $a_j = r_{1j}$ . Без ограничения общности можно считать, что

$$2r_{ij} \leq \pi \quad \text{при } i = 0 \text{ или } j = 0 \quad (9.4)$$

(выполнения этого условия всегда можно добиться заменой некоторых точек их антиподами). Из леммы 3.1 в сочетании с (9.4) следует, что при  $j, k = 0, 1, 2$ ,

$j \neq k$  имеем:

$$\mathfrak{s}(A_j^+ - A_k^-) \neq 0, \quad \mathfrak{s}(A_j^+ + A_0^-) \neq 0, \quad \mathfrak{s}(A_j^- + A_0^+) \neq 0, \quad (9.5)$$

$$\mathfrak{s}(A_j^- + A_0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j^- + A_0^- = 0, \quad (9.6)$$

$$\mathfrak{s}(A_j^\pm - A_k^\pm) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j^\pm - A_k^\pm = 0, \quad (9.7)$$

$$\mathfrak{s}(A_j^+ + A_k^\pm) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j^+ + A_k^\pm = 2\pi \text{ и } jk \neq 0. \quad (9.8)$$

Допуская вольность речи, мы определяем параллелограмматические четырехзвенники и (анти)-параллелограммы как в §8.1. Назовем также четырехзвенник  $\mathbb{P}^2$ -*(анти)-параллелограммом* (соответственно  $\mathbb{P}^2$ -*дельтоидом*), если он становится (анти)-параллелограммом (соответственно дельтоидом) после применения к некоторым вершинам антиподальной инволюции.

ЛЕММА 9.4. (Ср. с леммой 6.2.) *Многочлен  $\hat{f}_{1j}$ ,  $j = 1, 2$ , приводим над  $\mathbb{C}$  тогда и только тогда, когда четырехзвенник  $p_0q_0p_1q_j$  либо  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматичен, либо является  $\mathbb{P}^2$ -дельтоидом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\hat{f}_{ij}$  приводим. Предположим, что  $\hat{f}_{ij}$  имеет множитель  $\hat{f}_0$  нулевой степени по  $t_j$ . Запишем  $\hat{f}_{1j} = c_2 t_j^2 + c_1 s_j t_j + c_0 s_j^2$ . Как и в §8.2, имеем  $\text{Res}_T(c_0, c_2) \doteq (U_1^2 - u^2)S^4$ , откуда следует  $U_1 = u$ , потому что  $U_1, u \geq 0$  по (9.4). Далее,  $c_0$  и  $c_2$  такие же, как в (8.4). Таким образом, либо  $\hat{f}_0 = S - T$ , либо  $u = 0$  и  $\hat{f}_0 = S + T$ . Если  $\hat{f}_0 = S - T$ , заключаем (как в §6 и §8.2), что  $U_1 = u$  и  $u_1 = u_{11}$ , что отвечает дельтоиду. Если  $u = 0$  и  $\hat{f}_0 = S + T$ , то  $c_1$  должен тождественно по  $T$  обращаться в нуль после подстановок  $U_1 = u = 0$ ,  $S = -T$ . Выполнив эти подстановки, получаем  $c_1 = 4(u_j + u_{1j})T^2$ . Следовательно,  $u_{1j} = -u_j$  и  $U_1 = u = 0$ . При замене  $p_1$  на антиподальную точку поменяется знак  $u_{1j}$ , и мы снова получим дельтоид.

Предположим теперь, что  $\hat{f}_{ij}$  не имеет множителя нулевой степени по  $t_j$ . Как и в доказательстве леммы 6.2, рассматриваем следующие два случая.

*Случай 1.*  $d_j^+ \equiv d_j^-$ . Это невозможно, поскольку  $d_j^+ - d_j^- = 4T \sin r_j \sin a_j$  (по (8.5) с  $\mathfrak{s}(x) = \sqrt{-1} \sin(x/2)$ ), и при этом  $r_j, a_j \in ]0, \pi[$ , так как  $\mathbf{p}$  является конфигурацией без  $\mathbb{P}^2$ -наложений.

*Случай 2.*  $\Delta_j^+ = \Delta_j^- = 0$ . По (8.6) в сочетании с (9.5) – (9.8) имеем

$$(A_j^+ + A_0^+ - 2\pi)(A_j^+ - A_0^+) = (A_j^- + A_0^-)(A_j^- - A_0^-) = 0.$$

Это эквивалентно четырем системам линейных уравнений. Две из них совпадают с (6.4). Две другие равносильны  $a_j + R = r_j + r = \pi$  и  $a_j + r = r_j + R = \pi$ . Применяя антиподальную инволюцию к  $q_j$  (для первой системы) или к  $p_1$  (для второй), мы получаем дельтоид или параллелограмматический четырехзвенник соответственно.

ЛЕММА 9.5. (Ср. с леммой 6.4.) *Если  $\hat{f}_{11}$  и  $\hat{f}_{12}$  неприводимы и  $\hat{F}_1$  – ненулевой приводимый многочлен, не являющийся степенью неприводимого, то четырехзвенник  $p_0q_1p_1q_2$  либо  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматичен, либо является  $\mathbb{P}^2$ -дельтоидом с осью  $p_0p_1$ .*

**Доказательство.** Рассуждения такие же, как и при доказательстве леммы 6.4, но необходимо рассмотреть больше случаев.

*Случай 1.*  $d_1^+ \equiv d_2^+$  и  $d_1^- \equiv d_2^-$ . Согласно (8.7) в сочетании с (9.6) – (9.8), имеем

$$(A_2^+ + A_1^+ - 2\pi)(A_2^+ - A_1^+) = (A_2^- + A_1^-)(A_2^- - A_1^-) = 0. \quad (9.9)$$

Это дает нам четыре системы уравнений: (6.5) и еще две системы, эквивалентные  $a_1 + a_2 = r_1 + r_2 = \pi$  и  $a_1 + r_2 = r_1 + a_2 = \pi$ . Применяя антиподальную инволюцию к  $q_1$  или  $p_1$ , получаем дельтоид или параллелограмматический четырехзвенник соответственно.

*Случай 2.*  $d_1^- \equiv d_2^-$  и  $\Delta_1^+ = \Delta_2^+ = 0$ . В силу (8.6), (9.5) – (9.8), второе условие дает

$$(A_1^+ + A_0^+ - 2\pi)(A_1^+ - A_0^+) = (A_2^+ + A_0^+ - 2\pi)(A_2^+ - A_0^+) = 0.$$

Исключая  $A_0^+$ , получаем  $(A_2^+ + A_1^+ - 2\pi)(A_2^+ - A_1^+) = 0$ . Вместе с  $d_1^- \equiv d_2^-$  это приводит к (9.9).

*Случай 3.*  $d_1^+ \equiv d_2^+$  и  $\Delta_1^- = \Delta_2^- = 0$ . В силу (8.6), (9.5) – (9.8), второе условие дает систему (6.6). Исключив из нее  $A_0^-$ , получим  $(A_2^- + A_1^-)(A_2^- - A_1^-) = 0$ . Комбинируя это равенство с  $d_1^+ \equiv d_2^+$ , мы снова получаем (9.9).

*Случай 4.*  $d_1^+ \equiv d_2^-$  и  $d_1^- \equiv d_2^+$ . По (8.7) в сочетании с (9.5) и (9.8), получаем  $A_1^+ + A_2^- = A_1^- + A_2^+ = 2\pi$ , откуда  $r_1 = r_2$  и  $a_1 + a_2 = 2\pi$ . Противоречие.

*Случай 5.*  $d_1^+ \equiv d_2^-$  и  $\Delta_1^- = \Delta_2^+ = 0$  (то же доказательство, если индексы 1 и 2 поменять местами). Согласно (8.7) и (9.5), из условия  $d_1^+ \equiv d_2^-$  следует  $A_1^+ + A_2^- = 2\pi$ . Согласно (8.6) и (9.5), из условий  $\Delta_1^- = 0$  и  $\Delta_2^+ = 0$  следует  $\pm A_0^- - A_1^- = 0$  и  $(A_0^+ - \pi) \pm (A_2^+ - \pi) = 0$  соответственно. Складывая эти три уравнения, деленные на 2, получаем  $r_1 + c = 2\pi - a_2$  или  $r_1 + c = \pi + r_2$ , где  $c$  равно  $r$  или  $R$ . Этот факт противоречит (9.4).

Подытожим леммы 9.4, 9.5 и 6.5 следующим образом.

**ЛЕММА 9.6.** (Ср. с леммой 6.6.) *Предположим, что  $u \neq 0$  и  $\mathbf{p}$  не удовлетворяет условию (SD1). Тогда (2,3)-конфигурация  $(p_0, p_1; q_0, q_1, q_2)$  содержит либо  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматический четырехзвенник, либо закрепленный  $\mathbb{P}^2$ -дельтоид, либо незакрепленный  $\mathbb{P}^2$ -дельтоид с осью  $p_0p_1$ .*

**9.4. Завершение доказательства теоремы 3.** Пусть  $\mathbf{p}$  — изгибаемая сферическая (3,3)-конфигурация без  $\mathbb{P}^2$ -наложений, не удовлетворяющая условию (SD1). Покажем, что  $\mathbf{p}$  удовлетворяет условию (PD2) или (CDA). Пусть  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2; q_0, q_1, q_2)$ . В этом подразделе мы не отождествляем  $S^2$  с  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , таким образом,  $p_i$  и  $q_j$  — просто точки на  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , а  $-p_i$  есть антипод точки  $p_i$ . Как и выше, положим  $u_{ij} = \langle p_i, q_j \rangle = \cos d_S(p_i, p_j)$ .

**ЛЕММА 9.7.** (а).  $\mathbf{p}$  не может содержать ромб с длиной стороны  $\pi/2$ .

(б). (Следует из леммы 3.2)  $(u_{0j}, u_{1j}, u_{2j}) \neq (0, 0, 0)$  для любого  $j = 0, 1, 2$ .

**ЛЕММА 9.8.** (Ср. с леммой 7.1.) *Если  $\mathbf{p}$  содержит  $\mathbb{P}^2$ -дельтоид, не являющийся  $\mathbb{P}^2$ -ромбом, то  $\mathbf{p}$  удовлетворяет условию (CDA).*



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $\mathbf{p}$  содержит  $\mathbb{P}^2$ -дельтоид  $\Delta$ , не являющийся  $\mathbb{P}^2$ -ромбом. Без потери общности мы можем считать, что  $\Delta$  является дельтоидом. Перенумеруем его вершины так, что  $\Delta = p_0q_1p_1q_2$  и ось  $\Delta$  есть  $q_1q_2$ , т.е.  $u_{01} = u_{11} \neq u_{02} = u_{12}$  (см. рис. 4, слева).

Если  $u_{00} = u_{10}$ , то  $p_0$  и  $p_1$  равноудалены от каждой точки  $q_j$  и  $\mathbf{p}$  удовлетворяет условию (SD1) по лемме 3.2. Следовательно, одно из  $u_{00}, u_{10}$  ненулевое. С точностью до перестановки  $p_0$  и  $p_1$  можно считать, что  $u_{00} \neq 0$ . Тогда по лемме 9.6 существуют четырехзвенники  $\Delta'$  и  $\Delta^*$  такие, что  $\Delta'$  содержится в  $(p_0, p_1; q_0, q_1, q_2)$ ,  $\Delta^*$  получается из  $\Delta'$  применением антиподальной инволюции к некоторым вершинам, и при этом  $\Delta^*$  реализует один из рассмотренных ниже случаев. В каждом из них мы рассматриваем только подслучаи, не разобранные в доказательстве леммы 7.1. Мы рассматриваем подслучаи с точностью до перестановок  $p_0 \leftrightarrow p_1$  и  $q_1 \leftrightarrow q_2$ . Если  $p_i, q_j$  — вершины  $\Delta'$ , мы обозначаем соответствующие вершины  $\Delta^*$  через  $p_i^*, q_j^*$  и полагаем  $u_{ij}^* = \langle p_i^*, q_j^* \rangle$ .

*Случай 1.*  $\Delta^*$  — параллелограмматический четырехзвенник.

*Подслучай 1a.*  $\Delta' = \Delta$ . Пусть  $\mathbf{u}^* = (u_{01}^*, u_{02}^*, u_{11}^*, u_{12}^*)$ .

- Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{01}, -u_{02}, u_{11}, u_{12})$ , то  $-u_{01} = u_{12} = u_{02} = -u_{11}$ , следовательно,  $(p_0, -q_1, p_1, q_2)$  — ромб, и таким образом,  $\Delta$  является  $\mathbb{P}^2$ -ромбом.
- Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{01}, u_{02}, -u_{11}, u_{12})$ , то  $\Delta^*$  — ромб.
- Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{01}, u_{02}, u_{11}, -u_{12})$ , то  $\Delta$  — ромб.

*Подслучай 1b.*  $\Delta' = p_0q_0p_1q_1$  и  $(u_{00}^*, u_{01}^*, u_{10}^*, u_{11}^*) = (u_{00}, \varepsilon u_{01}, \varepsilon \delta u_{10}, \delta u_{11})$ , где  $\delta, \varepsilon = \pm 1$ . Тогда  $u_{00} = \delta u_{11} = \delta u_{01} = u_{10}$ , следовательно,  $p_0$  и  $p_1$  равноудалены от каждой  $q_j$ , что противоречит лемме 3.2 в силу нашего предположения о том, что  $\mathbf{p}$  не удовлетворяет условию (SD1).

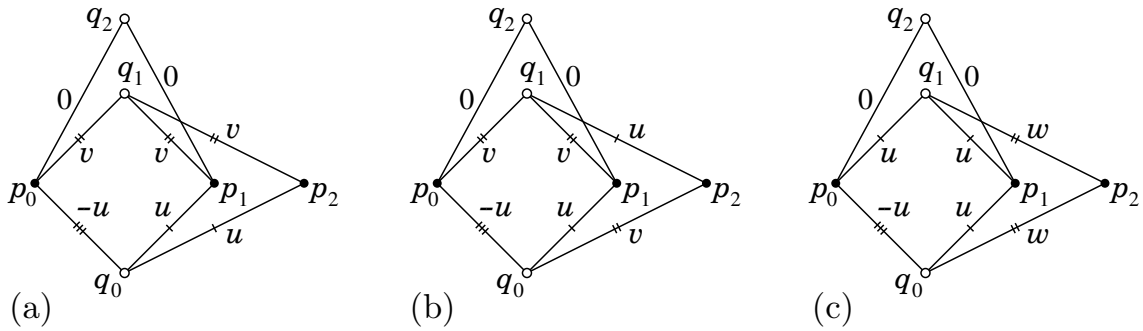
*Случай 2.*  $\Delta^*$  — закрепленный дельтоид с осью  $p_0p_1$ . Можно предполагать, что  $\Delta' = p_0q_0p_1q_1$  и  $(u_{00}^*, u_{01}^*, u_{10}^*, u_{11}^*) = (u_{00}, \varepsilon u_{01}, \varepsilon \delta u_{10}, \delta u_{11})$ , где  $\delta, \varepsilon = \pm 1$ . Тогда  $u_{00} = \varepsilon u_{01} = \varepsilon u_{11} = u_{10}$  и делаем вывод, как в подслучае 1b.

*Случай 3.*  $\Delta^*$  — закрепленный дельтоид с осью  $q_0q_1$  (самый интересный случай). Можно считать, что  $\Delta' = p_0q_0p_1q_2$ . Пусть  $\mathbf{u}^* = (u_{00}^*, u_{02}^*, u_{10}^*, u_{12}^*)$ . Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{00}, u_{02}, -u_{10}, u_{12})$ , то  $u_{00} = u_{10}$  и доказательство такое же, как для 1b. В противном случае можно считать, что  $\mathbf{u}^* = (-u_{00}, \varepsilon u_{02}, u_{10}, -\varepsilon u_{12})$  и  $\varepsilon = \pm 1$ . Тогда  $u_{02} = u_{12}$  (поскольку  $\Delta$  — дельтоид с осью  $q_1q_2$ ) и  $u_{02} = -u_{12}$  (поскольку  $\Delta^*$  — дельтоид с осью  $q_0q_2$ ). Следовательно,  $u_{02} = u_{12} = 0$ . Также имеем  $u_{00} = -u_{10}$ . Положим  $u = u_{10} = -u_{00}$  и  $v = u_{01} = u_{11}$ . Тогда  $uv \neq 0$  по лемме 9.7(a).

Рассмотрим  $(3, 2)$ -конфигурацию  $(p_0, p_1, p_2; q_0, q_2)$ . По лемме 9.6 она содержит либо  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматический цикл, либо  $\mathbb{P}^2$ -дельтоид. Можно проверить, что тогда, с точностью до перенумерации и применений антиподальной инволюции, числа  $u_{ij}$  такие, как на рисунке 6. При этом  $(2, 3)$ -конфигурация  $(p_0, p_2; q_0, q_1, q_2)$  тоже содержит  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматический цикл или  $\mathbb{P}^2$ -дельтоид. Поскольку  $u_{22} \neq 0$  по лемме 9.7(b), такое возможно лишь при  $w = 0$  на рис. 6(c), что означает выполнение условия (CDA).

*Случай 4.*  $\Delta' = \Delta$ , и  $\Delta^*$  — дельтоид с осью  $p_0p_1$ . Пусть  $\mathbf{u}^* = (u_{01}^*, u_{02}^*, u_{11}^*, u_{12}^*)$ .

- Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{01}, -u_{02}, u_{11}, u_{12})$ , то  $\Delta$  — ромб.
- Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{01}, u_{02}, -u_{11}, u_{12})$ , то  $\Delta^*$  — ромб.

Рис. 6.  $u_{ij}$  в случае 3 доказательства леммы 9.8.

- Если  $\mathbf{u}^* = (-u_{01}, u_{02}, u_{11}, -u_{12})$ , то  $-u_{01} = u_{02} = u_{12} = -u_{11}$ , следовательно,  $(p_0, -q_1, p_1, q_2)$  — ромб, а значит,  $\Delta$  является  $\mathbb{P}^2$ -ромбом.

ЛЕММА 9.9. Пусть  $\Pi$  есть  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматический цикл, и пусть  $\Pi^*$  получен из  $\Pi$  применением антиподальной инволюции к одной из его вершин. Тогда либо  $\Pi$ , либо  $\Pi^*$  параллелограмматичен.

ЛЕММА 9.10. (Ср. с леммой 7.2.)  $\mathbf{p}$  не может содержать двух различных  $\mathbb{P}^2$ -параллелограмматических циклов с тремя общими вершинами.

Эта лемма доказывается так же, как лемма 7.2, но с учетом леммы 9.9.

Оставшаяся часть §7 легко переносится на сферический случай с использованием леммы 9.9, однако требуется следующее дополнительное рассуждение на последнем этапе.

Предположим, что  $\mathbf{p}$  не удовлетворяет условию (PD2). Тогда  $u + u_1 + u_2 + u_{12} \neq 0$ , так как иначе  $(p_0, -p_1, p_2; q_0, -q_1, q_2)$  удовлетворяло бы условию (SD2). Напомним, что сферическая версия (7.1) — это (8.8) при  $\varepsilon = -1$ . Это произведение равно нулю при любом выборе знака “ $\pm$ ”, только если  $l = l_2 = 1$ , т. е. только если  $u = u_2 = 0$ , но это условие противоречит лемме 9.7(a).

## Список литературы

- [1] O. Bottema, “Die Bahnkurven eines merkwürdigen Zwölfstabgetriebes”, *Österr. Ingen. Archiv*, **14** (1960), 218–222.
- [2] A. C. Dixon, “On certain deformable frameworks”, *Messenger Math.*, **29** (1899/1900), 1–21.
- [3] M. Gallet, G. Grasegger, J. Legerský, J. Schicho, “On the existence of paradoxical motions of generically rigid graphs on the sphere”, *SIAM J. Discrete Math.*, **35**:1 (2021), 325–361.
- [4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [5] G. Grasegger, J. Legerský, J. Schicho, “On the classification of motions of paradoxically movable graphs”, *J. Computational Geometry*, **11**:1 (2020), 548–575.
- [6] М. Д. Ковалёв, “Шарнирный четырехзвенник: приводимость конфигурационного пространства и передаточная функция”, *ПММ*, **86**:1 (2022), 77–87.
- [7] Н. И. Левитский, *Теория механизмов и машин*, Наука, М., 1990.
- [8] H. Maehara and N. Tokushige, “When does a planar bipartite framework admit a continuous deformation?”, *Theoretical Computer Science*, **263**:1-2 (2001), 345–354.

- [9] D. Walter and M. L. Husty, “On a nine-bar linkage, its possible configurations and conditions for paradoxical mobility”, *in: Proceedings of Twelfth World Congress on Mechanism and Machine Science, IFToMM 2007, June 17–21, Besançon, 2007*, 6p.
- [10] W. Whiteley, “Infinitesimal motions of a bipartite framework”, *Pacific J. Math.*, **110**:1 (1984), 233–255.
- [11] W. Wunderlich, “On deformable nine-bar linkages with six triple joints”, *Indag. Math.*, **38**:3 (1976), 257–262.

**М. Д. Ковалёв (M. D. Kovalev)**

Мехмат МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

**С. Ю. Оревков (S. Yu. Orevkov)**

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и  
университет им. Поля Сабатье (Тулуза, Франция)