

**РАСПОЛОЖЕНИЯ M -КВИНТИКИ
ОТНОСИТЕЛЬНО КОНИКИ, МАКСИМАЛЬНО
ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ ЕЕ НЕЧЕТНУЮ ВЕТВЬ**

С.Ю. ОРЕВКОВ

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Формулировка основных результатов. Назовем *ветвями* неособой плоской вещественной проективной кривой компоненты связности множества ее вещественных точек. Ветвь называется *четной* (или *овалом*), если она гомологична нулю в $\mathbb{R}P^2$, и *нечетной* (или *псевдопрямой*) в противном случае.

Теорема 1. а). Пусть \mathcal{J} — ручная почти комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$, инвариантная относительно комплексного сопряжения, и пусть C_5 и C_2 — неособые вещественные \mathcal{J} -голоморфные M -кривые на $\mathbb{R}P^2$ степеней 5 и 2 соответственно. Обозначим через J_5 нечетную ветвь кривой C_5 . Предположим, что J_5 пересекает C_2 в десяти различных вещественных точках. Тогда $C_5 \cup C_2$ расположено на $\mathbb{R}P^2$ с точностью до изотопии одним из способов, перечисленных в п. 0.5, причем все эти расположения реализуемы.

б). Все расположения кроме тех шести, под которыми написано " \nexists^* алг." или " \nexists алг.", реализуемы вещественными алгебраическими кривыми степеней 5 и 2.

в). Те два расположения, под которыми написано " \nexists алг.", нереализуемы вещественными алгебраическими кривыми степеней 5 и 2.

Теорема 2. а). Пусть \mathcal{J} — ручная почти комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$, инвариантная относительно комплексного сопряжения, и пусть C_5 , L_1 и L_2 — неособые вещественные \mathcal{J} -голоморфные M -кривые на $\mathbb{R}P^2$ степеней 5, 1 и 1 соответственно. Обозначим через J_5 нечетную ветвь кривой C_5 . Предположим, что J_5 пересекает каждую из прямых L_1 и L_2 в пяти различных вещественных точках. Тогда либо $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ расположено на $\mathbb{R}P^2$ с точностью до изотопии и до смены ролей прямых одним из способов, перечисленных в пп. 0.6, 0.7 и на рис. 16.1–16.22, либо $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ реализует одно из шестнадцати расположений, таких что $L_1 = \{x = 0\}$, $L_2 = \{x + \varepsilon y = 0\}$, где L_1 — прямая, пересекающая J_5 в пяти точках, и $0 < \varepsilon \ll 1$. Все эти расположения реализуемы.

б). Среди них вещественными алгебраическими кривыми степеней 5, 1 и 1 реализуемы:

- все расположения, перечисленные в пп. 0.6 и 0.8;
- все расположения, перечисленные в п. 0.7, кроме тех пяти, под которыми написано " \nexists^* алг." или " \nexists алг.";
- расположения на рис. 16.1 – 16.11 и 16.13 – 16.22.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

в). Те три расположения в п. 0.7, под которыми написано "∄ алг.", а также расположение на рис. 16.12 нереализуемы вещественными алгебраическими кривыми.

Теоремы 1 и 2 доказываются в §§ 2–7. Общая схема доказательства приведена в пп. 0.2 и 0.4.

Замечание 1. Мне известно доказательство алгебраической нереализуемости тех четырех расположений из п. 0.5 и тех двух расположений из п. 0.7, под которыми написано "∄* алг.", но я не включил его в данную статью, поскольку она и без того получилась слишком длинной. Возможно, я это доказательство напишу где-нибудь еще.

Замечание 2. Существенная часть классификации, описываемой теоремой 2, была ранее получена в работах [9, 10] (см. подробнее в конце п. 0.4). Однако так вышло, что большую часть доказанных там утверждений о нереализуемости изотопических типов (запретов) можно "бесплатно" получить в качестве следствий из других утверждений настоящей статьи (см. п. 7.1). Поэтому для удобства читателя я добавил п. 7.2 (длиной в полстраницы), в котором передоказаны остальные запреты из [9, 10], и в результате доказательство "запретительной" части теорем 1 и 2 стало self-contained. Напротив, доказательства реализуемости (построения) я привожу только в тех случаях, когда их нет в [9, 10].

Один частный случай теоремы 1 допускает следующее обобщение на произвольные степени, причем это утверждение существенно используется в доказательстве теорем 1 и 2 (см. п. 6.5). Пусть O — простая замкнутая кривая на \mathbb{RP}^2 , ограничивающая с одной стороны диск D , а с другой — лист Мёбиуса M . Будем говорить, что n попарно непересекающихся гладко вложенных отрезков I_1, \dots, I_n с концами на O образуют гнездо глубины n внутри O (соответственно, снаружи O), если существуют вложенные диски $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \mathbb{RP}^2$, такие что $I_j = D \cap (\partial D_j)$ (соответственно, $I_j = M \cap (\partial D_j)$).

Теорема 3. Пусть C_2 и C_n — вещественные псевдоголоморфные (например, вещественные алгебраические) неособые M -кривые на \mathbb{RP}^2 степеней 2 и n соответственно. Предположим, что C_2 пересекает некоторую ветвь V_n кривой C_n в $2n$ различных вещественных точках, и что все остальные ветви кривой C_n расположены во внешности C_2 . Предположим, что V_n имеет ту же четность, что n (т.е. либо n четно, либо n нечетно и тогда V_n — нечетная ветвь кривой C_n). Тогда внутри C_2 существует гнездо глубины n , образованное дугами ветви V_n .

Этот результат будет доказан в §1. Доказательство основано на формуле комплексных ориентаций для сферы и на обобщении для квадрик теоремы Фидлера [3] о симметричных M -кривых. Для его понимания не требуется знакомство с оставшейся частью введения.

Замечание 3. Из сопоставления теоремы 3 с полученной в [14] классификацией расположений M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей один из ее овалов, естественно напрашивается вопрос:

Верно ли, что если B_n и n имеют разную четность (т.е. n нечетно и B_n — овал кривой C_n), и выполнены остальные условия теоремы 3, то внутри C_2 существует гнездо глубины $n - 1$, образованное дугами ветви B_n ?

Приведенное ниже доказательство теоремы 3 не переносится на этот случай, так как поднятие нечетной ветви кривой C_n на двулистное накрытие с ветвлением вдоль C_2 будет связным, и следовательно, поднятие кривой C_n будет не M -, а $(M - 1)$ -кривой на гиперboloиде, и все последующие аргументы теряют силу. С другой стороны, это лишний довод в пользу правдоподобности положительного ответа на поставленный вопрос, так как многие свойства $(M - 1)$ -кривых "отличаются на единицу" (что бы это ни значило) от соответствующих свойств M -кривых.

Я благодарен Г.М. Полотовскому за полезные обсуждения и ознакомление с результатами статьи [10] до ее написания.

0.2. Расположения, реализуемые псевдоголоморфно, но не алгебраически.

Как видно из формулировки теорем 1 и 2, некоторые расположения (с пометкой "∄ алг." в пп. 0.5, 0.7 и на рис. 16.12) пополняют список известных примеров изотопических типов, реализуемых вещественными псевдоголоморфными кривыми, но нереализуемых алгебраическими.

Алгебраическая нереализуемость двух из них (на рис. 21.1 и на рис. 16.12) доказана в пп. 4.1 и 4.4 соответственно, и к ней сводится алгебраическая нереализуемость остальных. А именно, нереализуемость рис. 21.2 и рис. 21.3 сводится к нереализуемости рис. 16.12 и рис. 21.1 в пп. 4.2 и 4.3 соответственно, а нереализуемость двух расположений квинтики и коники с пометкой "∄ алг." сводится к нереализуемости соответствующих расположений квинтики и пары прямых в силу следствия 5.2.

Доказательство алгебраической нереализуемости расположения на рис. 21.1 почти дословно копирует окончание доказательства запрета аффинной секстики $C_2(1, 3, 6)$ в [22; §3.4]. Однако для запрета расположения на рис. 16.12 в п. 4.4 мы применили новый способ, точнее, новую комбинацию двух старых: 1) рассмотрение кубической резольвенты R кривой бистепени $(4, n)$ на линейчатой поверхности и ее расположения относительно оси абсцисс L (эта идея уже ранее применялась автором в [18; §6] и [22; §3]); и 2) применение к косе, отвечающей кривой $R \cup L$, представления Бурау группоида крашенных кос (эта идея ранее применялась автором в [15]). При этом в замечании 4.7 мы приводим более подробное по сравнению с [15] и, на наш взгляд, более удобное для практических вычислений описание представления Бурау группоида крашенных кос.

В приложении А мы применили этот подход для того, чтобы дать новое и "более надежное" (см. обсуждение после формулировки предложения А.1) доказательство одного из главных результатов работы [21].

В приложении В мы применим метод кубических резольвент для доказательства алгебраической нереализуемости некоторых (не послойных!) изотопических типов на линейчатой поверхности \mathcal{F}_4 , причем данные изотопические типы реализуемы псевдоголоморфно в ручной почти комплексной структуре, в которой есть исключительная кривая.

0.3. Устранение зигзагов. Все утверждения о нереализуемости псевдоголоморфных кривых (запреты), не вытекающие из теоремы 3, доказываются в данной статье методом, предложенным в работах [13, 16], т.е. сведением задачи о реализуемости кривой к вопросу о квазиположительности некоторых кос (при этом арсенал критериев квазиположительности расширен за счет теоремы Флоранса [5], см. теорему 6.6).

Коса определяется расположением кривой относительно некоторого пучка прямых (послойным расположением). Чтобы запретить данный изотопический тип кривой, надо рассмотреть все соответствующие послойные расположения. Перебор можно существенно сократить за счет того, что при некоторых локальных преобразованиях (например, при распрямлении S-образных зигзагов) нереализуемость одного послойного расположения сводится к нереализуемости другого.

Во всех предыдущих работах, где применялся этот метод мной и другими авторами, сводимость всех послойных расположений к некоторому ограниченному их набору подразумевалась очевидной, и проверка деталей, заключающаяся в рутинном рассмотрении многих случаев, опускалась. Как правило, проверка и в самом деле была очевидной, однако в задаче о взаимных расположениях квинтики и коники (или квартики и кубики) число подлежащих рассмотрению случаев уже становится настолько большим, что возникает необходимость как-то систематизировать их перебор.

В [13; теорема 1.2А] в качестве примера применения метода кос дан запрет некоторых расположений квинтики и коники. Однако сформулированное там утверждение неверно, и ошибка заключается в том, что пропущено одно послойное расположение кривой — то, которое реализуемо алгебраически (эта ошибка обсуждается в [9]). Некоторые другие похожие утверждения сформулированы в [7], но в большинстве своем ошибочно, причем по той же самой причине. Во избежание повторения аналогичных ошибок, в пп. 6.3 и 6.4 приведены и доказаны некоторые утверждения о сводимости одних послойных расположений к другим.

Заметим, что утверждение об устранении S-образных зигзагов верно только для псевдоголоморфных кривых. В приложении Б к настоящей статье приведен пример, показывающий, что для алгебраических кривых оно не верно.

0.4. Типы и серии. Общая схема доказательства теорем 1 и 2.

Следуя Полотовскому, мы разобьем все расположения кривых, о которых идет речь в теоремах 1 и 2 на восемь типов ($8 = 3 + 5$) следующим образом.

Пусть C_5 , J_5 и C_2 — как в теореме 1. Пусть Γ_∞ — псевдопрямая (т.е. несамопересекающаяся нестягиваемая замкнутая кривая в \mathbb{RP}^2), не пересекающая C_2 , и при этом пересекающая J_5 в минимальном возможном числе точек n . Тогда точки пересечения кривых Γ_∞ и J_5 мы будем называть *проходами через бесконечность*, а n — *типом расположения* кривой C_5 относительно C_2 . Ясно, что n может принимать только значения 1, 3 или 5.

Пусть C_5 , J_5 , L_1 и L_2 — как в теореме 2. Прямые L_1 и L_2 делят \mathbb{RP}^2 на две области. Обозначим их D_1 и D_2 . Кривая J_5 разбивается прямыми L_1 , L_2 на 10 дуг. Обозначим через d_j , $j = 1, 2$, количество дуг, лежащих в области D_j и соединяющих одну прямую с другой. Неупорядоченную пару

(d_1, d_2) будем называть *типом расположения* кривой C_5 относительно L_1 и L_2 . Ясно, что каждое из чисел d_1, d_2 может принимать значения 1, 3 или 5, причем тип (5,5) невозможен. Таким образом, все расположения естественным образом делятся на пять типов: (1,1), (1,3), (3,3), (1,5) и (3,5).

Внутри каждого типа мы будем делить кривые на *серии*, отвечающие изотопическим классам расположений J_5 относительно C_2 или $L_1 \cup L_2$. В списках в пп. 0.5 – 0.7 и далее в тексте номера серий набраны жирным шрифтом.

Ясно, что объекты, описываемые теоремами 1 и 2 очень близки. Действительно, если пару прямых возмутить в неособую конику, то из кривой $C_5 \cup L_1 \cup L_2$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, получится кривая $C_5 \cup C_2$, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Наоборот, во многих случаях (см. §5) кривую $C_5 \cup C_2$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, можно вырождать в кривую, удовлетворяющую условиям теоремы 2. По этой причине многие случаи классификации кривых вида $C_5 \cup C_2$ сводятся к классификации кривых вида $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ и обратно, причем это относится к классификации как псевдоголоморфных кривых, так и алгебраических.

В доказательствах реализуемости (в построениях) мы пользуемся только возмущением $L_1 \cup L_2 \rightarrow C_2$. Однако в доказательствах нереализуемости (запретов) мы пользуемся сведениями в обе стороны. Поэтому, чтобы исключить у читателя подозрения о порочном круге, приведем общую схему доказательства запретов в псевдоголоморфном случае (общая схема запретов в алгебраическом случае обсуждалась в п. 0.2).

Шаг 1. В следующих случаях как алгебраическая, так и псевдоголоморфная классификация очевидным образом сводится к классификации расположений $C_5 \cup C_1$ — максимально пересекающихся квинтики и одной прямой:

- (1.1) расположения $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типов (1,5) и (3,5);
- (1.2) расположения $C_5 \cup C_2$ с пятью проходами через бесконечность;
- (1.3) расположения $C_5 \cup C_2$ с одним или тремя проходами через бесконечность, имеющие гнездо из пяти вложенных дуг внутри C_2 (см. определение в п. 0.1 перед формулировкой теоремы 3).

Классификация расположений $C_5 \cup C_1$ первоначально была получена Полотовским [23] с использованием методов, применимых только к алгебраическим кривым. Однако ее можно также вывести из сравнения Виро-Харламова [8] (кстати говоря, обнаруженного отчасти благодаря этой классификации), которое имеет место для гибких кривых в смысле Виро, а следовательно, и для псевдоголоморфных кривых.

Шаг 2. (§3). Полная классификация расположений $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типа (3,3).

Шаг 3. (§6). Запреты расположений $C_5 \cup C_2$ с одним проходом через бесконечность серий, перечисленных в п. 6.1.

Шаг 4. (п. 7.1). Запреты расположений $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типов (1,1) и (1,3), сводящиеся к запретам для $C_5 \cup C_2$, доказанным на шагах 1.2, 1.3 и 3.

Шаг 5. (п. 7.2 или ссылка на [9, 10]). Запреты расположений $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типов (1,1) и (1,3), не доказанные на шаге 4. Это завершает доказательство теоремы 2.

Шаг 6. В силу следствия 5.2 запреты расположений $C_5 \cup C_2$ во всех оставшихся случаях (т.е. для серий с одним проходом через бесконечность, не рассмотренных на шаге 3, и для всех расположений с тремя проходами через бесконечность) сводятся к уже доказанной теореме 2.

В следующей таблице мы приводим распределение реализуемых расположений по типам (по замечанию 1 в п. 0.1 последние две строки можно сложить).

| Тип расположения | $C_5 \cup C_2$ | | | $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ | | | | |
|-------------------------|----------------|----|---|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 3 | 5 | (1,1) | (1,3) | (3,3) | (1,5) | (3,5) |
| Число серий | 33 | 15 | 2 | 8 | 19 | 7 | 3 | 1 |
| Число пс-гол. располож. | 124 | 48 | 4 | 20 | 56 | 22 | 12 | 4 |
| Число "7 алг." | — | 2 | — | — | 3 | 1 | — | — |
| Число "7* алг." | 3 | 1 | — | — | 2 | — | — | — |

Полная классификация алгебраических расположений $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ для типа (1,1) и почти полная (за исключением около полутора десятка случаев) для типа (1,3) получена в [9, 10]. Почти все доказательства запретов в [9, 10] автоматически переносятся на случай псевдоголоморфных кривых (с учетом сказанного в шаге 1 о классификации $C_5 \cup C_1$). Единственное исключение составляет расположение, обозначенное в [9] через $D4$. Его нереализуемость сводится в [9] к алгебраической нереализуемости аффинной секстики изотопического типа $B_2(1, 4, 5)$, доказанной в [4]. Это рассуждение не переносится на псевдоголоморфный случай по той простой причине, что такая псевдоголоморфная аффинная секстика построена в [13] (см. также [4]). Доказательства из [9] станут полностью переносимыми на псевдоголоморфный случай, если в таблицу 2 в статье [9] после строки " $D2$ " добавить строку

$$D4 \quad \text{—} \quad X_2 X_3 X_4 \supset_3 \zeta_3 \varepsilon_4 X_3 X_2 X_2 X_2 X_2 \varepsilon_3 \subset_4 X_5 X_5 \quad 6 \quad 2; 4$$

0.5. Список всех псевдоголоморфно реализуемых расположений M -квинтики и неособой коники, максимально пересекающей нечетную ветвь.

0.5.1. Кодировка серий. Список организован по тем же правилам, что и список в [18, §5]. Для идентификации изотопического типа взаимного расположения пересекающихся ветвей (серий) мы будем использовать кодировку, предложенную Полотовским. А именно, занумеруем точки множества $J_5 \cap C_2$ символами $0, 1, \dots, 9$ в порядке их расположения вдоль C_2 , причем так, чтобы точка 0 являлась концом некоторой компоненты множества $J_5 \setminus C_2$, пересекающей Γ_∞ , а точка 1 не являлась (Γ_∞ — то же, что в начале п. 0.4). Изотопический тип множества $J_5 \cup C_2$ мы будем кодировать словом $i_0 i_1 \dots i_9$ из символов $0, \dots, 9$, стоящих в том порядке, в котором соответствующие точки расположены на J_5 , причем дуга (i_9, i_0) квинтики должна содержать проход через бесконечность (т.е. пересекать Γ_∞). Из всех возможных слов, кодирующих один и тот же изотопический тип (если нет симметрий, то число таких слов равно удвоенному числу проходов через бесконечность), мы будем всегда

выбирать наименьшее относительно лексикографического порядка. Для удобства мы будем обозначать проходы через бесконечность косой чертой ”/”.

В списке сначала идут расположения с одним проходом через бесконечность, затем с тремя, и затем с пятью. Серии каждого типа упорядочены лексикографически (без учета символа ”/”). Расположения одной серии идут в произвольном порядке. Точки $0, \dots, 9$ на рисунках не помечены, но всегда подразумевается, что они расположены на C_2 по часовой стрелке, причем точка 0 всегда вверху. Числа на рисунках обозначают количество овалов квинтики в соответствующих областях.

0.5.2. Кодировка способов построения. Под каждым расположением указаны способы его построения. Это либо номер рисунка, на котором изображена возмущаемая особая кривая (при этом выражение вида 16.2,7 является сокращением для 16.2, 16.7), либо одна из следующих пометок.

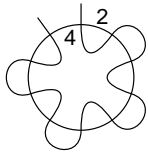
$\bar{5} + 1$. Означает, что $C_2 = \{c_1^2 = \varepsilon f\}$, где $\{c_1 = 0\}$ — прямая, пересекающая J_5 в пяти точках и $0 < \varepsilon \ll 1$.

m_n . Означает, что C_2 — возмущение пары прямых на n -ом расположении m -ой серии из списка расположений $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типа (1,3) в п. 0.7.

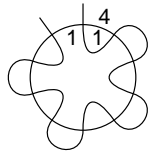
Пометки вида A1, B5 и т.п. значат, что C_2 — возмущение пары прямых на соответствующем расположении $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типа (1,1), построенном в [9] (см. также п. 0.6).

0.5.3. Расположения $C_5 \cup C_2$ с одним проходом через бесконечность.

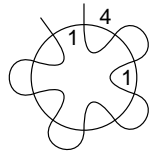
1. 0123456789



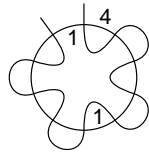
A15, 5.2, 9.3



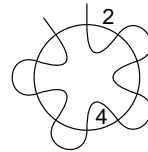
A12, 2.1



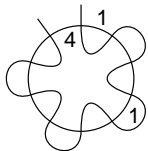
A11, 9.3



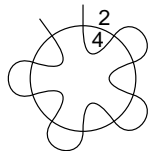
A13



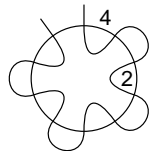
A10



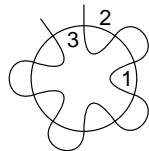
A14



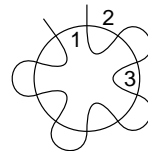
5.1



5.3, 9.1

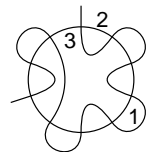


2.2, 9.1, 9.2

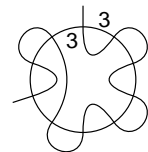


9.2

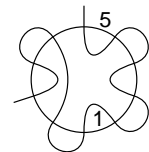
2. 0123456987



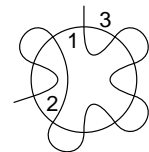
D11



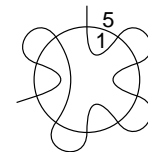
D13, 5.2, 5.3,
9.3



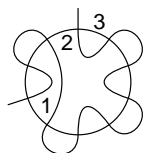
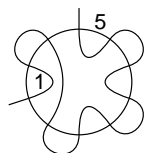
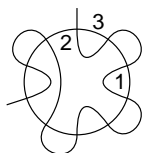
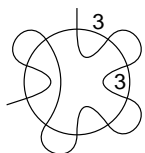
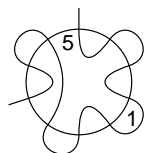
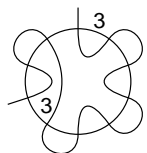
D14



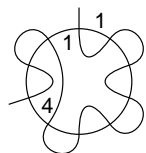
D3, 9.3



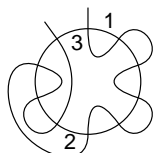
D7, 2.1, 7.2

15₁, 2.2, 9.1,
9.215_{2,3}15₄, 9.515₅, 9.515₆**3. 0123458769**

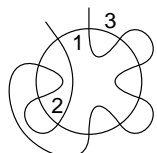
9.1



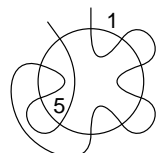
9.2



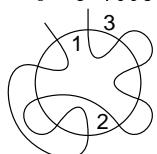
B1



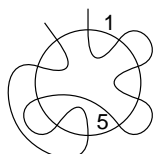
B1, 2.1



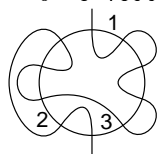
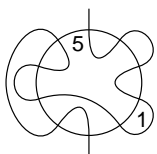
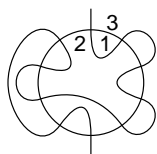
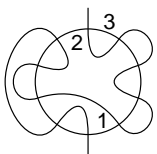
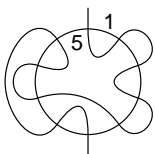
5.1

4. 0123476589

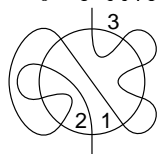
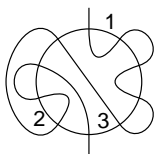
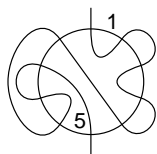
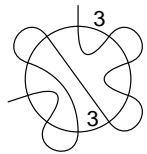
C1



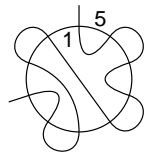
C2

5. 0123478965D3, 13₁D7, 13₃D11, 13₄**6. 0123496785**D13, 13₂

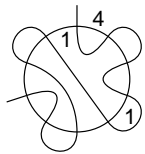
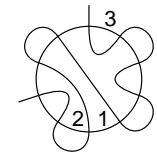
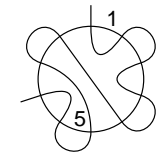
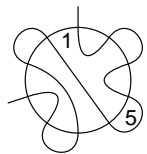
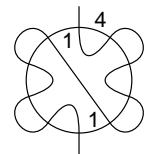
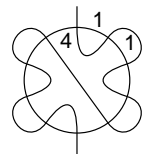
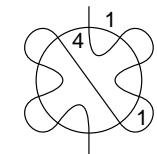
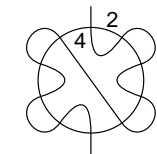
D14, 5.2

B1, 11₃B2, 11₂11₁ (7* алг.)**7. 0123498567**

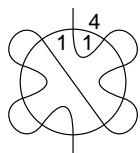
C2, 5.3



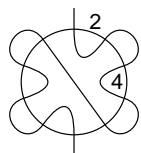
C5

4₁4₂, 9.84₃, 9.8**8. 0123498765**4₄A10, A15, 18₃A11, 18₁A12, 18₂

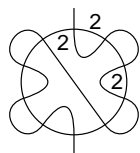
A13, 5.2



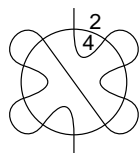
A14, 18₄



19₂, 9.8

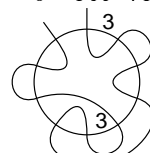


19₁, 9.8



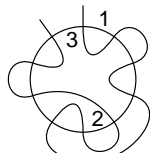
18₅ ($\bar{7}$ * алг.)

9. 0123654789

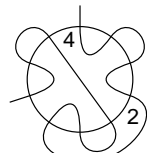


5.3, 9.4

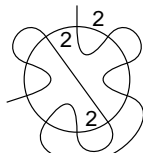
10. 0123654987



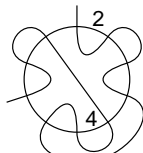
2.2, 9.4



17₁

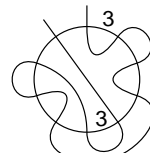


17₂, 2.2, 9.4

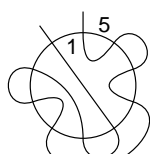


5.2, 9.4

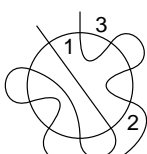
11. 0123678549



5.1

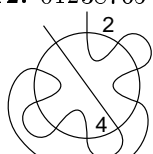


2.1

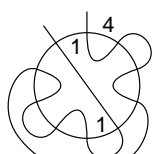


11.4

12. 0123876549

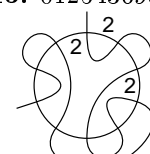


5.1



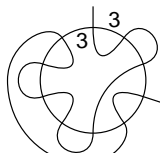
2.1

13. 0125436987

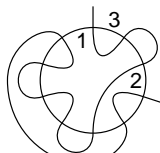


16₁

14. 0125678943

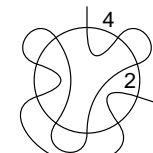


5.2, 9.7

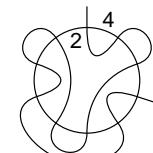


2.2, 9.7

15. 0125698743

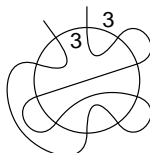


7₁, 2.2



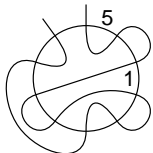
7₂, 5.2

16. 0127634589

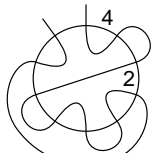


1₁, 2.2, 9.6

17. 0127654389

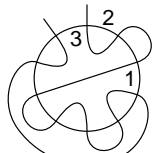


1₂, 5.3, 9.6

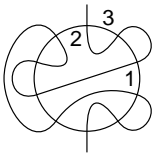


5.3, 9.7

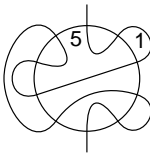
18. 0127896345



2.2, 9.7

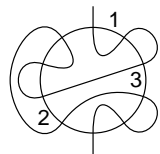


2₁, 3₁

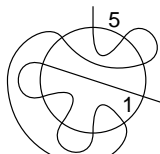


2₂, 3₂

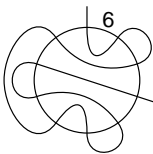
19. 0129456783 20. 0129654783



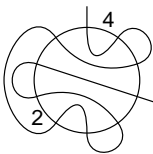
2₃, 3₃



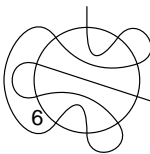
2.1, 7.2



5 + 1

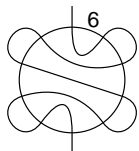


5 + 1

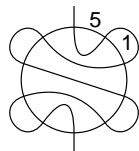


5 + 1

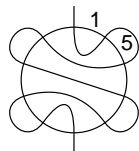
21. 0129834765



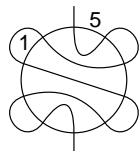
5 + 1



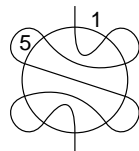
5 + 1



5 + 1

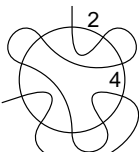


5 + 1



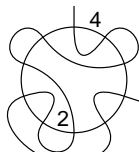
5 + 1

22. 0129854367



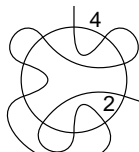
F2, 5.3

23. 0129856743

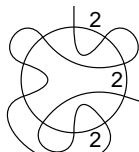


F2

24. 0129874563

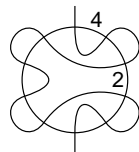


E2, 2.1, 7.2

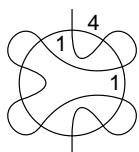
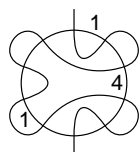
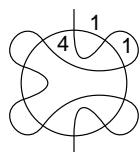
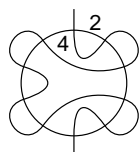


E4

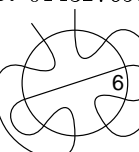
25. 0129876345



G5, 5.3

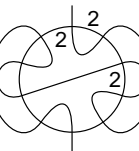
6_{1,4}, 9.56_{2,3}6_{5,7}6₆, 9.5

26. 0143276589

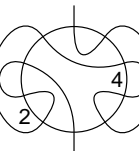


H5

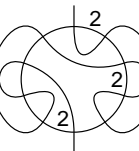
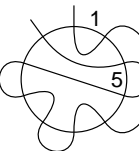
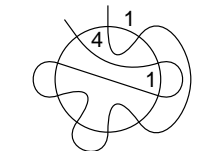
27. 0143278965

G5, 14₁

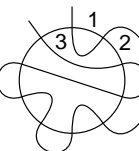
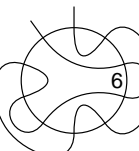
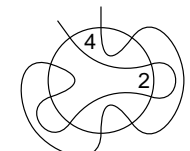
28. 0143296785

E2, 12₁

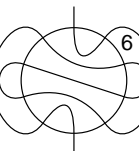
29. 0145678329

E4, 12₂8₁, 5.1, 7.18₂, 7.1

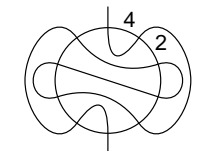
30. 0145876329

8₃ (7* алг.)9₁, 5.1, 7.19₂, 7.1

31. 0147832965

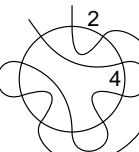


5 + 1



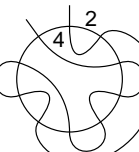
5 + 1

32. 0167854329

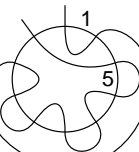


5.1, 7.1

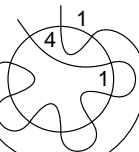
33. 0187654329



7.1



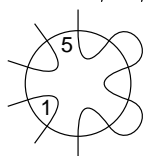
5.1, 7.1



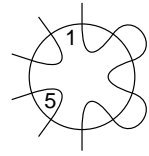
7.1

0.5.4. Расположения $C_5 \cup C_2$ с тремя проходами через бесконечность.

34. 012345/89/67

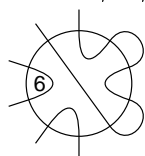


5₂

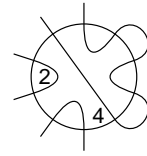


5₁

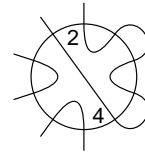
35. 012349/65/87



16.19

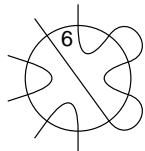


16.20

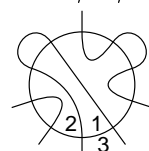


16.21

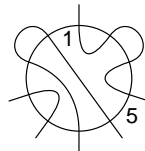
36. 0123/67/4985



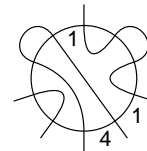
16.22



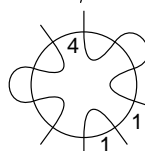
16.12, 8₃ ($\bar{7}$ алг.)



8₁, 16.13

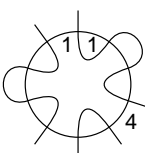


8₂, 16.14

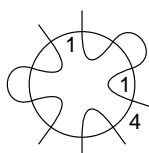


6₁, 18₄

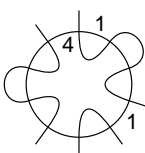
37. 0123/6789/45



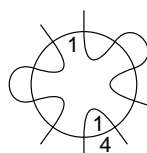
6_{2,6}, 18₁



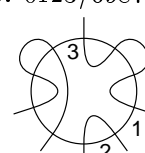
6_{3,5}, 18₂



6₄, 18₃

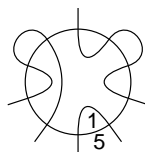


18₅ ($\bar{7}^*$ алг.)

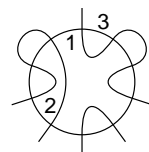


3₁, 11₃

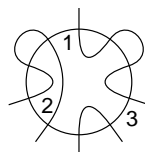
38. 0123/6987/45



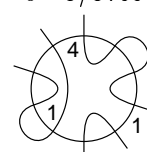
3₂, 11₁ ($\bar{7}$ алг.)



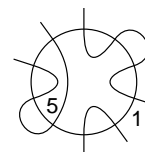
3₃



11₂

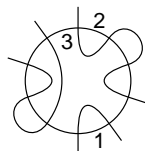


15₂, 16.1, 6

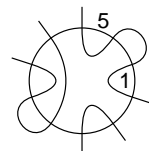


15₃, 16.2, 7

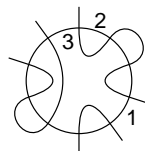
39. 0123/8769/45



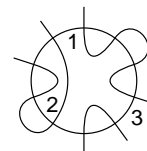
13₄, 15₁, 16.3, 5



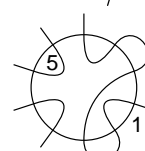
2₂, 13₃, 15₆, 16.4



2₁, 13₂, 15₄

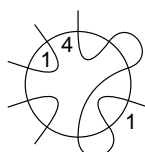


2₃, 13₁, 15₅

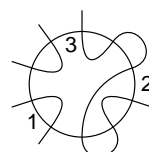


4₄, 16.15

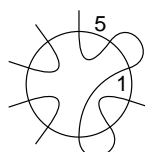
40. 012543/89/67



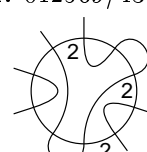
4₁, 16.16



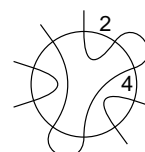
4₂, 16.17



4₃, 16.18



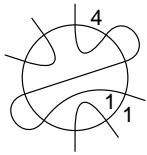
7₁, 16.9, 10



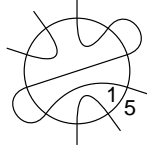
7₂, 16.8, 11

41. 012569/43/87

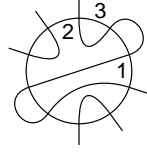
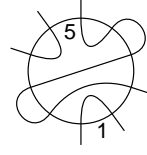
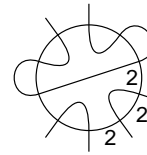
42. 012763/89/45



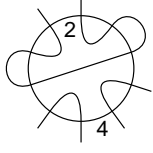
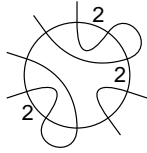
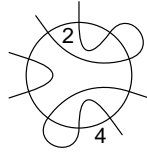
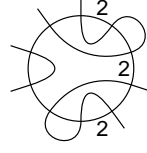
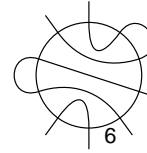
16.1,16



16.2,15

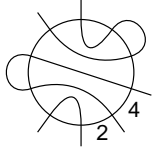
1₁, 16.3,171₂, 16.4,1819₁, 16.10

44. 0129/43/8567 45. 0129/4563/87

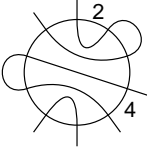
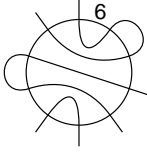
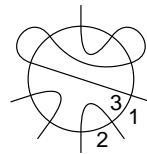
19₂, 16.1114₁,16₁12₁12₂

16.19

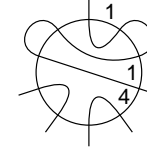
47. 012983/67/45



16.20

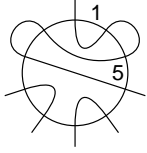
9₂, 16.219₁, 16.22

16.5,12

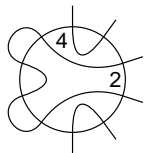
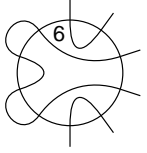


16.6,14

48. 01/45/298763

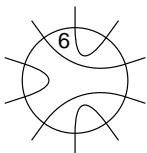


16.7,13

10₁10₂

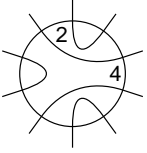
0.5.5. Расположения $C_5 \cup C_2$ с пятью проходами через бесконечность.

49. 01/63/87/29/45

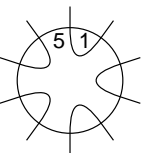


5 + 1

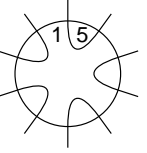
50. 01/67/23/89/45



5 + 1



5 + 1



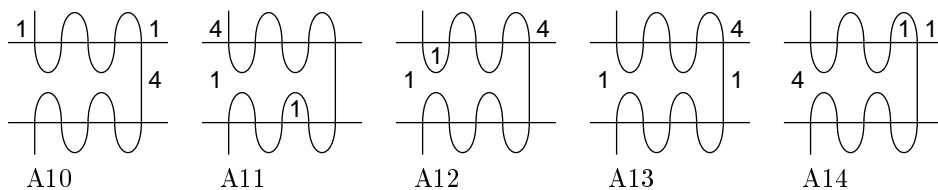
5 + 1

0.6. Список всех псевдоголоморфно реализуемых расположений M -квинтики и пары прямых типа $(1,1)$. Для удобства читателя в данном пункте мы воспроизводим из [9] список расположений $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типа $(1,1)$. Принцип организации списка примерно тот же, что и в п. 0.5. Кодировка пересекающихся ветвей следующая (как и в п. 0.5, она введена Полотовским).

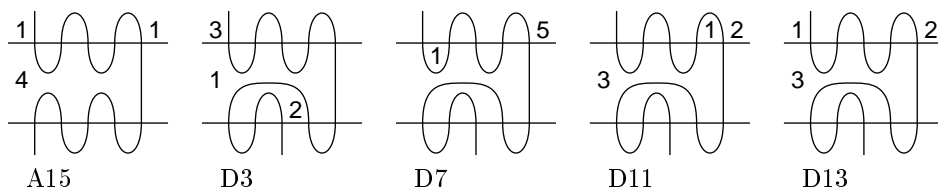
Обозначим точки из $L_1 \cap J_5$ через $0,1,2,3,4$, а точки из $L_2 \cap J_5$ — через $5,6,7,8,9$, в том порядке, в котором они расположены на $L_1 \setminus \{p\}$ и на $L_2 \setminus \{p\}$

соответственно $(\{p\} = L_1 \cap L_2)$. Пусть D_1 и D_2 — компоненты дополнения к $L_1 \cup L_2$, причем точки $0, 1, \dots, 9$ идут в этом порядке при обходе вдоль границы области D_2 . Серия кодируется словом $i_0 \dots i_9$, из символов $0, \dots, 9$, стоящих в том порядке, в котором соответствующие точки расположены на J_5 , причем точки с номерами i_0 и i_9 должны лежать на разных прямых и дуга (i_0, i_9) ветви J_5 должна лежать в области D_1 . Как и в п. 0.5, из всех возможных слов всегда выбрано лексикографически минимальное. На рисунках L_1 и L_2 изображены в виде горизонтальных прямых (точка p на бесконечности), а точки $0 \dots 9$ расположены в следующем порядке: $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{matrix}$ (из чего следует, что область D_2 представлена на рисунках в виде горизонтальной полосы). Под каждым расположением приведено его обозначение согласно [9].

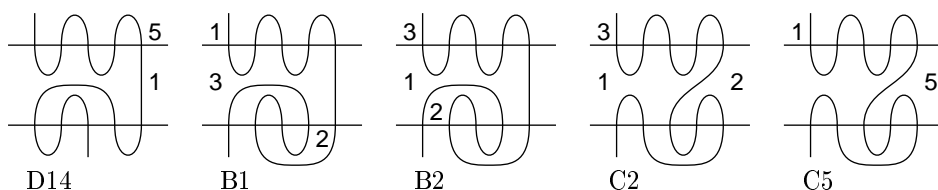
1. 0123456789



2. 0123456987

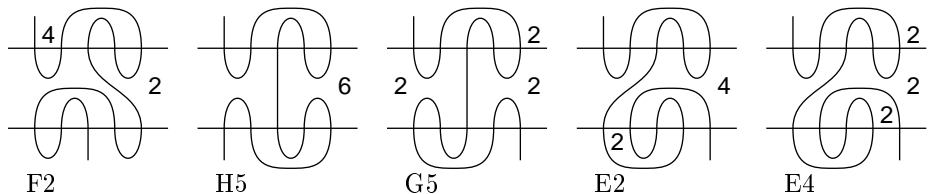


3. 0123458769



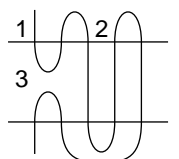
4. 0123476589

5. 0143256987 6. 0143276589 7. 0143278965 8. 0143296785

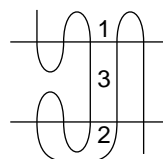
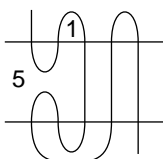
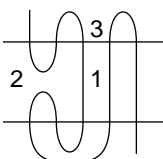
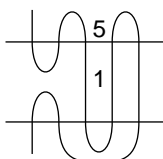


0.7. Псевдоголоморфные расположения $C_5 \cup L_1 \cup L_2$ типа (1,3). Список организован как в п. 0.6, но при кодировании серий предполагается $d_1 = 1$, $d_2 = 3$ (смысл d_1 и d_2 см. в п. 0.4). Под некоторыми расположениями указано построение (возмущаемая особая кривая), Остальные построения см. в [10].

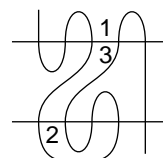
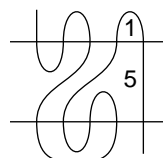
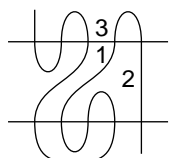
1. 0127634589



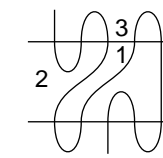
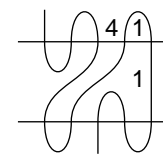
2. 0127896345



3. 0129678345



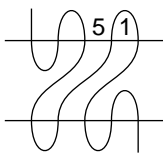
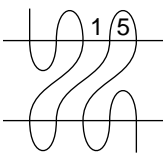
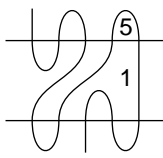
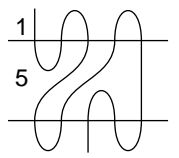
4. 0129834567



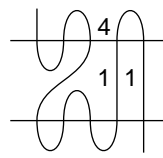
\nexists алг.

13.1

5. 0129834765



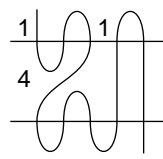
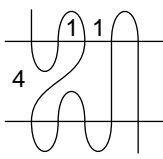
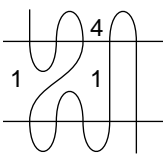
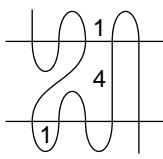
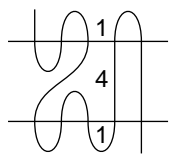
6. 0129876345



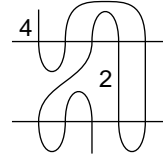
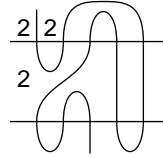
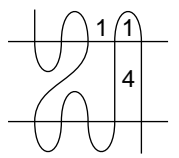
13.1

13.1

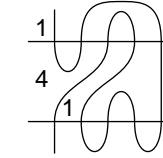
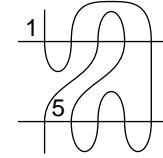
13.1



7. 0145632987



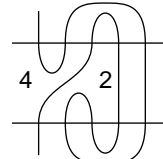
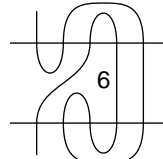
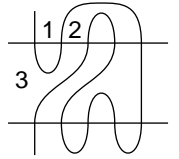
8. 0145678329



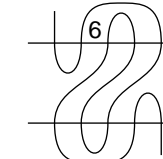
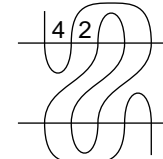
\nexists^* алг.

12.1

9. 0145876329



10. 0147832965



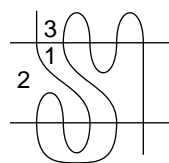
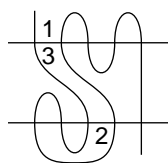
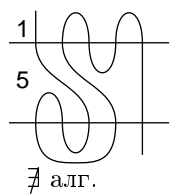
\nexists алг.

12.1

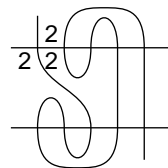
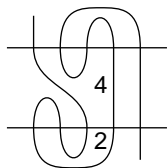
14.3

14.3

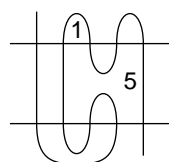
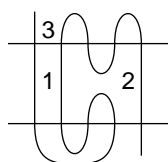
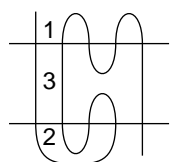
11. 0789612345



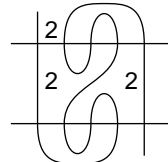
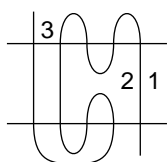
12. 0789632145



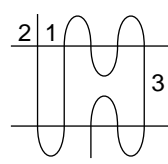
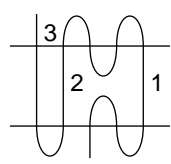
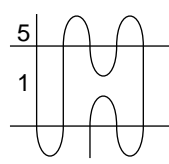
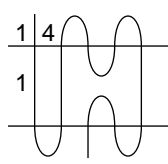
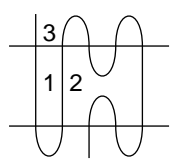
13. 0967812345



14. 0967832145

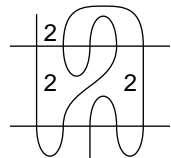
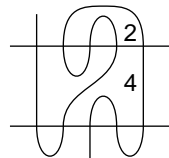
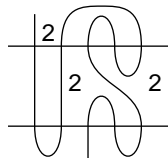
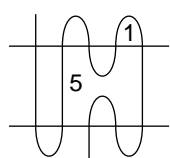


15. 0981234567

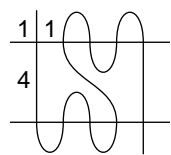
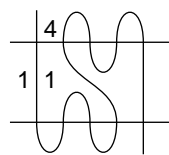
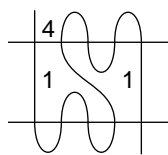
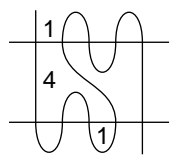
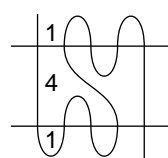


15.1 - 15.4

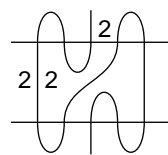
16. 0981432567 17. 0983214567



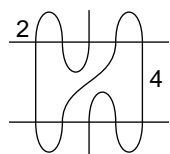
18. 0987612345



19. 2109834567



7* а.пг.



§1. КРИВЫЕ НА КВАДРИКАХ: ФОРМУЛА КОМПЛЕКСНЫХ
ОРИЕНТАЦИЙ, ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФИДЛЕРА О
СИММЕТРИЧНЫХ M -КРИВЫХ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

1.1. Формула комплексных ориентаций Рохлина и характеристика гиперболических кривых на \mathbb{RP}^2 .

Пусть A — неособая вещественная алгебраическая кривая на \mathbb{RP}^2 (множество ее комплексных точек) и $\mathbb{R}A$ — множество ее вещественных точек. Предположим, что кривая A *разбивающая*, т.е. множество $A \setminus \mathbb{R}A$ состоит из двух компонент связности, замыкания которых мы обозначим через A_+ и A_- . *Комплексной ориентацией* кривой $\mathbb{R}A$ называется ориентация, индуцированная комплексной ориентацией одной из половинок A_+ или A_- .

Обозначим через Π_+ (соответственно, Π_-) число пар овалов (O, o) кривой $\mathbb{R}A$, таких что o лежит внутри O и при этом $[o] = -[O]$ (соответственно, $[O] = [o]$) в группе первых гомологий кольца, ограниченного на \mathbb{RP}^2 этими овалами. Пусть l число овалов кривой $\mathbb{R}A$. Предположим, что степень кривой A четна и равна $2k$. Тогда имеет место формула комплексных ориентаций Рохлина

$$2(\Pi_+ - \Pi_-) = l - k^2. \quad (1)$$

Теперь предположим, что степень кривой нечетна и равна $2k + 1$. Пусть J — нечетная ветвь кривой A . Обозначим через Λ_+ (соответственно, Λ_-) число овалов O , таких что $[O] = -2[J]$ (соответственно, $[O] = 2[J]$) в группе первых гомологий внешности овала O . Тогда имеет место формула комплексных ориентаций Рохлина-Мишачева

$$(\Lambda_+ - \Lambda_-) + 2(\Pi_+ - \Pi_-) = l - k^2 - k. \quad (2)$$

Одним из следствий формул (1) и (2) является следующий факт, обнаруженный Рохлиным. Напомним, что вещественная алгебраическая кривая на \mathbb{RP}^2 называется *гиперболической*, если существует точка $p \in \mathbb{RP}^2$, такая что любая вещественная прямая, проходящая через p , пересекает A в d вещественных точках, где d — степень кривой A . Это условие эквивалентно тому, что $\mathbb{R}A$ состоит из $[d/2]$ овалов, образующих гнездо, и нечетной ветви, если d нечетно.

Предложение 1.1. Пусть A — разбивающая вещественная алгебраическая кривая на \mathbb{RP}^2 степени $2k$ или $2k + 1$, имеющая l овалов. Тогда $l \geq k$, и если $l = k$, то кривая A — гиперболическая.

Доказательство. Мы дадим доказательство для случая четной степени. Для нечетной степени доказательство аналогично. Ясно, что $(l^2 - l)/2 =$ (число пар овалов) \geq (число вложенных пар овалов) $= \Pi_- + \Pi_+ \geq \Pi_- - \Pi_+$, и последнее выражение равно $(k^2 - l)/2$ согласно (1). Поэтому $l^2 \geq k^2$, и значит, $l \geq k$. При этом, если $l = k$, то мы имеем равенство в предыдущих выкладках, из чего следует, что любая пара овалов является вложенной. \square

1.2. Формула комплексных ориентаций Звонилова и характеристика гиперболических кривых на эллипсоиде.

Здесь мы приведем полученную Звониловым [25] формулу комплексных ориентаций для кривых на эллипсоиде и перепишем ее в более инвариантном виде,

т.е. так, чтобы входящие в нее величины не зависели от произвола в выборе вспомогательной точки. Из этой формулы, как и в случае кривых на $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, мы выведем характеризацию гиперболических кривых на сфере как разбивающих кривых, имеющих минимально возможное число овалов.

Пусть X — комплексная квадрика, заданная в $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$, и пусть $\mathbb{R}X$ — множество ее вещественных точек, т.е. эллипсоид, заданный в $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ этим же уравнением. Пусть A — неособая разбивающая вещественная алгебраическая кривая на X степени $2k$ (или, что то же самое, бистепени (k, k)). Фиксируем ориентацию на $\mathbb{R}X$ и комплексную ориентацию на $\mathbb{R}A$.

Выберем произвольную точку $p \in \mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}A$. Пусть O_1, \dots, O_l — овалы кривой A . Каждый овал O_i делит сферу $\mathbb{R}X$ на два диска. Обозначим через D_i тот из них, который не содержит точку p . Снабдим эти диски ориентацией, индуцированной с $\mathbb{R}X$. Положим $\varepsilon_i = 1$ и назовем овал O_i положительным, если комплексная ориентация на нем совпадает с ориентацией границы диска D_i . В противном случае скажем, что O_i отрицателен, и положим $\varepsilon_i = -1$ (эти определения зависят от выбора точки p).

Пусть Λ_+^p и Λ_-^p — число положительных и отрицательных овалов. Обозначим через Π_\pm^p число пар (i, j) , таких что $i < j$, $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, и $\varepsilon_i \varepsilon_j = \mp 1$. Тогда имеет место следующая формула комплексных ориентаций [25] (см. также [2]):

$$2l - (\Lambda_-^p - \Lambda_+^p)^2 + 4(\Pi_-^p - \Pi_+^p) = k^2. \quad (3)$$

Выразим теперь левую часть формулы (3) через величины, не зависящие от выбора точки p . Любая пара непересекающихся вложенных окружностей делит сферу на три части, две из которых гомеоморфны диску, а третья — кольцу. Назовем пару овалов кривой $\mathbb{R}A$ *отрицательной*, если они реализуют один и тот же класс первых гомологий ограничиваемого ими кольца, и *положительной* в противном случае. Пусть Π_+ и Π_- — число положительных и отрицательных пар овалов кривой $\mathbb{R}A$.

Предложение 1.2. *Для разбивающей кривой на эллипсоиде бистепени (k, k) , имеющей l овалов, имеет место формула (1).*

Доказательство. Пусть $\tilde{\Pi}_\pm^p$ — число пар (i, j) , таких что $i < j$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, и $\varepsilon_i \varepsilon_j = \pm 1$. Ясно, что $\Lambda_+^p - \Lambda_-^p = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\Lambda_-^p - \Lambda_+^p)^2 &= \left(\sum_{i=1}^l \varepsilon_i^2 \right) + 2 \left(\sum_{D_i \cap D_j \neq \emptyset} \varepsilon_i \varepsilon_j \right) + 2 \left(\sum_{D_i \cap D_j = \emptyset} \varepsilon_i \varepsilon_j \right) \\ &= l + 2(\Pi_-^p - \Pi_+^p) - 2(\tilde{\Pi}_-^p - \tilde{\Pi}_+^p). \end{aligned}$$

Подставляя $\tilde{\Pi}_\pm^p = \Pi_\pm - \Pi_\pm^p$ и прибавляя (3), получаем (1). \square

Будем говорить, что попарно непересекающиеся гладко вложенные в сферу окружности O_1, \dots, O_r образуют гнездо, если существуют диски D_1, \dots, D_r , такие что $\partial D_i = O_i$, и $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_r$. В этом случае r называется глубиной гнезда. Например, два овала всегда образуют гнездо, а три — уже не всегда. Кривая бистепени (k, k) на эллипсоиде называется *гиперболической*, если она содержит гнездо глубины k (и тогда по теореме Безу она не может содержать других овалов).

Предложение 1.3. Пусть A — разбивающая вещественная алгебраическая кривая на эллипсоиде бистепени (k, k) , имеющая l овалов. Тогда $l \geq k$, и если $l = k$, то кривая A — гиперболическая.

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 1.1, из формулы (1) выводится, что $l \geq k$, и $\Pi_+ = 0$ при $l = k$. Остается воспользоваться следующими двумя очевидными фактами:

- 1). Если среди трех овалов любые два образуют отрицательную пару, то все три образуют гнездо.
- 2). Если среди k овалов любые три образуют гнездо, то и все k овалов тоже образуют гнездо. \square

1.3. Теорема Фидлера о симметричных кривых на \mathbb{RP}^2 .

Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ — однородные координаты на $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{CP}^2$. Обозначим через $s : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ голоморфную инволюцию $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (-x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : -x_1 : -x_2)$. Пусть F — множество неподвижных точек этой инволюции. Оно является объединением прямой $F_1 = \{x_0 = 0\}$ и точки $F_0 = (1 : 0 : 0)$. Обозначим через $c : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ инволюцию комплексного сопряжения. Мы имеем $s \circ c = c \circ s$ (обозначим эту инволюцию через \tilde{c}). Любая вещественная (т.е. коммутирующая с комплексным сопряжением) голоморфная инволюция на \mathbb{CP}^2 заменой переменных приводится к такому виду. Обозначим через $\widetilde{\mathbb{RP}}^2$ множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции \tilde{c} .

Пусть A — вещественная алгебраическая кривая на \mathbb{RP}^2 , симметричная относительно инволюции s . Положим $\mathbb{R}A = A \cap \mathbb{RP}^2$ и $\widetilde{\mathbb{R}A} = A \cap \widetilde{\mathbb{RP}}^2$. Кривую $\widetilde{\mathbb{R}A}$ будем называть *дополнительной кривой* для кривой $\mathbb{R}A$.

В координатах симметричность кривой A означает, что она задается уравнением $f(x_0^2, x_1, x_2) = 0$. Переходя к координатам $\tilde{x}_0 = ix_0, \tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2$, получаем $\widetilde{\mathbb{RP}}^2 = \{(\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2) \mid \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}\}$ и $\widetilde{\mathbb{R}A} = \{(\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1 : \tilde{x}_2) \in \widetilde{\mathbb{RP}}^2 \mid f(-\tilde{x}_0^2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0\}$.

Теорема 1.4. (Фидлер [3]). Предположим, что $\mathbb{R}A$ является M -кривой степени d на \mathbb{RP}^2 . Тогда:

- а). Если $\mathbb{R}A \cap F \neq \emptyset$, то $\widetilde{\mathbb{R}A}$ — гиперболическая кривая на $\widetilde{\mathbb{RP}}^2$.
- б). Если $d \notin \{2, 4\}$, то $\mathbb{R}A \cap F \neq \emptyset$ (и значит, из части (а) следует, что $\widetilde{\mathbb{R}A}$ — гиперболическая кривая на $\widetilde{\mathbb{RP}}^2$).

Замечание. Возмущение объединения коник $x_0^2 = x_1^2 + 2x_2^2$ и $x_0^2 = 2x_1^2 + x_2^2$ (соответственно, любая из этих коник) дает пример, показывающий, что утверждение части (б) теоремы 1.4 неверно при $d = 4$ (соответственно, при $d = 2$).

В следующем пункте мы воспроизведем доказательство этой теоремы из [3], сортируя промежуточные утверждения на те, которые верны для любых (т.е. никуда не вложенных) симметричных вещественных кривых, те, которые верны для кривых на произвольных поверхностях, и те, которые верны для кривых на \mathbb{RP}^2 . В результате мы автоматически получим аналог теоремы 1.4 для симметричных кривых на вещественной квадрике.

1.4. Доказательство и обобщение теоремы Фидлера о симметричных кривых.

1.4.1. *Абстрактные (никуда не вложенные) кривые.*

Пусть A — гладкая риманова поверхность рода g , на которой имеется антиголоморфная инволюция $c : A \rightarrow A$ и коммутирующая с ней голоморфная инволюция $s : A \rightarrow A$. Положим

$$\tilde{c} = s \circ c = c \circ s, \quad \mathbb{R}A = \text{Fix}(c), \quad \widetilde{\mathbb{R}A} = \text{Fix}(\tilde{c}), \quad F = \text{Fix}(s).$$

Лемма 1.5. *Если кривая $\mathbb{R}A$ разбивающая и $F \cap \mathbb{R}A \neq \emptyset$, то $F = \mathbb{R}A \cap \widetilde{\mathbb{R}A}$.*

Доказательство. (см. [3]). В окрестности каждой точки множества $F \cap \mathbb{R}A$ инволюция s устроена как $z \mapsto -z$. Поэтому s отображает половинки множества $A \setminus \mathbb{R}A$ друг на дружку. \square

Лемма 1.6. *Предположим, что $\mathbb{R}A$ является M -кривой (т.е. число ее компонент связности равно $g + 1$). Тогда:*

а). *Если $F \cap \mathbb{R}A \neq \emptyset$, то кривая $\widetilde{\mathbb{R}A}$ разбивающая и число ее компонент связности равно половине мощности множества F .*

б). *Если $F \cap \mathbb{R}A = \emptyset$, то $\text{Card } F = 0, 2$ или 4 .*

Доказательство. (см. [3]). Заклеим дырки на одной из половинок множества $A \setminus \mathbb{R}A$ дисками, продолжим инволюцию \tilde{c} на получившуюся сферу и воспользуемся леммой 1.5. \square

Замечание. Лемма 1.6, конечно же, является непосредственным следствием из топологической классификации пар коммутирующих антиголоморфных инволюций римановых поверхностей, полученной Натанзоном [12].

1.4.2. *Кривые на произвольных поверхностях.*

Пусть теперь A — неособая связная кривая на гладкой поверхности X , и $s, c, \tilde{c} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ — голоморфная и антиголоморфные инволюции, такие что $\tilde{c} = c \circ s = s \circ c$. Положим $F = \text{Fix}(s) = F_0 \sqcup F_1$, где $\dim F_0 = 0$, $\dim F_1 = 1$, и

$$\mathbb{R}Z = \text{Fix}(c|_Z), \quad \widetilde{\mathbb{R}Z} = \text{Fix}(\tilde{c}|_Z) \quad \text{для } Z = X, A, F, F_k.$$

Ясно, что $\mathbb{R}F_k = \widetilde{\mathbb{R}F}_k$, $k = 0, 1$.

Лемма 1.7. *Если $\mathbb{R}A$ является M -кривой, и $\mathbb{R}A \cap F \neq \emptyset$, то $\widetilde{\mathbb{R}A}$ — разбивающая кривая, число компонент связности которой $b_0(\widetilde{\mathbb{R}A})$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leq 2b_0(\widetilde{\mathbb{R}A}) - (A \cdot F_1) \leq \text{Card}(\mathbb{R}F_0).$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 1.6. \square

1.4.3. *Кривые на $\mathbb{R}P^2$ и на вещественной квадрике.*

Доказательство теоремы 1.4. Из леммы 1.6(б) следует, что $\mathbb{R}A \cap F \neq \emptyset$. Поэтому из леммы 1.7 следует, что кривая $\widetilde{\mathbb{R}A}$ разбивающая и $2b_0(\widetilde{\mathbb{R}A}) \leq \deg A + 1$. Остается воспользоваться предложением 1.1. \square

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbb{R}X$ — гиперboloид, заданный в $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ уравнением $x_0^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$, X — его комплексификация, а $s : X \rightarrow X$ — инволюция $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : -x_3)$. Остальные обозначения введем как в п. 1.4.2. Положим $\tilde{x}_3 = ix_3$ и $\tilde{x}_j = x_j$ при $j \leq 2$. Тогда

$$\widetilde{\mathbb{R}X} = \{(\tilde{x}_0 : \dots : \tilde{x}_3) \in X \mid \tilde{x}_j \in \mathbb{R}\} = \{(\tilde{x}_0 : \dots : \tilde{x}_3) \in \widetilde{\mathbb{R}\mathbb{P}^3} \mid \tilde{x}_0^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2\}$$

— эллипсоид. Ясно, что $F_0 = \emptyset$ и F_1 — кривая бистепени $(1,1)$.

Теорема 1.8. Пусть $\mathbb{R}A$ — неособая вещественная M -кривая бистепени (k, k) на гиперboloиде $\mathbb{R}X$, симметричная относительно инволюции s . Тогда:

а). Если $\mathbb{R}A \cap F \neq \emptyset$, то дополнительная кривая $\widetilde{\mathbb{R}A}$ — гиперболическая кривая на эллипсоиде $\widetilde{\mathbb{R}X}$.

б). Если $k > 2$, то $\mathbb{R}A \cap F \neq \emptyset$ (и значит, из части (а) следует, что $\widetilde{\mathbb{R}A}$ — гиперболическая кривая на эллипсоиде $\widetilde{\mathbb{R}X}$).

Доказательство. Воспользоваться предложением 1.3 вместо предложения 1.1 в доказательстве теоремы 1.4. \square

1.5. Доказательство теоремы 3.

Введем на $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$ так, чтобы коника C_2 задавалась бы уравнением $y_0^2 = y_1^2 + y_2^2$. Пусть X, c, s означают то же, что и в п. 1.4.3. Пусть $\xi : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ — двулистное накрытие $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$, разветвленное вдоль C_2 . Тогда $\xi = \xi \circ s$, следовательно c и \tilde{c} — два поднятия на X инволюции комплексного сопряжения на $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Обозначим компоненты связности множества $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{R}C_2$ через D (диск) и M (лист Мёбиуса). Несложно проверить, что $\mathbb{R}X$ — гиперboloид (топологически — тор), и ξ отображает его на \overline{M} со складкой вдоль $\mathbb{R}F_1$. При этом $\mathbb{R}F_1$ диффеоморфно отображается на $\mathbb{R}C_2$, а ограничение отображения ξ на множество $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}F_1$ (которое гомеоморфно открытому кольцу) является связным двулистным накрытием над M . Далее, $\widetilde{\mathbb{R}X}$ — сфера, и ξ отображает ее на \overline{D} со складкой вдоль $\mathbb{R}F_1$. При этом $\widetilde{\mathbb{R}X} \setminus \mathbb{R}F_1$ является несвязным объединением двух дисков, каждый из которых гомеоморфно отображается на D .

Положим $A = \xi^{-1}(C_n)$. Это кривая бистепени (n, n) на X . Следовательно, ее род равен $g(A) = (n-1)^2$ (число целых точек внутри квадрата $n \times n$). Покажем, что $\mathbb{R}A$ является M -кривой на гиперboloиде $\mathbb{R}X$. Действительно, каждый овал кривой C_n , лежащий снаружи от $\mathbb{R}C_2$ (число таких овалов равно $g(C_n)$), будучи гомологичным нулю в $H_1(M)$, дает два овала кривой $\mathbb{R}A$ на $\mathbb{R}X$, и каждая внешняя дуга ветви B_n дает один овал на $\mathbb{R}X$. Итого получается $2g(C_n) + n = (n^2 - 3n + 2) + n = g(A) + 1$ овалов, т.е. $\mathbb{R}A$ есть M -кривая.

Поэтому из теоремы 1.8 следует, что $\widetilde{\mathbb{R}A}$ — гиперболическая кривая на эллипсоиде $\widetilde{\mathbb{R}X}$. Отсюда вытекает утверждение теоремы 3.

§2. ПОСТРОЕНИЯ

2.1. Определения и обозначения.

Напомним, что кривая имеет особенность типа A_n (соответственно, типа E_8) в точке p , если она задается уравнением $y^2 = \pm x^{n+1}$ (соответственно, $y^3 = x^5$) в некоторых локальных аналитических координатах с началом в p .

Определение 2.1. Предположим, что в точке p одна кривая неособа, а другая имеет особенность типа A_n . Будем говорить, что эти кривые имеют в точке p *максимальное* (соответственно, *почти максимальное*) *пересечение*, если локальная кратность пересечения равна $n + 1$ (соответственно, n).

Заметим, что если в точке p одна кривая неособа, а другая имеет особенность A_{2k} , то пересечение максимально тогда и только тогда, когда в любой достаточно малой окрестности точки p одна кривая лежит по обе стороны от другой.

Обозначение 2.2. Пусть C — кривая в \mathbb{RP}^2 и p — неособая точка на C , не являющаяся точкой перегиба. Выберем координаты $(x : y : z)$ таким образом, чтобы прямая $z = 0$ была касательной к C в точке p . Выберем параметр a так, чтобы коника $yz = ax^2$ имела бы с кривой C пересечение кратности ≥ 3 в точке p . Обозначим через $f_{C,p}$ бирациональное квадратичное преобразование $(x : y : z) \mapsto (xz : yz - ax^2 : z^2)$, т.е. преобразование $(X, Y) \mapsto (X, Y - aX^2)$ в аффинных координатах $X = x/z, Y = y/z$.

Обозначение 2.3. Пусть p и q — точки в \mathbb{RP}^2 и L — прямая, проходящая через q и не проходящая через p . Выберем координаты $(x : y : z)$ так, чтобы было $p = (0 : 1 : 0), q = (0 : 0 : 1), L = \{y = 0\}$. Обозначим через $h_{p,q,L}$ бирациональное квадратичное преобразование $(x : y : z) \mapsto (x^2 : xy : yz)$. В литературе по топологии вещественных алгебраических кривых это преобразование принято называть *гиперболизмом* (этот термин ввел О.Я. Виро, ссылаясь на Ньютона).

2.2. Построение некоторых расположений особой квинтики и коники.

Лемма 2.4. *Существуют расположения M -квартики C_4 относительно трех прямых L, L' и (pq) , изображенные на рис. 1.1 – 1.2.*

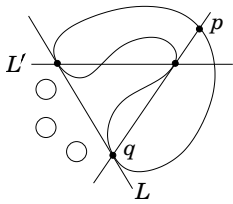


Рис. 1.1

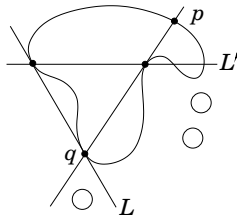


Рис. 1.2

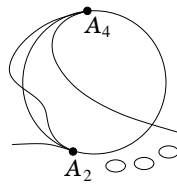


Рис. 2.1

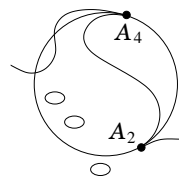


Рис. 2.2

Доказательство. Рис. 1.1 легко строится, исходя из M -квартики, полученной возмущением объединения двух коник. Построение расположения на рис. 1.2 приведено на рис. 3.1-3.3. \square

Лемма 2.5. *Существуют изображенные на рис. 2.1 – 2.2. взаимные расположения особой четырехкомпонентной квинтики C_5 с особенностями A_2 и A_4 и неособой коники C_2 (кривые имеют максимальное пересечение в особых точках).*

Доказательство. Применить $h_{p,q,L}$ к кривым из леммы 2.4. Тогда $C_4 \rightarrow C_5, L' \rightarrow C_2$. \square

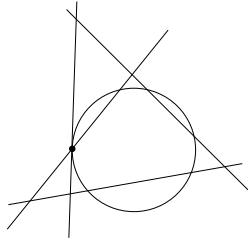


Рис. 3.1

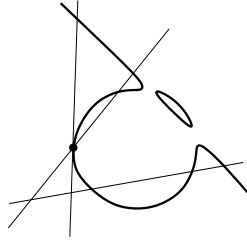


Рис. 3.2

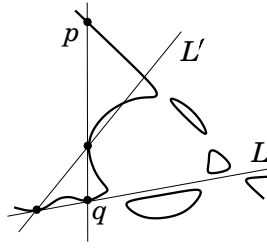


Рис. 3.3

Лемма 2.6. Пусть C — неособая M -квартика, O — один из ее овалов, L_1 — прямая, касающаяся овала O в точках p и q , и L_2 — прямая, проходящая через q и пересекающая O в четырех различных вещественных точках. Тогда C , L_1 и L_2 расположены на \mathbb{RP}^2 одним из способов, изображенных на рис. 4.1 – 4.3, причем все эти способы реализуемы.

Доказательство. Легко следует из классификации максимальных взаимных расположений кватрики и двух прямых. К тому же, рис. 4.1 и рис. 4.2 получаются из рис. 1.1 и рис. 1.2 соответственно забыванием одной из прямых и сменой обозначений. \square

Лемма 2.7. Пусть C_2 — неособая коника и C_5 — особая четырехкомпонентная квинтика, нечетная ветвь J_5 которой имеет особенность типа A_6 . Предположим, что J_5 трижды трансверсально пересекается с C_2 , а также имеет максимальное пересечение с C_2 в особой точке A_6 . Тогда C_2 и C_5 расположены на \mathbb{RP}^2 одним из способов, изображенных на рис. 5.1 – 5.3, причем все эти способы реализуемы.

Доказательство. Применить $f_{C,p}$ к конфигурациям из леммы 2.6. Тогда $C \rightarrow C_5$, $L_2 \rightarrow C_2$, $q \mapsto A_6$. \square

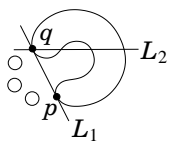


Рис. 4.1

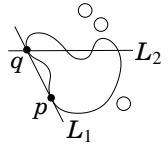


Рис. 4.2

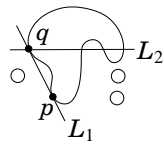


Рис. 4.3

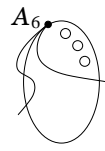


Рис. 5.1



Рис. 5.2

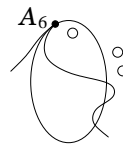


Рис. 5.3

Лемма 2.8. Существуют взаимные расположения каспидальной кубики C_3 , неособой коники C'_2 и прямых L и (pq) , изображенные на рис. 6.1 – 6.2.

Доказательство. Очевидно, что если не учитывать конику C'_2 , то требуемое расположение (оно одно и то же в обоих случаях) существует. Пусть ℓ , ℓ' , ℓ'' и ℓ_0 — линейные функции, задающие прямые L , L' , (pq) и L_0 соответственно (см. рис. 6.3). Положим $C'_2 = \{\ell'\ell'' = \varepsilon\ell\ell_0\}$, $|\varepsilon| \ll 1$. Тогда в зависимости от знака ε мы получим либо рис. 6.1, либо рис. 6.2. \square

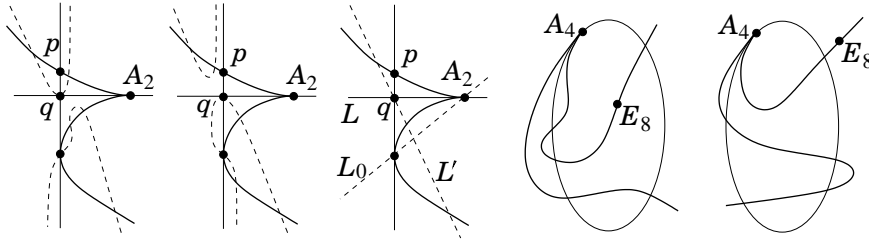


Рис. 6.1

Рис. 6.2

Рис. 6.3

Рис. 7.1

Рис. 7.2

Лемма 2.9. Существуют взаимные расположения рациональной квинтики C_5 с особенностями A_4 и E_8 и неособой коники C_2 , имеющих максимальное касание в точке A_4 , изображенные на рис. 7.1 – 7.2.

Доказательство. Применить $h_{p,q,L}$ к кривым из леммы 2.8. Тогда $C_3 \rightarrow C_5$, $C'_2 \rightarrow C_2$. \square

Определение 2.10. Обозначим через \mathcal{F}_n рациональную линейчатую поверхность (поверхность Хирцебруха) степени n , т.е. послойную компактификацию линейного расслоения $\mathcal{O}(n)$ над \mathbb{P}^1 . Поверхность \mathcal{F}_n можно покрыть аффинными координатными картами $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ с функциями перехода

$$\begin{array}{cccc} x_2 = x_1^{-1} & x_4 = x_3^{-1} & x_3 = x_1 & x_4 = x_2 \\ y_2 = y_1 x_1^{-n} & y_4 = y_3 x_3^n & y_3 = y_1^{-1} & y_4 = y_2^{-1} \end{array}$$

это торические координаты, отвечающие вееру, натянутому на векторы $(1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(-1, n)$. В этом случае координаты (x_1, y_1) мы будем называть *стандартными*. Мы будем рассматривать только ту вещественную структуру на \mathcal{F}_n , в которой стандартные координаты вещественны.

В стандартных координатах расслоение $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ является проекцией на ось x_1 . Исключительное сечение задается уравнением $y_3 = 0$ или $y_4 = 0$. Мы будем изображать $\mathbb{R}\mathcal{F}_n$ на рисунках в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами. Горизонтальные стороны отвечают исключительному сечению, а вертикальные — слою.

Бистепенью кривой C на \mathcal{F}_n будем называть пару (k, m) , где k и m — индексы пересечения со слоем $x_1 = 0$ и с сечением $y_1 = 0$.

Лемма 2.11. Пусть C , G и F — вещественные кривые бистепеней $(2, 8)$, $(1, 4)$ и $(0, 1)$ соответственно на \mathcal{F}_4 (G — сечение, а F — слой проекции $\mathcal{F}_4 \rightarrow \mathbb{P}^1$). Предположим, что C является M -кривой (т.е. у нее четыре овала), пересекающей G в восьми вещественных точках. Предположим также, что все точки пересечения лежат на одном и том же овале кривой C , и F касается C в одной из них.

Тогда C , G и F расположены на $\mathbb{R}\mathcal{F}_4$ одним из способов, изображенных на рис. 8.1 – 8.4, причем все эти способы реализуемы.

Более того, любой свободный (т.е. не пересекающийся с G) овал можно заменить на уединенную простую двойную точку.

Доказательство. Кривые на рис. 8.1 – 8.4 можно построить, например, применением T -конструкции Виро (patchwork), как это сделано в [20; §2.2], или

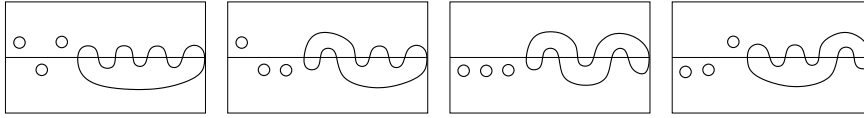


Рис. 8.1

Рис. 8.2

Рис. 8.3

Рис. 8.4

при помощи общего метода построения тригональных кривых на линейчатых поверхностях [17].

Невозможность других расположений легко следует, например, из общего алгоритма псевдоголоморфной реализуемости тригональных кривых [19].

То, что любой овал тригональной кривой может быть заменен на уединенную двойную точку с сохранением расположения остальной части кривой относительно слоев проекции $\mathcal{F}_4 \rightarrow \mathbb{RP}^1$, доказано в [17; лемма 2]. \square

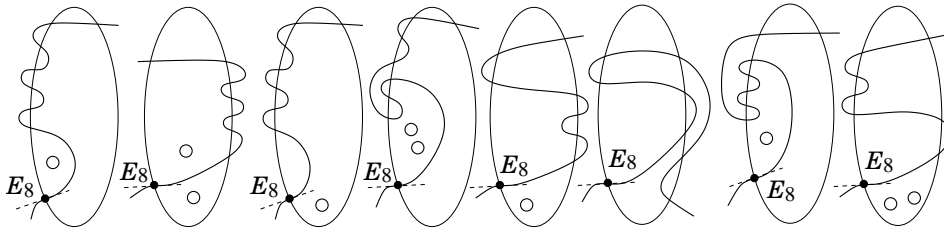


Рис. 9.1 Рис. 9.2 Рис. 9.3 Рис. 9.4 Рис. 9.5 Рис. 9.6 Рис. 9.7 Рис. 9.8

Лемма 2.12. Пусть C_2 — неособая коника и C_5 — трехкомпонентная квинтика. Предположим, что нечетная ветвь J_5 кривой C_5 имеет особенность типа E_8 , и C_2 проходит через особую точку E_8 и пересекает J_5 еще в семи точках. Тогда C_2 и C_5 расположены на \mathbb{RP}^2 одним из способов, изображенных на рис. 9.1 – 9.8, причем все эти способы реализуемы (на этих рисунках не изображены овалы квинтики, расположенные в компоненте дополнения к $C_2 \cup J_5$, замыкание которой неориентируемо).

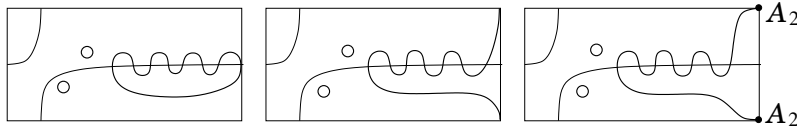


Рис. 10.1

Рис. 10.2

Рис. 10.3

Замечание. Пунктирной линией на рис. 9.1 – 9.8 изображена касательная прямая к C_5 в особой точке E_8 . Локальное расположение кривой относительно этой касательной прямой существенно при возмущении особенности E_8 .

Доказательство. Выберем одно из расположений из леммы 2.11 и стянем в простую двойную точку один из овалов. Раздуем эту точку и затем стянем собственный прообраз проходящего через нее слоя. Кривые C , G и F при этом преобразуются в кривые C' , G' и F' на \mathcal{F}_3 бистепеней $(2, 7)$, $(1, 4)$ и $(0, 1)$ соответственно. В случае выбора самого левого овала на рис. 8.1 их расположение

изображено на рис. 10.1. Теперь выполним дважды такое же преобразование в точке пересечения F' и G' . При этом кривые C' и G' отобразятся на кривые C'' и G'' на \mathcal{F}_1 бистепеней $(2, 5)$ и $(1, 2)$ соответственно, изображенные на рис. 10.3 (на рис. 10.2 изображены кривые на \mathcal{F}_2 , получающиеся после первого преобразования). Кривая C'' имеет касп (особенность типа A_2), в котором C'' имеет максимальное пересечение с исключительным сечением. Наконец, стягивая исключительное сечение, получаем требуемое расположение на $\mathbb{R}P^2$. Применяя эту конструкцию к каждому из расположений из леммы 2.11 и к каждому выбору свободного овала, получаем рис. 9.1 – 9.8. Соответствие между рисунками таково (здесь n_k означает выбор k -го слева овала на рис. 8. n):

$$\begin{aligned} 1_1 \rightarrow 9.1, & \quad 1_2 \rightarrow 9.2, & \quad 1_3 \rightarrow 9.3, & \quad 2_1 \rightarrow 9.4, & \quad \square \\ (2_2, 2_3) \rightarrow 9.5, & \quad (3_1, 3_2, 3_3) \rightarrow 9.6, & \quad (4_1, 4_2) \rightarrow 9.7, & \quad 4_3 \rightarrow 9.8. \end{aligned}$$

Лемма 2.13. *Существует взаимное расположение особой шестикомпонентной квинтики C_5 с особенностью A_2 и неособой коники C_2 , имеющих максимальное пересечение в особой точке, изображенное на рис. 11.4.*

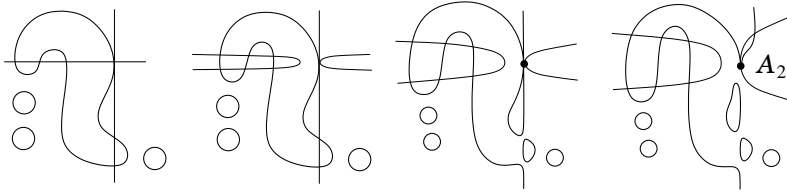


Рис. 11.1 Рис. 11.2 Рис. 11.3 Рис. 11.4

Доказательство. См. рис. 11.1 – 11.4. \square

2.3. Построение некоторых расположений особой квинтики и пары прямых.

Лемма 2.14. *Существует квинтика с особенностями A_1 и A_3 , расположенная относительно прямых L_1, L_2 как на рис. 12.1*

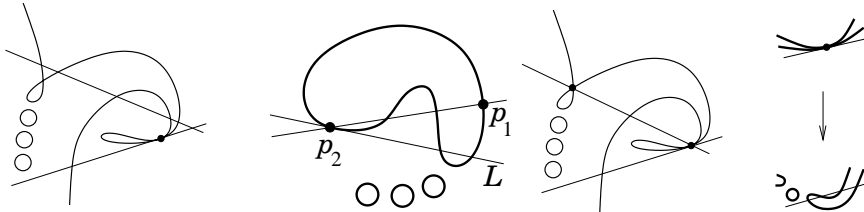


Рис. 12.1 Рис. 12.2 Рис. 12.3 Рис. 12.4

Доказательство. Рассмотрим квинтику, расположенную относительно двух прямых как на рис. 12.2, и применим к ней гиперболизм $h_{p_1, p_2, L}$. В результате получим расположение на рис. 12.3. Малым сдвигом верхней прямой из него получается рис. 12.1. \square

Второе расположение серии **9** из списка в п. 0.7 получается применением возмущения на рисунке 12.4 к рисунку 12.1.

Лемма 2.15. Существует квинтика с особенностями A_2 и E_8 , расположенная относительно прямых L_1, L_2 как на рис. 13.1.

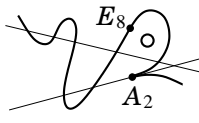


Рис. 13.1

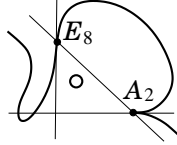


Рис. 13.2

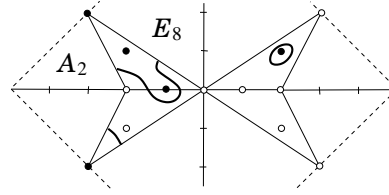


Рис. 13.3

Доказательство. При помощи T -конструкции Виро (patchworking) легко построить кривую на рис. 13.2 (соответствующее разбиение на карты см. на рис. 13.3). Попросту говоря, это означает, что кривая на рис. 13.2 задана в однородных координатах $(x:y:z)$ уравнением

$$z^5 + axz^4 + x^2z^3 + x^3y^2 - bx^2yz^2 = 0 \quad \text{при } 1 \ll a \ll b.$$

В качестве прямой L_1 выберем ось $y = 0$, а в качестве L_2 — прямую, полученную из L_1 малым поворотом по часовой стрелке вокруг точки A_2 (это точка $(1:0:0)$), а затем еще более малым сдвигом вверх. \square

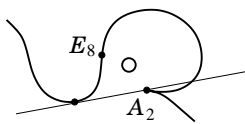


Рис. 14.1

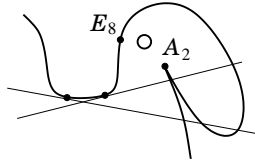


Рис. 14.2

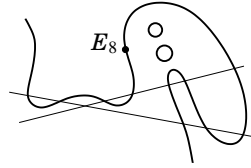


Рис. 14.3

Из рис. 13.2, вращая ось $y = 0$ (горизонтальную прямую) по часовой стрелке вокруг точки A_2 до первого касания с квинтикой, получаем рис. 14.1. Заменяя изображенную на рис. 14.1 касательную на две близкие к ней касательные, получаем рис. 14.2, возмущением которого получаем рис. 14.3.

Построение 2-го расположения из серии 15.

Рассмотрим M -квартику, полученную возмущением объединения двух коник. Пусть V — один из ее овалов, и q — точка перегиба на V . Пусть ℓ — прямая, проходящая через q и пересекающая V в четырех точках. Пусть p_1 — та из точек пересечения, для которой отрезок $[qp_1]$ лежит внутри овала V . Выберем точку p_0 на вогнутой части овала V . Рассмотрим касательную к V в точке p_0 и обозначим ее точки пересечения с V через p_2 и p_3 , причем пусть p_2 — та из них, которая ближе к точке q в том смысле, что прямая ℓ пересекает дугу qp_2 овала V только в точке q . Ясно, что каждая из прямых p_1p_0 и p_1p_2 стремится к ℓ при $p_0 \rightarrow q$. Поэтому если точка p_0 выбрана достаточно близко

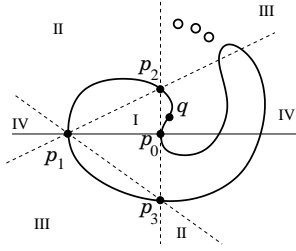


Рис. 15.1

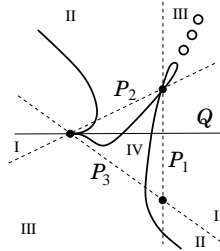


Рис. 15.2

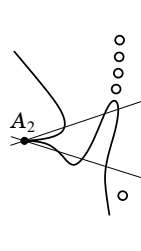


Рис. 15.3

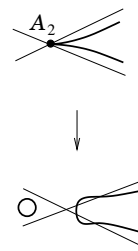


Рис. 15.4

к q , то мы получим расположение M -квартки относительно четырех прямых, изображенное на рис. 15.1.

Применяя бирациональное квадратичное преобразование с центрами в p_1, p_2, p_3 , мы получим особую квинтику с особенностями A_1, A_1 и A_2 , расположенную относительно прямых P_1, P_2, P_3, Q (являющихся образами точек p_1, p_2, p_3 и прямой p_1p_0 соответственно) как на рис. 15.2, где римскими цифрами I, ..., IV обозначено соответствие между квадрантами.

Обозначим через L_1 и L_2 прямые, проходящие через особую точку A_2 , близкие к прямой Q и расположенные от нее по разные стороны. Возмущая простые двойные точки, получим рис. 15.3. Наконец, возмутим особенность A_2 как показано на рис. 15.4.

§3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫХ
РАСПОЛОЖЕНИЙ КВИНТИКИ И ПАРЫ ПРЯМЫХ ТИПА (3,3)

Предложение 3.1. а). Пусть C_5 — вещественная псевдоголоморфная (например, алгебраическая) M -квинтика в $\mathbb{R}P^2$, и L_1, L_2 — две прямые, каждая из которых пересекает нечетную ветвь J_5 кривой C_5 в пяти различных точках. Обозначим через \mathcal{L} пучок прямых, содержащий L_1 и L_2 . Предположим, что взаимное расположение кривых C_5, L_1, L_2 имеет тип (3,3) (определение типа расположения см. в п. 0.4). Тогда C_5, L_1, L_2 расположены с точностью до изотопии как на одном из рис. 16.1–16.22, причем расположение кривой C_5 относительно пучка прямых \mathcal{L} такое, как указано в подписи к соответствующему рисунку с точностью до вставки "зигзагов" вида $C_j \supset C_{j\pm 1}$ (см. замечание 3.2).

б). Все расположения на рис. 16.1–16.22 реализуемы псевдоголоморфными кривыми, и все кроме рис. 16.12 реализуемы алгебраическими кривыми.

в). Расположение на рис. 16.12 нереализуемо алгебраически.

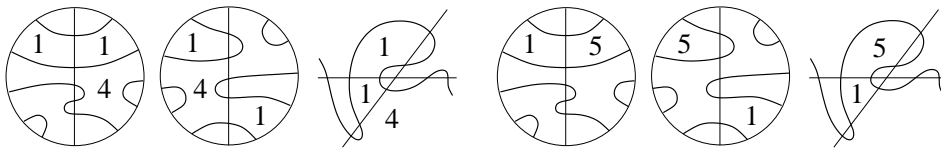


Рис. 16.1. $[\supset_1 o_3 C_1 \supset_2 o_3 o_2 o_2 o_2 o_2 C_2]$. Рис. 16.2. $[\supset_1 o_3 C_1 \supset_2 o_3 o_3 o_3 o_3 C_2]$.

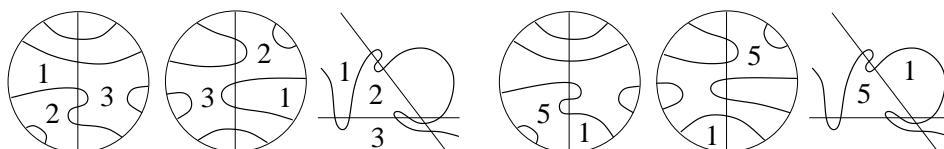


Рис. 16.3. $[\supset_1 o_1 o_1 o_2 C_1 \supset_2 o_2 o_2 o_2 C_2]$. Рис. 16.4. $[\supset_1 o_1 o_1 o_1 o_1 o_1 C_1 \supset_2 o_1 C_2]$.

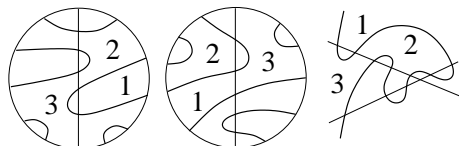


Рис. 16.5. $[\supset_1 o_1 o_1 o_1 C_1 \supset_3 o_3 o_3 o_2 C_1]$.

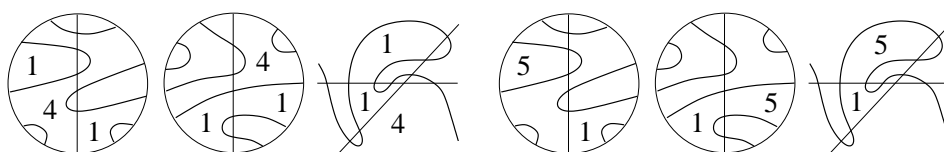


Рис. 16.6. $[\supset_1 o_2 o_1 o_1 o_1 o_1 C_1 \supset_3 o_1 C_1]$. Рис. 16.7. $[\supset_1 o_2 o_2 o_2 o_2 o_2 C_1 \supset_3 o_1 C_1]$.

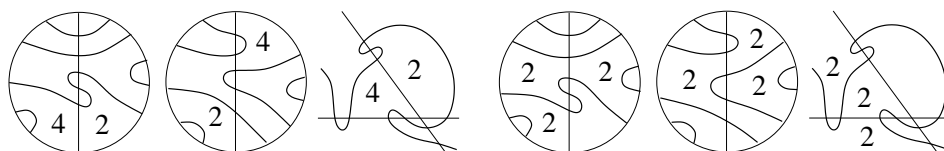


Рис. 16.8. $[\supset_1 o_1 o_1 o_1 o_1 C_2 \supset_1 o_1 o_1 C_2]$. Рис. 16.9. $[\supset_1 o_1 o_1 o_2 o_2 C_2 \supset_1 o_2 o_2 C_2]$.

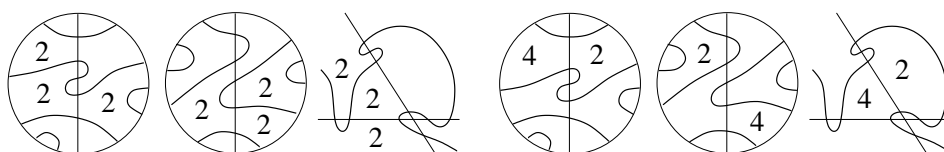
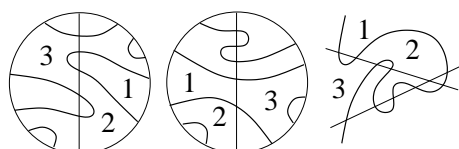


Рис. 16.10. $[\supset_1 o_3 o_3 o_2 o_2 C_2 \supset_3 o_2 o_2 C_2]$. Рис. 16.11. $[\supset_1 o_3 o_3 o_3 o_3 C_2 \supset_3 o_3 o_3 C_2]$.



(Нереализуемо алгебраически.)

Рис. 16.12. $[\supset_1 o_3 o_3 o_3 C_3 \supset_1 o_1 o_1 o_2 C_3]$.

Замечание 3.2. На рис. 16.1–16.22 мы каждое расположение представляем тремя способами. При первых двух способах \mathbb{RP}^2 разрезано вдоль одной или другой прямой. Третье представление — неформальное изображение похожее на особую кривую, возмущением которой строится данное расположение. На подписи к рисунку приведено расположение кривой C_5 относительно \mathcal{L} в ко-

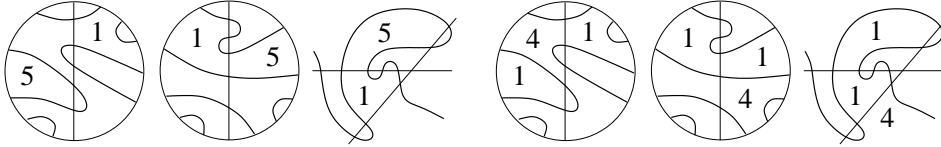


Рис. 16.13. $[\supset_1 o_2 o_2 o_2 o_2 o_2 \subset_3 \supset_1 o_3 \subset_3]$. Рис. 16.14. $[\supset_1 o_2 o_3 o_3 o_3 o_3 \subset_3 \supset_1 o_3 \subset_3]$.

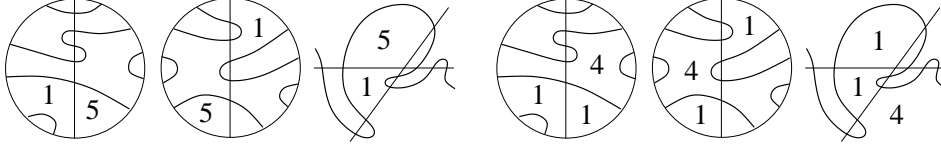


Рис. 16.15. $[\supset_1 o_1 \subset_3 \supset_2 o_1 o_1 o_1 o_1 \subset_2]$. Рис. 16.16. $[\supset_1 o_1 \subset_3 \supset_2 o_1 o_2 o_2 o_2 \subset_2]$.

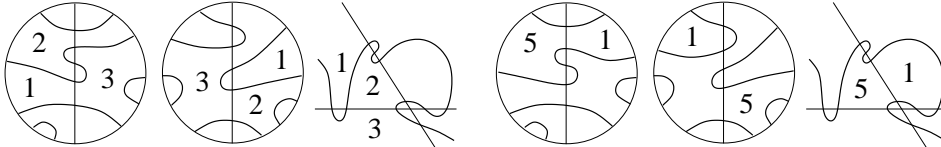


Рис. 16.17. $[\supset_1 o_3 o_3 o_2 \subset_3 \supset_2 o_2 o_2 o_2 \subset_2]$. Рис. 16.18. $[\supset_1 o_3 o_3 o_3 o_3 o_3 \subset_3 \supset_2 o_3 \subset_2]$.

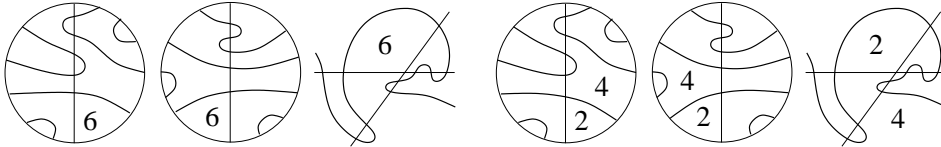


Рис. 16.19. $[\supset_1 \subset_4 \supset_2 o_1 o_1 o_1 o_1 o_1 \subset_3]$. Рис. 16.20. $[\supset_1 \subset_4 \supset_2 o_2 o_2 o_2 o_2 o_1 o_1 \subset_3]$.

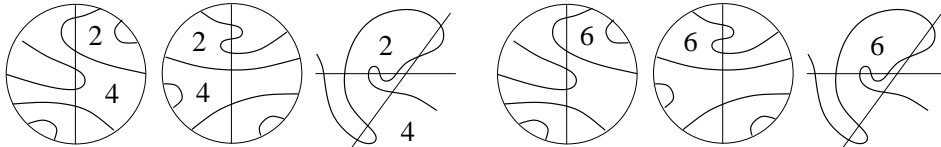


Рис. 16.21. $[\supset_1 \subset_4 \supset_2 o_2 o_2 o_2 o_2 o_3 o_3 \subset_3]$. Рис. 16.22. $[\supset_1 \subset_4 \supset_2 o_3 o_3 o_3 o_3 o_3 \subset_3]$.

дировке, описанной в [16; §2] (см. также п. 6.2 ниже), при выборе одной из прямых L_1, L_2 в качестве бесконечно удаленной. Кодировочное слово имеет вид

$$[\supset_a o_{i_1} \dots o_{i_k} \subset_b \supset_c o_{i_{k+1}} \dots o_{j_6} \subset_d]. \quad (4)$$

В зависимости от выбора прямой и ориентации на ней и на пучке прямых, возможны 8 кодирующих слов для одного и того же расположения относительно \mathcal{L} . Мы из них выбираем то, для которого вектор $[a, b, c, d]$ минимален в лексикографическом порядке. Рисунки 16.1 – 16.22 занумерованы в порядке возрастания векторов $[a, b, c, d, k, i_1, \dots, i_6]$.

Запреты.

Доказательство части а) предложения 3.1. Вектор $[a, b, c, d]$ из замечания 3.2 кодирует взаимное расположение J_5, L_1 и L_2 . Ясно, что он должен удовлетво-

рять условиям

$$1 \leq a, b, c, d \leq 4, \quad b \neq c, \quad d \neq 5 - a, \quad a + b + c + d \equiv 0 \pmod{2}. \quad (5)$$

На множестве таких векторов действует группа диэдра порядка 8, порожденная отображениями

$$[a, b, c, d] \mapsto [c, d, 5 - a, 5 - b], \quad \text{и} \quad [a, b, c, d] \mapsto [d, c, b, a]. \quad (6)$$

Векторы из одной орбиты задают то же самое взаимное расположение J_5 , L_1 и L_2 с точностью до смены ролей прямых и смены ориентации на них.

С учетом ограничений (5) и симметрий (6) имеется 8 вариантов, а именно,

$$[1, 1, 2, 2], [1, 1, 3, 1], [1, 2, 1, 2], [1, 2, 3, 2], [1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 2], [1, 4, 2, 3] \quad (7)$$

и $[1, 2, 4, 1]$. Однако последний вектор не дает связной кривой J_5 .

Из формулы комплексных ориентаций (2) следует, что M -квинтика имеет три положительных овала и три отрицательных. Из этого несложно вывести, что слово (4) должно удовлетворять условию

$$k \equiv a + b \pmod{2}. \quad (8)$$

Наконец, из теоремы Безу для вспомогательных прямых следует, что

$$\begin{array}{ll} |i_j - i_l| \leq 1 & \text{при } 1 \leq j < l \leq k \text{ или } k < j < l \leq 6, \\ |i_j - a| \leq 2, |i_j - b| \leq 2 & \text{при } 1 \leq j \leq k, \\ |i_j - c| \leq 2, |i_j - d| \leq 2 & \text{при } k < j \leq 6. \end{array} \quad (9)$$

Для каждого слова (4), где вектор $[a, b, c, d]$ — один из (7), и числа $k; i_1, \dots, i_6$ удовлетворяют ограничениям (8), (9) и $1 \leq i_j \leq 4$, мы выполнили на компьютере следующие вычисления:

- (1) Нашли косу. Все зацепления, являющиеся замыканиями полученных кос, имеют три компонента.
- (2) Проверили, равны ли нулю попарные индексы зацепления компонент.
- (3) Если да, то при помощи программы из [16; Appendix] проверили, выполняется ли неравенство Мурасуги – Тристрама.

В результате остались только те слова вида (4), которые перечислены в подписях к рис. 16.1–16.22.

Построения.

Доказательство части б) предложения 3.1.

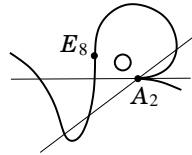


Рис. 17

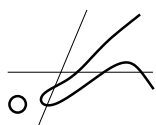


Рис. 18.1



Рис. 18.2

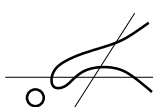


Рис. 18.3



Рис. 18.4

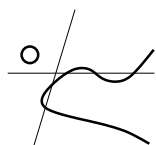


Рис. 18.5

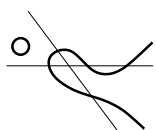


Рис. 18.6

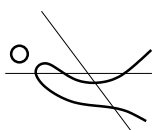


Рис. 18.7

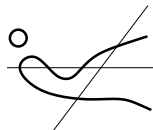


Рис. 18.8

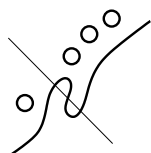


Рис. 19.1

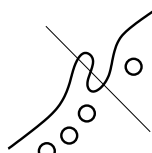


Рис. 19.2

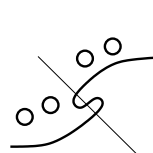


Рис. 19.3

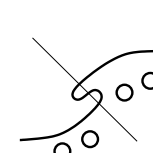


Рис. 19.4

Малым поворотом горизонтальной оси вокруг точки A_2 из рис. 13.2 получается рис. 17. Применяя к нему возмущения особой точки A_2 , изображенные на рис. 18.1–18.5 и рис. 18.8, и возмущая каждый раз E_8 двумя способами, получаем расположения на рис. 16. n при $n = 1, 2, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22$.

$$18.1 \rightarrow \begin{cases} 16.15 \\ 16.16 \end{cases} \quad 18.2 \rightarrow \begin{cases} 16.1 \\ 16.2 \end{cases} \quad 18.3 \rightarrow \begin{cases} 16.6 \\ 16.7 \end{cases}$$

$$18.4 \rightarrow \begin{cases} 16.13 \\ 16.14 \end{cases} \quad 18.5 \rightarrow \begin{cases} 16.19 \\ 16.20 \end{cases} \quad 18.8 \rightarrow \begin{cases} 16.21 \\ 16.22 \end{cases}$$

Забывая на рис. 13.1 о вертикальной прямой и применяя к нему возмущения особенности A_2 , изображенные на рис. 18.6 и 18.7, и возмущения особенности E_8 , изображенные на рис. 19.1 – 19.4, получаем расположения на рис. 16. n при $n = 3, 4, 8, 9, 10, 11, 17, 18$

$$18.6 \rightarrow (16.10, 16.11, 16.17, 16.18), \quad 18.7 \rightarrow (16.3, 16.4, 16.8, 16.9).$$

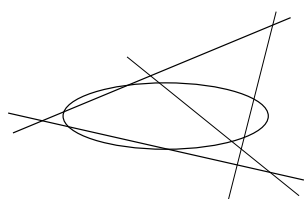


Рис. 20.1

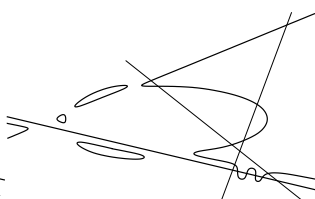


Рис. 20.2

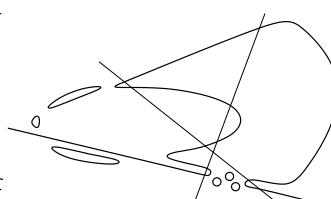


Рис. 20.3

Алгебраическая реализация расположения на рис. 16.5 приведена на рис. 20.1 – 20.3.

§4. ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ КВИНТИКИ
И ПАРЫ ПРЯМЫХ, НЕРЕАЛИЗУЕМЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ

В этом параграфе мы докажем, что расположения на рис. 21.1 – 21.3, и на рис. 16.12 реализуемы вещественными псевдоголоморфными кривыми (см. п. 4.5), но нереализуемы вещественными алгебраическими кривыми (см. пп. 4.1 – 4.4). Кроме того, в п. 4.5 мы заодно дадим псевдоголоморфную реализацию тех двух расположений, которые в списке в п. 0.7 помечены "♯* алг."

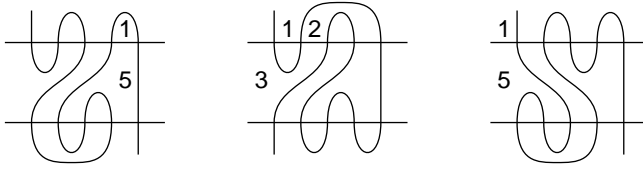


Рис. 21.1. (3-2). Рис. 21.2. (8-3). Рис. 21.3. (11-1).

4.1. Запрет расположения на рис. 21.1.

Вращая прямую L_1 вокруг точки q как показано на рис. 22.1 вплоть до первого касания с квинтикой, получим расположение на рис. 22.2. Вращая L_2 вокруг q' как показано на рис. 22.2, получим рис. 22.3, где \mathbb{RP}^2 представлена как диск с отождествленными противоположными точками границы, причем границе диска отвечает прямая L_1 . Раздувая точку p , получим рис. 22.4, где через P обозначен исключительный дивизор. Раздувая p' и затем стягивая L_1 , получим кривую C бистепени $(4, 8)$ на поверхности \mathcal{F}_2 (см. определение 2.10), изображенную на рис. 22.5. Эта кривая имеет особенность типа D_4 (простую трехкратную точку) на прямой P' . На рис. 22.5 слоям расслоения $\mathbb{R}\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ отвечают вертикальные прямые.

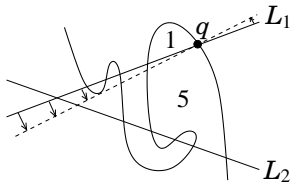


Рис. 22.1

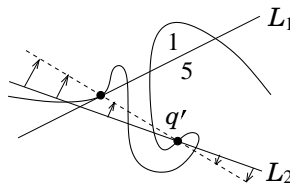


Рис. 22.2

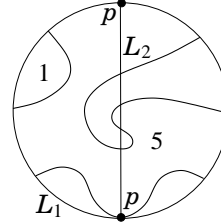


Рис. 22.3

Окончание доказательства алгебраической нереализуемости расположения на рис. 21.1 такое же, как в [22, §3]. Обозначим через k индекс самозацепления кривой C на интервале пучка вертикальных прямых, отвечающем серому

4.2. Запрет расположения на рис. 21.2.

Поворотом прямой вокруг точки p , как показано на рис. 24, из рис. 21.2 получаются последовательно рис. 16.12 и рис. 16.5. Алгебраическая нереализуемость расположения на рис. 16.12 доказана в п. 4.4 (заметим, что расположение на рис. 16.5 реализовано алгебраически в конце §3).

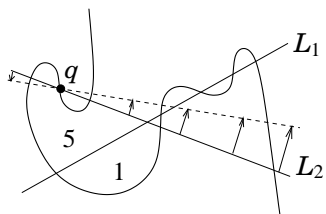


Рис. 23

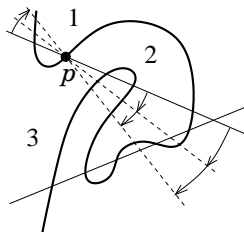


Рис. 24

4.3. Запрет расположения на рис. 21.3.

Вращая прямую L_1 вокруг точки q как показано на рис. 23, из расположения на рис. 21.3 получаем расположение на рис. 21.1, алгебраическая нереализуемость которого доказана в п. 4.1.

4.4. Запрет расположения на рис. 16.12.

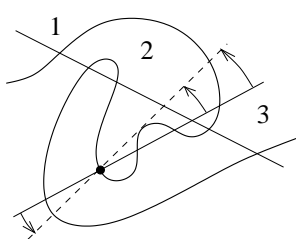


Рис. 25.1

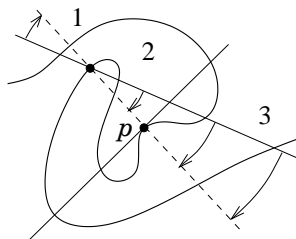


Рис. 25.2

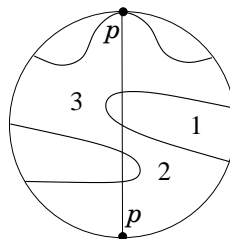


Рис. 25.3

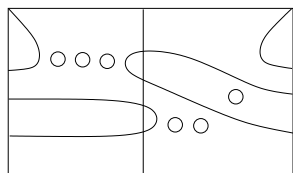


Рис. 25.4

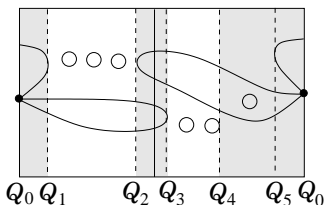


Рис. 25.5

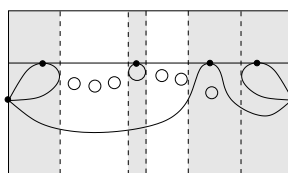


Рис. 25.6

После предварительных манипуляций, изображенных на рис. 25.1 – 25.5, и аналогичных тем, которые были проделаны в начале п. 4.1, мы получаем алгебраическую кривую C бистепени $(4, 8)$ на поверхности Хирцебруха \mathcal{F}_2 , изображенную на рис. 25.5. Эта кривая имеет особенность типа D_4 (простая тройная точка). Тот факт, что правые три овала расположены именно в этом

порядке относительно слоев расслоения $\mathbb{R}\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ (на рис. 25.5 слоям соответствуют вертикальные прямые), следует из того, что в противном случае получилось бы слишком много вещественных точек пересечения кривой C со вспомогательной прямой (т.е. с кривой бистепени $(1, 2)$), проходящей через тройную точку и через два из этих трех овалов.

Пусть R и L — кубическая резольвента и ось (the core) кривой C . Это кривые бистепеней $(3, 12)$ и $(1, 4)$ соответственно на поверхности Хирцебруха \mathcal{F}_4 . Их определение и основные свойства см. в [22; §3]. Напомним только, что все точки пересечения кривой R с осью L являются точками касания, причем их абсциссы (т.е. координаты проекций на \mathbb{P}^1) являются корнями многочлена $a_3(x)$, где через $y^4 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x)$, как и в п. 4.1, обозначен многочлен, задающий кривую C в стандартных координатах на \mathcal{F}_2 .

Из [22; лемма 3.3] следует, что кривая R расположена относительно слоев как показано на рис. 25.6, и что она расположена ниже (в смысле *нестрогих* неравенств) оси L . Более того, из леммы 4.2 (см. п. 4.1) следует, что на каждом интервале, соответствующем серому прямоугольнику на рис. 25.5, ограниченному пунктирными линиями, имеется нечетное число корней многочлена $a_3(x)$. Поэтому в каждом сером прямоугольнике на рис. 25.6 имеется нечетное число точек касания кривых R и L . По причине, объясненной в замечании 4.5, достаточно рассмотреть случай, когда в каждом сером прямоугольнике имеется только одна точка касания, и других вещественных касаний нет, т.е. когда R расположена относительно L как на рис. 25.6.

Таким образом, алгебраическая нереализуемость расположения на рис. 16.12 вытекает из следующего предложения (с учетом замечания 4.5).

Предложение 4.3. *Предположим, что R и L — вещественные алгебраические кривые на $\mathbb{R}\mathcal{F}_4$ бистепени $(3, 12)$ и $(1, 4)$ соответственно, такие что все (в том числе и невещественные) точки пересечения R и L являются точками касания, и кривая R имеет особенность типа D_4 . Тогда взаимное расположение R и L не может быть таким, как изображено на рис. 25.6.*

Доказательство. Род кривой R равен семи (число целых точек в треугольнике $(0,0)$ - $(9,0)$ - $(0,3)$). Из этого следует, что кривая R разбивающая, в частности она обладает комплексными ориентациями.

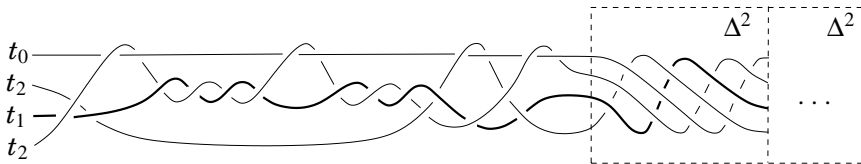


Рис. 26.

Пусть b — коса, отвечающая приводимой кривой $A = R \cup L$. Мы имеем

$$b = \underbrace{(\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1})}_{D_4} \underbrace{(\sigma_3^{-2})}_{A_3} \sigma_1^{-4} \underbrace{(\sigma_3^{-2})}_{A_3} \sigma_1^{-3} \tau_{2,1} \underbrace{(\sigma_3^{-2})}_{A_3} \sigma_1^{-1} \tau_{1,2} \underbrace{(\sigma_3^{-2})}_{A_3} \Delta^4, \quad (10)$$

где $\tau_{2,1} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 = \tau_{1,2}^{-1}$ и $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ (см. рис. 26).

Обозначим через $\pi : \mathbb{C}\mathcal{F}_4 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ стандартную проекцию. Пусть H° — одна из компонент дополнения $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^1$, а именно, та, которая индуцирует на $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ ориентацию, отвечающую направлению слева направо на рис. 25.6, и пусть $H \subset H^\circ$ — замкнутый диск, достаточно близкий к H° . Обозначим $N = \pi^{-1}(H) \cap \mathbb{C}\mathcal{A}$. Тогда замыкание \hat{b} косы b — это край поверхности N . Пусть $N_R = N \cap \mathbb{C}\mathcal{R}$ и $N_0 = N \cap \mathbb{C}\mathcal{L}$.

Из подсчета эйлеровых характеристик и индексов зацепления компонент косы видно, что N_R имеет две компоненты связности, одна из которых (обозначим ее через N_1) взаимно однозначно проектируется на H , а другая (обозначим ее через N_2) двулистно накрывает H с единственной точкой ветвления. При этом N_1 не пересекается с N_0 , а N_2 имеет простое касание с N_0 в единственной точке. Положим $L_j = \partial N_j$, $j = 0, 1, 2$.

Из этого следует, что коса b должна представляться в виде

$$b = (a_1 \sigma_1 a_1^{-1})(a_2 \sigma_1^4 a_2^{-1}). \quad (11)$$

Более того, имеет место следующее уточнение представления (11). Пусть $\hat{B}_{1,1,2} = \hat{B}_{1,1,2}(t_0, t_1, t_2)$ — группоид крашенных кос, введенный в [15]. Раскрасим нити косы b в цвета t_0, t_1, t_2 согласно разбиению зацепления \hat{b} на компоненты $\hat{b} = L_0 \sqcup L_1 \sqcup L_2$. Тогда $b \in G = \text{Aut}(t_2, t_1, t_2, t_0)$, и вышеприведенное описание взаимного расположения поверхностей N_0, N_1, N_2 означает, что b имеет вид $b = b_1 b_4$, где крашенная коса b_1 сопряжена в группоиде кос элементу

$$\sigma_1 : (t_2, t_2, t_0, t_1) \rightarrow (t_2, t_2, t_0, t_1),$$

(т.е. косе σ_1 , у которой первые две нити раскрашены в цвет t_2), а b_4 — элементу

$$\sigma_1^4 : (t_0, t_1, t_2, t_2) \rightarrow (t_0, t_1, t_2, t_2).$$

Покажем, что это невозможно для косы (10). Обозначим через ρ представление Бурау группоида $\hat{B}_{1,1,2}$, описанное в [15], где в качестве значения параметров выберем $t_0 = t_2 = -\tau$, $t_1 = \tau^2$, где $\tau = (-1 + i\sqrt{3})/2$ — примитивный корень из единицы третьей степени. Тогда $\rho(b_4)$ имеет собственные значения $(1, 1, t_0^2 t_1^2) = (1, 1, \tau^6) = (1, 1, 1)$. Более того, легко проверить, что $\rho(b_4)$ — единичная матрица. Это значит, что $b = b_1 b_4$ влечет $\rho(b) = \rho(b_1)$. Последнее невозможно, так как $\rho(b_1)$ должно иметь собственные значения $(1, 1, -t_0) = (1, 1, \tau)$, в то время как непосредственное вычисление показывает, что $\rho(b)$ имеет собственные значения $(\alpha, \tau\alpha, \tau^2\alpha)$, где $\alpha^3 = \tau$. При вычислении $\rho(b)$ (особенно если это делать вручную) удобно воспользоваться тем фактом, что при любом выборе параметров $\rho(\Delta^2)$ — всегда скалярная матрица (см. также замечание 4.7 ниже). \square

Замечание 4.4. В терминах кубических резольвент приведенное в п. 4.1 доказательство алгебраической нереализуемости кривой на рис. 21.1 означает следующее: из топологических свойств расположения кривой на рис. 22.5 относительно пучка прямых следует, что R и L имеют не менее $(2|k| - 1) + 2 = 7$ точек касания. Это противоречит тому, что индекс пересечения этих дивизоров на \mathcal{F}_4 равен 12.

Замечание 4.5. Лемма 4.2 однозначно определяет только четность числа корней многочлена $a_3(x)$ на каждом интервале, ограниченном вертикальными касательными кривой C . При выборе косы мы всегда выбирали минимально возможное значение для этих чисел, равное нулю или единице. Что будет, если выбрать большее значение? Ясно, что тогда появятся две последовательные точки касания, ничем не разделенные. Это значит, что в слово, задающее косу b , в некоторых местах будет вставлен фрагмент σ_3^{-4} . Тем самым, все последующие рассуждения останутся в силе.

Замечание 4.7. Для вычисления матриц Бурау крашенных кос можно использовать формулы, приведенные в [15]. Однако вычисления становятся несколько проще при переходе к другому базису (см. замечание 4.8). В этом случае можно перемножать матрицы 3×3 вместо матриц 4×4 . Пусть

$$b = \sigma_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{j_n}^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_\nu \in \{-1, +1\},$$

— коса из m нитей, раскрашенных в цвета t_{i_1}, \dots, t_{i_m} по левому краю и, следовательно, в цвета $t_{i_{\pi(1)}}, \dots, t_{i_{\pi(m)}}$ по правому краю, где π — перестановка, задаваемая косой b . Тогда

$$\rho(b) = S_{j_1}(t_{k_1})^{\varepsilon_1} \dots S_{j_n}(t_{k_n})^{\varepsilon_n},$$

где t_{k_ν} — цвет нити, проходящей снизу (в смысле проходов/переходов) при ν -ом пересечении, то есть

$$k_\nu = \begin{cases} \pi_{\nu-1}^{-1}(j_\nu) = \pi_{\nu-1}^{-1}(j_\nu + 1), & \varepsilon_\nu = +1, \\ \pi_{\nu-1}^{-1}(j_\nu + 1) = \pi_{\nu-1}^{-1}(j_\nu), & \varepsilon_\nu = -1, \end{cases}$$

(здесь через π_ν обозначена перестановка, задаваемая косой $\sigma_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$), а через $S_j(t)$ обозначена $(m-1) \times (m-1)$ -матрица, получающаяся вычеркиванием первых и последних строк и столбцов из $(m+1) \times (m+1)$ -матрицы

$$I_{j-1} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{m-j-1}$$

(здесь через I_p обозначена единичная $p \times p$ -матрица, а через $A \oplus B$ — блочно-диагональная матрица из блоков A и B).

Например, для проверки доказательства предложения 4.1 надо проделать следующие матричные вычисления. Положим $S_j = S_j(t_0) = S_j(t_2) = S_j(-\tau)$ и $T_j = S_j(t_1) = S_j(\tau^2)$, т.е.

$$S_1 = \begin{pmatrix} \tau & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tau & \tau & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\tau & \tau \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -\tau^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau^2 & -\tau^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau^2 & -\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. рис. 26)

$$\begin{aligned} \rho(b) &= T_1^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1} S_3^{-2} (S_2^{-1} T_2^{-1})^2 S_3^{-2} (S_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1}) S_1^{-1} S_2 T_1^{-1} S_3^{-2} S_2^{-1} T_1 S_3^{-2} \times \\ &\quad \times (S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3 (S_1 S_2 S_3)^2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & \tau & 1 \\ \tau & -\tau^2 & -2\tau \\ -\tau^2 & 0 & -\tau \end{pmatrix}, \\ \rho(b_1) &\sim S_1, \quad \text{и} \quad \rho(b_4) \sim S_1 T_1 S_1 T_1 = I. \end{aligned}$$

Для ускорения вычисления матрицы $\rho(b)$ удобно воспользоваться следующими тождествами (напомним, что $\tau^3 = 1$ и $\tau^2 = -\tau - 1$): $(S_2^{-1} T_2^{-1})^2 = I$ (а следовательно, также $S_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} = T_2$) и $\rho(\Delta^2) = S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3 (S_1 S_2 S_3)^2 = -\tau^2 I$.

Замечание 4.8. Говоря в предыдущем замечании о замене базиса в построенном в [15] представлении Бурау группоида крашенных кос, мы допустили некоторую вольность речи. Напомним, что группоид — это категория с обратимыми морфизмами, а его представление — функтор в категорию модулей над некоторым кольцом. Представление Бурау определено в [15] как функтор, сопоставляющий каждому объекту группоида крашенных кос (т.е. каждой перестановке цветов) один и тот же свободный модуль V . Матрицы, приведенные в [15], являются матрицами образов морфизмов группоида (т.е. крашенных кос) относительно одного и того же базиса модуля V . Так вот, в действительности *не существует* такого базиса модуля V , в котором матрицы образов кос принимают вид, описанный в замечании 4.7. Однако если разным объектам группоида сопоставить разные копии модуля V , то в каждой копии можно сделать свою замену базиса так, что получатся матрицы, приведенные в замечании 4.7.

4.5. Построение псевдоголоморфных расположений.

Предложение 4.9. *Расположения на рис. 21.1–21.3, на рис. 16.12 и на рис. 27.1–27.2 реализуются вещественными псевдоголоморфными квинтикой и парой прямых.*

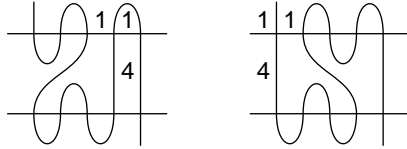


Рис. 27.1. (6-7). Рис. 27.2. (18-5).

Доказательство. Несложно проверить, что коса b , заданная в п. 4.1, тривиальна при $k = -3$. Действительно,

$$\begin{aligned} b^{-1} &= \Delta^{-2} \delta \sigma_1^2 \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 = \Delta^{-2} \delta \sigma_1 \sigma_3 \underbrace{(\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2)}_{\Delta} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \\ &= (\Delta^{-2} \sigma_2) (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \Delta) \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = (\sigma_2 \Delta^{-2}) \underbrace{(\Delta \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1)}_{\Delta} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Из этого следует псевдоголоморфная реализуемость расположения на рис. 21.1. Псевдоголоморфная реализуемость рис. 21.3 эквивалентна реализуемости рис. 21.1, поскольку коса, отвечающая пучку с центром в точке q (см. рис. 23), одна и та же в обоих случаях.

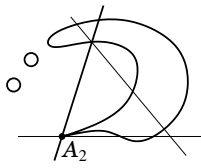


Рис. 28.1

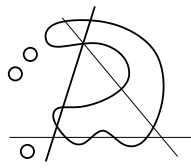


Рис. 28.2

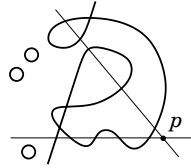


Рис. 28.3

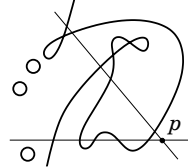


Рис. 28.4

Для псевдоголоморфной реализуемости рис. 21.2 можно было бы просто предъявить квазиположительное представление косы данной кривой относительно какого-нибудь пучка, оставив читателю проверку тождества в группе кос. Однако мы дадим геометрическое построение, не требующее никаких вычислений. Оно изображено на рисунках 28.1–28.4. Возмущением двойной коники легко построить алгебраическую каспидальную кваттику, расположенную относительно трех прямых как на рис. 28.1. Затем последовательными возмущениями получаем рис. 28.2 и рис. 28.3 (оставаясь в классе алгебраических кривых). Далее, из псевдоголоморфной реализуемости рис. 28.3 следует псевдоголоморфная реализуемость рис. 28.4, поскольку они задают одну и ту же косу относительно пучка прямых с центром в точке p . Наконец, из рис. 28.4 возмущением двойных точек квинтики получается рис. 21.2.

Псевдоголоморфная реализация расположений на рис. 16.5 и 16.12 получается из рис. 21.2 вращением одной из прямых как показано на рис. 24 (см. п. 4.2).

Наконец, чтобы получить псевдоголоморфную реализацию расположений на рис. 27.1 – 27.2, заметим, что коса b отвечает не только кривой, изображенной на рис. 22.5, но и кривой, полученной из нее удалением одного из пяти овалов между прямыми Q_3 и Q_4 и заменой трех нижних точек пересечения с прямой Q_3 на особенность типа A_2 , касающуюся прямой Q_3 . Возмущая эту особенность, мы получим рис. 27.1. Из него можно получить рис. 27.2.

§5. ВЫРОЖДЕНИЕ КОНИКИ В ПАРУ ПРЯМЫХ

Пусть O — простая замкнутая кривая, разбивающая \mathbb{RP}^2 на диск D и лист Мёбиуса M . Пусть C — гладкая вещественная кривая на \mathbb{RP}^2 , a и b — две точки на O , не лежащие на C , и γ — одна из двух дуг на которые a и b разбивают кривую O . Будем говорить, что дуга γ *минимальна относительно C внутри O* (соответственно, *вне O*), если любой путь γ' из a в b , лежащий в D (соответственно, лежащий в M , и гомотопный в M пути γ), имеет не меньше точек пересечения с кривой C , чем путь γ .

Предложение 5.1. Пусть C_2 и C_n неособые вещественные алгебраические кривые на \mathbb{RP}^2 степеней 2 и n соответственно, имеющие $2n$ вещественных точек пересечения. Предположим, что выполнено следующее условие.

- (*) Существуют точки a, b, c, d , лежащие на C_2 в этом циклическом порядке, такие что дуги ab и cd минимальны относительно C_n внутри

C_2 , а дуги bc и da минимальны относительно C_n вне C_2 .

Тогда взаимное расположение кривых C_2 и C_5 изотопно взаимному расположению кривых C'_2 и C_5 , где C'_2 получено возмущением объединения двух прямых, каждая из которых имеет n вещественных точек пересечения с кривой C_n .

Точно такое же утверждение имеет место для вещественных псевдоголоморфных кривых.

Доказательство. Рассмотрим пучок коник, проходящих через a, b, c, d . \square

Пусть C_2 и C_5 — коника и M -квintика, имеющие 10 вещественных точек пересечения, лежащих на нечетной ветви J_5 кривой C_5 . Напомним, что понятие *прохода через бесконечность* определено в п. 0.4, а понятие гнезда из дуг внутри (вне) овала определено в п. 0.1 перед формулировкой теоремы 3.

Следствие 5.2. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

- (1) *есть не менее трех проходов через бесконечность;*
- (2) *есть гнездо глубины 5 внутри C_2 , образованное дугами кривой C_5 ,*
- (3) *есть два непересекающихся гнезда вне C_2 , образованных дугами кривой C_5 ,*
- (4) *J_5 и C_2 расположены как на одном из рис. 29.1 – 29.2 (номера 16, 18 по списку из п. 0.5).*

Тогда выполнено условие (*), и значит $C_5 \cup C_2$ вырождается в объединение квинтики и пары прямых.

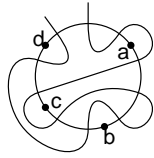


Рис. 29.1.

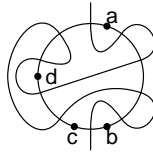


Рис. 29.2.

Доказательство. Опишем для каждого из случаев (1) – (4), как надо выбрать точки a, b, c, d , чтобы выполнялось условие (*). Обозначим через D и M внутреннюю и внешнюю части дополнения к C_2 .

(1). Имеется пять дуг кривой C_5 , лежащих вне C_2 , с концами на C_2 . Если все они проходят через бесконечность (т.е. не равны нулю в $H_1(M, C_2)$), то условие (*) выполнено для любого выбора точек a, b, c, d , при котором дуги ab и cd не пересекаются с кривой C_5 . В противном случае имеется две дуги α_1, α_2 кривой C_5 , реализующие нулевой класс в $H_1(M, C_2)$. Обозначим через D_j диск, отсекаемый от M дугой α_j , и пусть $\beta_j = C_2 \cap (\partial D_j)$. Выберем $a, b \in \beta_1$ и $c, d \in \beta_2$.

(2). Пусть $D_1 \subset \dots \subset D_5$ — диски, участвовавшие в определении гнезда, т.е. такие что $D \cap (\partial D_j) \subset C_5$, $j = 1, \dots, 5$. Выберем $b, c \in C_2 \cap D_1$ и $a, d \in C_2 \setminus D_5$.

(3). Обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ внешние дуги кривой C_5 , образующие гнезда, и пусть D_j — диск, отсекаемый от M дугой α_j . Положим $\beta_j = C_2 \cap (\partial D_j)$. Пусть $D_1 \subset D_2$ и $D_3 \subset D_4$. Из теоремы Безу для вспомогательной прямой

легко следует, что гнездо глубины три невозможно, следовательно, $D_2 \cap D_4 = \emptyset$. Выберем $a, b \in \beta_1$ и $c, d \in \beta_3$.

(4). Выберем a, b, c, d как показано на рис. 29.1 – 29.2. \square

Таким образом, если выполнено одно из условий (1) – (4) из следствия 5.2, то псевдоголоморфными (соответственно, алгебраическими) кривыми реализуемы те и только те расположения, которые получаются возмущением объединения квинтики и пары прямых.

§6. КЛАССИФИКАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЙ $C_5 \cup C_2$
СЕРИЙ, К КОТОРЫМ НЕПРИМЕНИМО СЛЕДСТВИЕ 5.2

6.1. Перечисление подлежащих рассмотрению расположений $J_5 \cup C_2$.

Мы пока будем рассматривать только те расположения $C_2 \cup J_5$, которые не удовлетворяют условиям (1) – (4) следствия 5.2, а классификацию остальных естественно отложить до завершения классификации расположений квинтики и пары прямых (см. п. 0.4). Кроме того, можно не рассматривать расположения, противоречащие теореме Безу для вспомогательных прямых, в частности, имеющие гнездо из внешних дуг J_5 глубины более двух. С точностью до симметрии имеется 24 таких расположения. Это расположения, идущие в списке в п. 0.5 под номерами **1–15, 17, 19, 22–25, 29, 32, 33**.

В этом несложно убедиться непосредственно, либо можно воспользоваться списком расположений $J_5 \cup C_2$ с одним проходом через бесконечность, не противоречащих теореме Безу для вспомогательных прямых, приведенным в [7]. Для удобства читателя приведем таблицу соответствия между номерами в п. 0.5 (**1, 2, ...**) и номерами в [7] ($M1, M2, \dots$):

| | | | | | | | | | | | |
|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|
| 1 | $M30$ | 12 | $M21$ | 23 | $M2$ | $M1$ | 9 | $M12$ | 20 | $M23$ | 33 |
| 2 | $M33$ | 13 | $M3$ | 24 | $M20$ | $M2$ | 23 | $M13$ | 21 | $M24$ | 6 |
| 3 | $M18$ | 14 | $M6$ | 25 | $M10$ | $M3$ | 13 | $M14$ | 26 | $M25$ | 19 |
| 4 | $M28$ | 15 | $M26$ | 26 | $M14$ | $M4$ | 17 | $M15$ | 30 | $M26$ | 15 |
| 5 | $M32$ | 16 | $M27$ | 27 | $M16$ | $M5$ | 28 | $M16$ | 27 | $M27$ | 16 |
| 6 | $M24$ | 17 | $M4$ | 28 | $M5$ | $M6$ | 14 | $M17$ | 29 | $M28$ | 4 |
| 7 | $M31$ | 18 | $M9$ | 29 | $M17$ | $M7$ | 10 | $M18$ | 3 | $M29$ | 8 |
| 8 | $M29$ | 19 | $M25$ | 30 | $M15$ | $M8$ | 22 | $M19$ | 11 | $M30$ | 1 |
| 9 | $M1$ | 20 | $M12$ | 31 | $M11$ | $M9$ | 18 | $M20$ | 24 | $M31$ | 7 |
| 10 | $M7$ | 21 | $M13$ | 32 | $M22$ | $M10$ | 25 | $M21$ | 12 | $M32$ | 5 |
| 11 | $M19$ | 22 | $M8$ | 33 | $M23$ | $M11$ | 31 | $M22$ | 32 | $M33$ | 2 |

6.2. Расположения с гнездом внешних дуг.

Пусть C_2 и C_5 — коника и M -квинтика, такие что нечетная ветвь квинтики J_5 пересекает C_2 в десяти точках. Пусть D (диск) и M (лист Мёбиуса) — области, на которые коника C делит \mathbb{RP}^2 . Предположим, что вне C_2 имеется гнездо из дуг квинтики с концами на C_2 , т.е. существуют дуги α_1 и α_2 , отсекающие от M диски D_1 и D_2 , такие что $D_1 \subset D_2$. Выберем точку $p \in D_1 \cap C_2$ и обозначим через \mathcal{L}_p пучок прямых, проходящих через p . Обозначим через $L_\infty \in \mathcal{L}_p$ касательную к C_2 в точке p . Выберем аффинные координаты (x, y) , в которых L_∞ — бесконечно удаленная прямая, \mathcal{L}_p — пучок вертикальных прямых $x = \text{const}$, и C_2 — парабола $y = x^2$.

Для расположений кривой $C = C_5 \cup C_2$ относительно пучка \mathcal{L}_p мы будем использовать кодировку, введенную в [13] (и используемую в [14, 16, 20, 9] и в §3). А именно, такие расположения будем кодировать словом, составленным из символов C_k, \supset_k, \times_k , которые обозначают соответственно точку минимума и максимума координаты x и двойную точку на кривой C . Во всех трех случаях индекс k обозначает высоту соответствующей точки. Это значит, что вертикальная прямая, проходящая через данную точку, имеет $k - 1$ трансверсальных пересечений с C , имеющих строго меньшую y -координату. Подслово $C_k \supset_k$ сокращается до o_k .

Коса, отвечающая некоторому расположению кривой C относительно \mathcal{L}_p , имеет вид $b = b_{\mathbb{R}} b_{\infty}$, где $b_{\mathbb{R}}$ вычисляется исходя из кодирующего слова по тем же правилам, которые сформулированы в [13] для случая $p \notin C$, но при этом $b_{\infty} = \Delta \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_6$ (вместо $b_{\infty} = \Delta$, как это бывает при $p \notin C$).

С учетом сделанных выше предположений нам достаточно рассмотреть лишь расположения, перечисленные в первых двух столбцах таблицы 1 (в первом столбце указан номер по списку в п. 0.5, а во втором — номер согласно [7]). Тогда с точностью до устранения зигзагов (вычеркивания подслов вида $C_j \supset_{j \pm 1}$) расположение кривой C относительно \mathcal{L}_p кодируется словом приведенным в третьем столбце таблицы 1, где переменные u_1, u_2, u_3 должны быть заменены на последовательности вида $o_{i_1} o_{i_2} \dots$ суммарной длины 6.

При забывании коники C_2 остается квинтика, код расположения которой относительно \mathcal{L}_p имеет вид либо $[\supset_3 o_{i_1} \dots o_{i_6} C_4]$, либо $[\supset_3 o_{i_1} \dots o_{i_k} C_3 \supset_4 o_{i_{k+1}} \dots o_{i_6} C_4]$, причем индексы i_1, \dots, i_k вычисляются исходя из кодирующего слова для C применением очевидных правил пересчета.

Среди слов такого вида расположение M -квинтики относительно пучка прямых могут кодировать только

$$[\supset_3 o_2^6 C_4], \quad [\supset_3 o_3^4 o_2^2 C_4], \quad [\supset_3 o_3^4 o_4^2 C_4], \quad [\supset_3 o_4^6 C_4]$$

и

$$[\supset_3 o_3^4 o_2 C_3 \supset_4 o_2 C_4], \quad [\supset_3 o_2^5 C_3 \supset_4 o_2 C_4], \quad [\supset_3 o_3^3 C_3 \supset_4 o_3 o_4^2 C_4], \quad [\supset_3 o_4 C_3 \supset_4 o_4^5 C_4].$$

В первом случае это легко следует из классификации аффинных квинтик и из теоремы Безу для вспомогательных прямых, а во втором случае это доказано в §3.

Поэтому в словах из таблицы 1 достаточно рассматривать только те значения параметров, при которых при удалении коники получается одно из этих восьми слов. К тому же, поскольку \times_3 коммутирует с o_j при $j \neq 4$, в тех словах, где имеются фрагменты вида $u_{\nu-1} \times_3^{\alpha} u_{\nu}$, достаточно рассматривать только те случаи, когда u_{ν} начинается с o_4 .

Для всех таких слов мы проверили на компьютере неравенство Мурасуги-Тристрама для обычной сигнатуры (см. подробности в [13, 16]). Те случаи, для которых это неравенство выполнено, перечислены в последней колонке таблицы 1, где выражение $[i_1 \dots i_k][i_{k+1} \dots i_m] \dots$ означает, что $u_1 = o_{i_1} \dots o_{i_k}$, $u_2 = o_{i_{k+1}} \dots o_{i_m}, \dots$; причем если в кодирующем слове есть параметры α и

Таблица 1.

| | | | |
|-----|-----|---|---|
| 3. | M18 | $[\times_5 \times_4^6 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5^2]$ | $[434422] \square, [433355] \square, [555][455]$ |
| 4. | M28 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 C_3 \times_4^5 \supset_5 u_2 C_4 \times_5^2]$ | $[334][355], [5][45555]$ |
| 5. | M32 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{5-\alpha} u_3 C_4 \times_5^2]$ | $[344422] \square \square, [333]_4 [455]_1 \square, [343355] \square \square,$ $\square_1 [455555]_4 \square, [55] \square [4555]$ |
| 6. | M24 | $[\times_5 \times_4 \times_3^5 \supset_4 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5^2]$ | $[344422] \square, [343355] \square, \square [455555]$ |
| 9. | M1 | $[\times_5 \times_4^4 \supset_3 u_1 C_3 \times_4^3 \supset_5 u_2 C_4 \times_5^2]$ | $[444][355], [5][44455]$ |
| 10. | M7 | $[\times_5 \times_4^4 \supset_3 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{3-\alpha} u_3 C_4 \times_5^2]$ | $[444433] \square \square, [443355] \square \square, [55] \square [4455]$ |
| 11. | M19 | $[\times_5 \times_4^4 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5 \times_4^2 \times_5]$ | $[433322] \square, [4333][44], [555][444]$ |
| 12. | M21 | $[\times_5 \times_4^4 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5^4]$ | $[4333][45], [555][445]$ |
| 13. | M3 | $[\times_5 \times_4 \times_3^2 \times_4 \supset_3 u_1 C_3 \times_4^3 \supset_5 u_2 C_4 \times_5^2]$ | $[344][355]$ |
| 14. | M6 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{3-\alpha} u_3 \times_4 \times_5^4]$ | $[4433][45], [55][4445]$ |
| 15. | M26 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{3-\alpha} u_3 C_4 \times_5 \times_4^2 \times_5]$ | $[4433] \square [44], [55] \square [4444]$ |
| 17. | M4 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 C_3 \times_4^3 \supset_5 u_2 C_4 \times_5^4]$ | $[444][345], [5][44445]$ |
| 19. | M25 | $[\times_5 \times_4 \times_3^3 \supset_4 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5^4]$ | $[3333][45], \square [444445]$ |
| 22. | M8 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{2-\alpha} C_3 \times_4^3 \supset_5 u_3 C_4 \times_5^2]$ | $[5] \square [44555]$ |
| 23. | M2 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 C_3 \times_4 \times_3^2 \times_4^2 \supset_5 u_2 C_4 \times_5]$ | $[333][355]$ |
| 24. | M20 | $[\times_5 \times_4^3 \times_3^2 \times_4 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5^2]$ | $[334422] \square, [333355] \square, \square [444455]$ |
| 29. | M17 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5 \times_4^4 \times_5]$ | $[444322] \square, [44445][4], [55555][4]$ |
| 32. | M22 | $[\times_5^3 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5 \times_4^2 \times_5]$ | $[4444][44], [5555][44]$ |
| 33. | M23 | $[\times_5 \times_4^2 \supset_3 u_1 \times_3 u_2 C_4 \times_5^6]$ | $[4444][45], [5555][45]$ |

$\beta = 5 - \alpha$, $3 - \alpha$ или $2 - \alpha$, то их значения, если они нужны, указываются в виде индексов между квадратными скобками.

Остается проверить, что кодирующие слова с параметрами, перечисленными в последней колонке, дают только расположения, перечисленные в п. 0.5.

6.3. Устранение зигзагов и послойные модели.

Пусть (x, y) — аффинная система координат на \mathbb{RP}^2 , и пусть p — бесконечно удаленная точка на оси y . Обозначим через \mathcal{L}_p пучок прямых с центром p , т.е. пучок вертикальных прямых $x = \text{const}$. Пусть A — нодальная вещественная псевдоголоморфная кривая степени m , не проходящая через p , и пусть $\mathbb{R}A$ — множество ее вещественных точек. Сдвинув сколь угодно мало точку p , можно считать, что A находится в общем положении относительно \mathcal{L}_p , т.е. ни одна прямая пучка \mathcal{L}_p не касается $\mathbb{R}A$ в точках перегиба или в двойных точках и не проходит одновременно через две критические точки (*критической точкой* называется точка с вертикальной касательной или двойная точка).

Будем называть *послойной изотопией относительно пучка прямых \mathcal{L}_p* или просто *послойной изотопией*, если ясно, о каком пучке идет речь, такую изотопию \mathbb{RP}^2 , при которой в каждый момент времени образом каждой прямой пучка \mathcal{L}_p является некоторая (возможно, другая) прямая того же пучка. Назовем *послойным расположением кривой относительно \mathcal{L}_p* или (или просто *послойным расположением*) класс этой кривой относительно послойных изотопий. Как и выше, мы будем кодировать послойные расположения символами $C_k, \supset_k, \times_k, o_k$.

Будем говорить, что вещественная нодальная кривая находится в *почти общем положении* относительно \mathcal{L}_p , если выполнены все условия общности

положения кроме того, что разрешены двойные точки, в которых одна из ветвей имеет вертикальную касательную, но при этом требуется, чтобы эта ветвь не имела перегиба. Для кодирования таких точек мы будем использовать символы \in_k и \ni_k (возмущение \in_k дает $C_k \times_{k+1}$ или $C_{k+1} \times_k$).

Гладкое семейство $\{B_t\}_{t \in [0,1]}$ погруженных кривых, не проходящих через p , будем называть *допустимой изотопией* относительно \mathcal{L}_p , если существует конечное множество $T = T' \cup T_{\text{flex}} \subset]0, 1[$, такое что при $t \notin T \cup \{0, 1\}$ кривая B_t находится в общем положении относительно \mathcal{L}_p , при $t = 0$ или 1 — в почти общем положении, а при $t \in T$ выполнены все условия общности положения за следующими исключениями. При $t \in T'$ существует единственная вертикальная прямая, проходящая ровно через две критические точки, хотя бы одна из которых — двойная точка, а при $t \in T_{\text{flex}}$ существует единственная точка перегиба с вертикальной касательной, причем при ее прохождении число критических точек уменьшается. Прохождение через точку $t \in T_{\text{flex}}$ мы будем называть *устранением зигзага*. Легко видеть, что во время допустимой изотопии минимум числа точек пересечения с вертикальными прямыми не изменяется, а максимум — не возрастает.

Послойной моделью кривой A назовем множество B , такое что существует допустимая изотопия $\{B_t\}$ с $B_0 = \mathbb{R}A$ и $B_1 = B$.

Будем говорить, что объединение погруженных окружностей B удовлетворяет *k-условию относительно p*, если любая прямая из пучка \mathcal{L}_p пересекает B не менее, чем в k точках, а также будем говорить, что B удовлетворяет *сильному k-условию*, если образ B при любом диффеоморфизме пары $(\mathbb{R}P^2, p)$ на себя удовлетворяет *k-условию*. Если кривая B удовлетворяет $(m-2)$ -условию и при этом любая прямая пучка \mathcal{L}_p пересекает ее не более, чем в m точках, то эта кривая однозначно определяет косу, которую мы обозначим через $\text{br}(B)$, такую что $B = \mathbb{R}A$ для некоторой вещественной псевдоголоморфной кривой A степени m тогда и только тогда, когда коса $\text{br}(B)$ *квазиположительна*, т.е. представима в виде $\prod_j a_j \sigma_i a_j^{-1}$ (см. детали в [13, 16]).

Используя введенную терминологию, утверждение об устранении зигзагов [16; предложение 2.2] (точнее, одно из его следствий) можно сформулировать следующим образом.

Предложение 6.1. Пусть A — *нодальная вещественная псевдоголоморфная кривая* в $\mathbb{R}P^2$ степени m , в *общем положении относительно* $p \in \mathbb{R}P^2$, такая что $\mathbb{R}A$ удовлетворяет $(m-2)$ -условию. Тогда для любой *послойной модели* B кривой A коса $\text{br}(B)$ *квазиположительна*.

Следующее утверждение или его аналоги для других контекстов я неявно использовал во всех предыдущих работах по применению квазиположительности кос в задачах вещественной геометрии (включая предыдущий пункт настоящей статьи), хотя явно никогда его не формулировал.

Предложение 6.2. Пусть A — *нодальная вещественная псевдоголоморфная кривая* в $\mathbb{R}P^2$ степени m , в *общем положении относительно* $p \in \mathbb{R}P^2$, такая что $\mathbb{R}A$ удовлетворяет *сильному* $(m-2)$ -условию. Предположим, что $\mathbb{R}A$ является *объединением вложенных попарно трансверсальных окружностей*. Тогда существует *послойная модель кривой* $\mathbb{R}A$, которую можно представить кодирую-

шим словом, содержащим только символы \times_k, \in_k, \ni_k и o_k (т.е. не содержащим символов \subset_k и \supset_k).

Доказательство. Предположим, что кодирующее слово содержит символ \subset_k (случай \supset_k разбирается аналогично) и докажем, что существует допустимая изотопия, при которой число символов "С" уменьшается, а число символов "D" не увеличивается. Выбирая, если надо, другую прямую пучка \mathcal{L}_p в качестве бесконечно удаленной (чему соответствует циклическая перестановка кодирующего слова с пересчетом индексов по очевидным правилам), мы можем добиться того, что найдется подслово вида $\subset_k \times_{i_1} \dots \times_{i_n} u$, где u — либо \supset_l , либо \ni_l . Если $n > 0$ и $i_1 \notin \{k-1, k, k+1\}$, то заменой $\subset_k \times_{i_1}$ на $\times_{i_1} \subset_k$ при $i_1 < k$ или на $\times_{i_1-2} \subset_k$ при $i_1 > k$ можно уменьшить длину цепочки $\times_{i_1} \dots \times_{i_n}$ (ясно, что такая замена соответствует допустимой изотопии). Поэтому мы можем считать, что либо $n = 0$, либо $k-1 \leq i_1 \leq k+1$.

Случай 1. $n = 0$ и $u = \supset_k$. Заменяем $\subset_k \supset_k$ на o_k .

Случай 2. $n = 0$ и $u = \supset_{k\pm 1}$. Удалим $\subset_k \supset_{k\pm 1}$ (устранение зигзага).

Случай 3. $n = 0$ и $u = \ni_k$ или \ni_{k-1} . Самопересечение (т.е. это противоречит тому, что $\mathbb{R}A$ — объединение вложенных окружностей).

Случай 4. $n = 0$ и $u = \ni_{k+1}$ (случай $u = \ni_{k-2}$ аналогичен). Сделаем замену $\subset_k \ni_{k+1} \rightarrow \subset_k \times_{k+2} \supset_{k+1} \rightarrow \times_k \subset_k \supset_{k+1} \rightarrow \times_k$.

Случай 5. $n = 0$, но u — не один из вышеперечисленных символов. Тогда существует изотопия (отнюдь не допустимая!), меняющая местами \subset_k и u . При этом между ними образуется вертикальная прямая, имеющая $m-4$ точки пересечения с кривой. Это противоречит сильному $(m-2)$ -условию.

Случай 6. $n > 0$, $i_1 = k \pm 1$. Заменяем $\subset_k \times_{k\pm 1}$ на \in_k или \in_{k-1} .

Случай 7. $n > 0$, $i_1 = k$. Самопересечение. \square

6.4. Кластеры двойных точек.

Пусть B — объединение вложенных окружностей в $\mathbb{R}P^2$, и пусть $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus B$. Подмножество D множества $\mathbb{R}P^2 \setminus \{p\}$ называется *двуугольником кривой B относительно точки p* , если

- (1) D гомеоморфно открытому диску,
- (2) существует компонента связности B' кривой B , такая что D — компонента связности множества $\mathbb{R}P^2 \setminus (B' \cup \{p\})$,
- (3) на ∂D лежат ровно две двойные точки q_1 и q_2 кривой B .

В этом случае мы будем говорить, что точки q_1 и q_2 *соединены двуугольником D* . Двуугольник D кривой B назовем *пустым*, если $D \cap B = \emptyset$.

Обозначим через Γ_B граф, вершины которого — двойные точки кривой B , а ребра отвечают соединяющим их двуугольникам. Назовем *кластером двойных точек* кривой B множество вершин некоторой компоненты связности графа Γ_B . Назовем кластер *вырожденным*, если он содержит две точки, соединенные двумя двуугольниками, имеющими общую сторону. Ясно, что граф любого невырожденного кластера s гомеоморфен либо окружности, либо отрезку, либо точке. В первом случае назовем кластер *с циклическим*, во втором — *линейным*, а в третьем — *тривиальным*.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 6.3. Пусть B — объединение вложенных окружностей в $\mathbb{R}P^2 \setminus \{p\}$, и c — невырожденный нетривиальный кластер кривой B относительно p . Предположим, что послойное расположение кривой B задается кодирующим словом, содержащим только символы "∈", "∋", "×" и "o". Обозначим через $\pi_p : \mathbb{R}P^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ проекцию из точки p . Тогда существуют два гладких отображения $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$, таких что

- (1) $\pi_p \circ \gamma_1 = \pi_p \circ \gamma_2$ (обозначим это отображение через f),
- (2) $f'(t) \neq 0$ при $0 < t < 1$,
- (3) $c = \gamma_1([0, 1]) \cap \gamma_2([0, 1])$.

□

Лемма 6.4. Пусть A — вещественная псевдоголоморфная кривая в $\mathbb{R}P^2$ степени m , такая что $\mathbb{R}A$ — объединение попарно трансверсальных вложенных окружностей, удовлетворяющее сильному $(m - 2)$ -условию относительно некоторой точки p . Пусть c — невырожденный кластер кривой B относительно p , и пусть Γ — подграф графа Γ_c , гомеоморфный отрезку, причем ребра подграфа Γ отвечают пустым двуугольникам. Тогда существует послойная модель кривой B , кодируемая словом из символов "o", "×", "∈", "∋", таким что вершинам графа Γ отвечает подслово вида $u \times_k^l v$, где $u \in \{\times_k, \in_k, \in_{k-1}\}$ и $v \in \{\times_k, \ni_k, \ni_{k-1}\}$.

При этом допустимую изотопию, преобразующую $\mathbb{R}A$ в B , можно выбрать так, чтобы оставалось неподвижным дополнение к сколь угодно малой окрестности объединения двуугольников, отвечающих ребрам графа Γ .

Доказательство. По предложению 6.2 существует послойная модель B кривой $\mathbb{R}A$, кодируемая словом из символов "o", "×", "∈", "∋". Пусть γ_1 и γ_2 — как в лемме 6.3. Пусть $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ — конечное подмножество отрезка $[0, 1]$, такое что $\gamma_1(T) = \gamma_2(T) =$ (множество вершин графа Γ), причем $t_1 < \dots < t_n$. Положим $N(B) = \text{Card}([t_1, t_n] \cap \gamma_1^{-1}(S))$, где S — объединение прямых пучка \mathcal{L}_p , проходящих через критические точки кривой B . Лемма 6.4 доказывается индукцией по числу $N(B)$ примерно так же, как и лемма 6.3. □

Лемма 6.5. Пусть A — вещественная псевдоголоморфная кривая в $\mathbb{R}P^2$ степени 7. Предположим, что $\mathbb{R}A$ является объединением попарно трансверсальных вложенных окружностей. Пусть O — овал кривой A , т.е. гладкая четная ветвь, не проходящая через двойные точки. Предположим, что $\mathbb{R}A$ не имеет вырожденных кластеров и удовлетворяет сильному 5-условию относительно некоторой точки p , лежащей внутри овала O . Тогда существует послойная модель кривой $\mathbb{R}A$, кодируемая словом из символов "o", "×", "∈", "∋", таким что каждому нетривиальному кластеру двойных точек c_i отвечает подслово вида $u_i w_i v_i$, где $u_i \in \{\times_{k_i}, \in_{k_i}, \in_{k_i-1}\}$, $v_i \in \{\times_{k_i}, \ni_{k_i}, \ni_{k_i-1}\}$ при всех $i = 1, \dots, n$, $w_i = \times_{k_i}^{l_i}$ при $i > 1$, и $w_1 = \times_{k_1}^{l_0} o_{j_1} \dots o_{j_s} \times_{k_1}^{l_1}$.

Доказательство. Поскольку нет невырожденных кластеров, у кривой $\mathbb{R}A$ нет двуугольников, имеющих общую сторону. Поэтому из теоремы Безу для вспомогательной прямой следует, что $\mathbb{R}A$ имеет не более одного непустого двуугольника. Если непустых двуугольников нет, то утверждение следует из леммы 6.4. Предположим, что есть непустой двуугольник D . Мы можем считать, что его вершины принадлежат кластеру c_1 .

Обозначим через $\pi_p : \mathbb{RP}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{RP}^1$ проекцию из точки p . Из леммы 6.4 следует, что существует послойная модель B кривой $\mathbb{R}A$, кодируемая словом из символов "o", "x", "e", "e", такая что для любого пустого двуугольника D' , открытая полоса $\pi_p^{-1}(\pi_p(D'))$ не содержит критических точек. Окончание доказательства примерно такое же, как и у леммы 6.4, и мы его тоже опускаем \square

6.5. Расположения $C_2 \cup C_5$ без гнезда внешних дуг.

Нам осталось рассмотреть расположения $J_5 \cup C_2$, идущие в списке в п. 0.5 под номерами **1, 2, 7, 8, 25**.

В силу теоремы 3 мы всегда можем выбрать центр пучка прямых внутри овала квинтики, лежащего внутри коники. Поэтому для каждого расположения $J_5 \cup C_2$ мы будем последовательно перебирать области, на которые J_5 делит внутренность коники, предполагая, что в этой области есть хотя бы один овал квинтики (обозначим его через O_5), и рассматривать всевозможные расположения кривой $C = C_2 \cup C_5$ относительно пучка прямых с центром в точке p , выбранной внутри O_5 .

Ясно, что если центр пучка лежит внутри овала квинтики и внутри C_2 , расположение удовлетворяет сильному $(m - 2)$ -условию (см. п. 6.3). Поэтому мы можем рассматривать только такие послойные модели кривой $C = C_2 \cup C_5$, существование которых утверждается в лемме 6.5. Несложно убедиться, что в этом случае послойная модель объединения $C_2 \cup J_5 \cup O_5$ однозначно определяется послойным расположением кластеров двойных точек на конике C_2 . Следовательно, достаточно перебрать всевозможные послойные расположения n точек на конике C_2 , где n — число кластеров (во всех рассматриваемых случаях оно не больше четырех), каждый раз строя по ним послойную модель объединения $C_2 \cup J_5 \cup O_5$, и затем рассматривая всевозможные способы чередования остальных овалов квинтики.

Занумеруем точки пересечения C_2 и J_5 символами $0, \dots, 9$ как в п. 0.5. При каждом выборе точки p мы будем обозначать кластеры через c_1, c_2, \dots в порядке по часовой стрелке вдоль C_2 (т.е. в том же порядке, что и точки пересечения), начиная с кластера, содержащего точку "0". Области, т.е. компоненты дополнения к $J_5 \cup C_2$, мы будем обозначать через $D_{i_1 i_2 \dots}$, где i_1, i_2, \dots — номера точек пересечения ветвей, лежащих на границе данной области.

В таблице 2 мы приводим результаты первичного анализа всевозможных способов выбора области, в которой лежит O_5 , и послойного расположения кластеров. При этом мы не рассматривали случаи, когда выбор овала O_5 в некоторой области противоречит теореме Безу для вспомогательных прямых. Например, по этой причине в таблице 2 нет строки, отвечающей области D_{01} для серии **7**. Действительно, если $p \in D_{01}$, то прямая, проходящая через p и пересекающая дугу (67) коники, должна в двух точках пересекать O_5 , а также она должна пересекать дуги квинтики (01), (49), (58) и (67).

При условии, что точка p лежит внутри C_2 и q_1, \dots, q_n — точки на C_2 , никакие две из которых не коллинеарны с p , имеется 2^{n-1} послойных расположений. Действительно, выберем аффинную карту, в которой \mathcal{L}_p — пучок вертикальных прямых, а C_2 — гипербола $y^2 - x^2 = 1$. Пусть $q_i = (x_i, y_i)$. Пусть (i_1, \dots, i_n) — перестановка, при которой $x_{i_1} < \dots < x_{i_n}$. Мы можем считать,

что $i_1 = 1$ и $y_1 > 0$. Тогда послойное расположение точек q_i определяется последовательностью $(\text{sign } y_{i_2}, \dots, \text{sign } y_{i_n})$. Соответствующее послойное расположение кластеров c_1, \dots, c_n в таблице 2 мы будем изображать матрицей $2 \times n$, в которой строки соответствуют ветвям гиперболы. Например, ${}^1_4 {}^2_3$ отвечает случаю $x_1 < x_4 < x_2 < x_3$ и $\text{sign } y_1 = \text{sign } y_2 = \text{sign } y_3 = 1 = -\text{sign } y_4$.

В силу предложения 6.2 нам достаточно рассматривать лишь такие послойные расположения кривой $C_2 \cup J_5$, при которых все точки максимума координаты x на ветви J_5 расположены на C_2 . Такие расположения однозначно строятся, исходя из послойного расположения кластеров двойных точек. Поясним это на примере послойного расположения кластеров ${}^1_4 {}^2_3$ в первой строке таблицы 2 (серия **25**, $p \in D_{78}$). Для упрощения рисунков мы будем изображать гиперболу C_2 в виде двух горизонтальных прямых. Отметим на C_2 точки $0, \dots, 9$ согласно данному послойному расположению кластеров (см. рис.30.1) и будем последовательно добавлять дуги ветви J_5 . Начнем, например, с дуги (01). Координата x монотонна на каждой дуг. Поэтому для дуги (01) есть две возможности: рис. 30.2 и рис. 30.3. Однако, поскольку $p \in D_{78}$, эта дуга должна пересекать отрезок, соединяющий p с некоторой точкой q дуги (01) коники, и расположенный внутри коники (при нашем выборе аффинной системы координат это вертикальный луч из точки q , не пересекающий другую ветвь гиперболы). Поэтому мы должны выбрать рис. 30.2, а не рис. 30.3. Аналогично строятся остальные дуги, и в результате мы получаем послойное расположение $J_5 \cup C_2$, изображенное на рис. 30.4. Это расположение противоречит теореме Безу для вертикальной прямой, проходящей через точку 4. В таких случаях в соответствующей клетке таблицы 2 мы ставим пометку "Б".

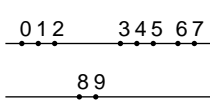


Рис. 30.1

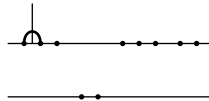


Рис. 30.2

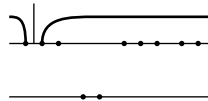


Рис. 30.3



Рис. 30.4

При отрисовке вручную послойного расположения пересекающихся ветвей удобно начинать с внешней дуги, проходящей через бесконечность, и дуг составляющих границу той области, где лежит точка p . В этом случае остальные дуги будут однозначно определяться тем условием, что они не должны пересекать ранее построенные дуги.

Пометка вида " $c_i \rightarrow$ " (соответственно, " $\leftarrow c_i$ ") в таблице 2 означает, что данное послойное расположение сводится к другому посредством допустимой изотопии (см. определение в п. 6.3), при которой кластер c_i движется вправо (соответственно, влево), а остальные кластеры неподвижны. Рассмотрим, например, расположение кластеров ${}^1_3 {}^2$ во строке таблицы 2. Ему соответствует расположение ветвей J_5 , O_5 и C_2 , изображенное на рис. 31. Из теоремы Безу для вертикальных прямых следует, что остальные пять овалов кривой C_5 должны быть расположены в полосе, ограниченной вертикальными прямыми, проходящими через точки 9 и 1. Более того, они лежат в некоторой меньшей полосе, которую мы изобразили на рис. 31 в виде серого прямоугольника.

Таблица 2.

| $C_2 \cup J_5$ | p | кластеры | последовательные расположения кластеров | | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|---|------------------|-------------------|------------------|----------|-----------|------------|-----------|
| | | | 1234 | 123_4 | 12_3 | 12_{34} | $1_4 23$ | $1_3 2_4$ | $1_{34} 2$ | 1_{234} |
| 25. (M10) | D_{78} | 012, 345, 67, 89 | Б. | О.К. | Б. | Б. | Б. | Б. | Б. | Б. |
| | | | 123 | 12_3 | $1_3 2$ | 1_{23} | | | | |
| 2. (M33) | D_{01} | 0, 123456, 789 | Б. | Б. | $\leftarrow c_1$ | О.К. | | | | |
| | D_{23} | 012, 3456, 789 | Б. | Б. | Б. | О.К. | | | | |
| | D_{45} | 01234, 56, 789 | Б. | Б. | Б. | О.К. | | | | |
| | D_{78} | 0123456, 7, 89 | Б. | О.К. | $c_3 \rightarrow$ | Б. | | | | |
| 7. (M31) | D_{012349} | 01234, 567, 89 | О.К. | Б. | $\leftarrow c_3$ | Б. | | | | |
| | D_{4589} | 01234, 567, 89 | $c_3 \rightarrow$ | $\leftarrow c_3$ | О.К. | О.К. | | | | |
| | D_{5678} | 01234, 567, 89 | Б. | О.К. | $c_3 \rightarrow$ | Б. | | | | |
| 8. (M29) | D_{01} | 0, 1234, 56789 | Б. | Б. | $c_2 \rightarrow$ | О.К. | | | | |
| | D_{23} | 012, 34, 56789 | Б. | Б. | Б. | О.К. | | | | |
| 25. (M10) | D_{236789} | 012, 345, 6789 | $c_3 \rightarrow$ | $\leftarrow c_3$ | О.К. | О.К. | | | | |
| | D_{0129} | 012, 345, 6789 | О.К. | Б. | Б. | $\leftarrow c_3$ | | | | |
| | | | 12 | 1_2 | | | | | | |
| 1. (M30) | D_{01} | 0, 123456789 | $c_2 \rightarrow$ | О.К. | О.К. | | | | | |
| | D_{23} | 012, 3456789 | О.К. | О.К. | О.К. | | | | | |
| | D_{45} | 01234, 56789 | О.К. | О.К. | О.К. | | | | | |
| 2. (M33) | $D_{01234569}$ | 0123456, 789 | О.К. | О.К. | $c_1 \rightarrow$ | О.К. | | | | |
| | D_{6789} | 0123456, 789 | $c_2 \rightarrow$ | О.К. | О.К. | | | | | |
| 8. (M29) | D_{012349} | 01234, 56789 | О.К. | О.К. | $c_1 \rightarrow$ | | | | | |
| 1. (M30) | $D_{01\dots 89}$ | 0123456789 | О.К. | | | | | | | |

Тогда существует допустимая изотопия, изображенная стрелками на рис. 31, которая перемещает кластер c_1 (состоящий из единственной точки "0") влево. При этом получается последовательное расположение 31^2 , которое заменой бесконечно удаленной прямой приводится к виду 1_{23} .

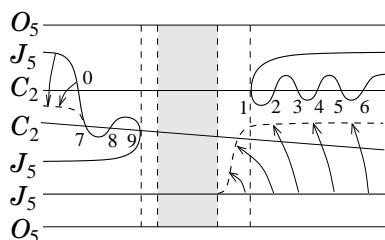


Рис. 31

Наконец, пометка "О.К." в таблице 2 означает, что данное последовательное расположение ветвей C_2 , J_5 и O_5 подлежит дальнейшему рассмотрению. Каждому

такому послыоному расположению отвечает строка таблицы 3.

Таблица 3.

| | | | | | |
|-----------------|------------------|--|---|---|-------------------------------|
| 1. | D_{01} | 9 | $[\ni_3 u_1 \times_3 u_2 \in_2 \times_3^7]$ | $[22323][\], [43333][\], [4][4444]$ | 7,2,2 |
| | D_{23} | 0 | $[\times_4^2 \ni_4 u'_1 \in_4 \times_4^6]$ | $[44443], [44454]$ | 3,8 |
| | "–" | 9 | $[\ni_3 u_1 \in_3 \times_4 \ni_4 u_2 \in_2 \times_3^5]$ | $[422][44], [444][33]$ | 10,9 |
| | D_{45} | 0 | $[\times_4^4 \ni_4 u'_1 \in_4 \times_4^4]$ | $[45554]$ | 5 |
| | "–" | 9 | $[\ni_3 u_1 \in_3 \times_4^3 \ni_4 u_2 \in_2 \times_3^3]$ | $[334][33], [433][44]$ | 4,4 |
| $D_{01\dots 9}$ | 0 | $[u'_1 \times_3^\alpha u'_2 \times_3^{10-\alpha}]$ | $[\]_1[43333]_9, [3333]_1[4]_9, [32223][\]^*, [32322][\],$ $[32325][\], [32355][\], [34555][\], [\]_2[43222]_8^*,$ $[\]_3[43322]_7, [\]_3[43325]_7, [\]_3[43355]_7, [33]_3[444]_7,$ $[3333]_3[4]_7, [\]_4[43222]_6, [322]_4[45]_6, [323]_4[44]_6^*,$ $[325]_4[45]_6, [355]_4[45]_6, [33]_5[433]_5$ | $2,2,1^*,1,$ $1,1,1,1,1^*,$ $9,9,9,10,$ $3,6,6,1,2^*,$ $6,6,4$ | |
| 2. | D_{01} | 9 | $[\ni_3 u_1 \times_3 u_2 \in_2 \times_3^5 \times_4^2]$ | $[33333][\], [3][4444], [\]_1[44443]$ | 5,5,5 |
| | D_{23} | 9 | $[\ni_3 u_1 \in_3 \times_3 \ni_4 u_2 \in_2 \times_3^3 \times_4^2]$ | $[322][44], [344][33]$ | 9,8 |
| | D_{45} | 9 | $[\ni_3 u_1 \in_3 \times_3^3 \ni_4 u_2 \in_2 \times_3 \times_4^2]$ | $[333][44]$ | 3 |
| | D_{78} | 0 | $[\times_3^6 \ni_3 u_1 \times_3 u_2 \in_2 \times_3]$ | $[\]_1[43333], [\]_1[44444]$ | 7,7 |
| | $D_{0\dots 569}$ | 9 | $[\ni_2 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{7-\alpha} u_3 \in_3 x_4]$ | $[3322]_4[4]_3[\], [33232][\][\], [333][\]_1[42],$ $[3]_3[4332]_4[\], [\]_4[42222]_3[\],$ $[4][\]_1[4444], [444][\]_1[44]$ | $1,2,6,$ $8,10,$ $12,4$ |
| D_{6789} | 1 | $[\times_4^5 \ni_4 u_1 \times_2^\alpha u_2 \times_2^{3-\alpha} u_3 \in_3]$ | $[3322][\]_1[3], [\]_1[34442],$ $[43322][\][\], [444][\]_1[33]$ | $12,4,$ $11,6$ | |
| 7. | D_{012349} | 9 | $[\ni_2 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{5-\alpha} u_3 \in_3 \times_3^2 \times_4]$ | $[3333]_4[4]_1[\], [43333][\][\],$ $[\]_4[44444]_1[\], [44444][\][\]$ | $3,2,$ $6,2$ |
| | D_{4589} | 0 | $[\times_4^4 \ni_4 u'_1 \times_2 u'_2 \times_2 u'_3 \in_4 \times_4^2]$ | $[33444][\][\], [45544][\][\]$ | 4,1 |
| | "–" | 1 | $[\times_4^3 \ni_4 u_1 \in_2 \times_3 \ni_3 u_2 \times_2 u_3 \times_2 u_4 \in_3]$ | $[4233][2][\][\]$ | 1 |
| | D_{5678} | 0 | $[\times_3^4 \ni_3 u_1 \times_3 u_2 \times_3^2 u_3 \in_2 \times_3]$ | $[2222][\]_1[4], [24333][\][\]$ | 5,4 |
| 8. | D_{01} | 9 | $[\ni_3 u_1 \times_3 u_2 \in_2 \times_3^3 \times_4^1]$ | $[\]_1[42223], [34333][\]$ | 8,5 |
| | D_{23} | 9 | $[\ni_3 u_1 \in_3 \times_4 \ni_4 u_2 \in_2 \times_3 \times_4^1]$ | $[222][44], [244][33]$ | 6,7 |
| | D_{012349} | 9 | $[\ni_2 u_1 \times_3^\alpha u_2 \times_3^{5-\alpha} u_3 \in_3 \times_4^3]$ | $[3222]_4[4]_1[\], [32232][\][\], [333][\]_1[43],$ $[3]_1[4333]_4[\], [\]_2[42223]_3[\],$ $[4333][\]_1[4], [\]_3[44332]_2[\]$ | $3,4,1,$ $5,2,$ $1,7$ |
| 25. | D_{78} | 0 | $[\times_3^2 \ni_3 u_1 \in_3 \times_2 \times_4 \ni_4 u_2 \in_2 \times_3]$ | — | — |
| | D_{236789} | 0 | $[\times_4^2 \ni_4 u_1 \times_2^\alpha u_2 \times_2^{4-\alpha} u_3 \in_4 \times_4^2]$ | $[\]_1[32224]_3[\], [4222]_3[3]_1,$ $[43444][\][\], [444][\]_1[34]$ | $3,3,$ $2,2$ |
| | "–" | 1 | $[\times_4 \ni_4 u'_1 \in_2 \times_3 \ni_3 u'_2 \times_2^\alpha u'_3 \times_2^{4-\alpha} u'_4 \in_3]$ | $[4433][2][\][\]$ | 1 |
| | D_{0129} | 9 | $[\ni_2 u_1 \times_3^2 u_2 \times_3 u_3 \in_3 \times_3^2 \times_4^1]$ | $[3222][4][\], [333][\]_1[43], [42223][\][\]$ | 4,2,5 |

Таблица 3 устроена примерно так же, как и таблица 1 выше. В четвертой колонке приведены кодирующие слова для расположения кривой $C = C_5 \cup C_2$. В этих словах переменные u_1, u_2, \dots или u'_1, u'_2, \dots (смысл штрихов будет объяснен ниже) следует заменить всевозможными способами на подслова (в том числе и пустые) суммарной длины 5, имеющие вид $o_{i_1} o_{i_2} \dots$, где $2 \leq i_1, i_2, \dots \leq 5$.

Из условий коммутирования символов "x" и "o" следует, что если слово содержит фрагмент вида $u_{i-1}^{(i)} \times^m u_i^{(i)}$, то можно не рассматривать случаи, когда слово $u_i^{(i)}$ начинается с символа $o_{k'}$ при $k' \neq k + 1$. По той же причине, в случае (1. $p \in D_{0\dots 9}$) мы можем считать, что слово u'_1 либо пусто, либо оно начинается с o_3 , либо $u'_1 = o_2^5$ и $u'_2 = \emptyset$.

Кодирующее слово зависит от выбора бесконечно удаленной прямой. Всегда, когда это возможно (т.е. во всех случаях кроме последней строки серии 1), мы ее выбирали таким образом, чтобы она пересекала J_5 в трех точках, и чтобы при этом аффинное послонное расположение кластеров как можно меньше искажалось по сравнению с тем, которое приведено в таблице 2. В третьей колонке таблицы 3 указан номер самой левой двойной точки.

Объясним теперь различие между переменными u_k и u'_k в кодирующих словах. Предположим, что мы исследуем случай, когда самая левая точка имеет номер i , а овал O_5 лежит в области D_α . Если в этой области имеется несколько овалов, то мы любой из них можем выбрать в качестве O_5 . Рассмотрим касательную к конике C_2 в i -й точке и будем ее вращать в ту или другую сторону до тех пор, пока она впервые не коснется какого-нибудь овала, лежащего в D_α , и выберем в качестве O_5 именно этот овал. Получившаяся прямая L делит внутренность коники C_2 на две компоненты, причем все остальные овалы из области D_α будут расположены в одной из этих компонент. Это значит, что кодирующее слово либо не содержит символа o_2 , либо не содержит символа o_5 (в зависимости от того, в какую сторону мы вращали касательную). Отсутствие штриха у переменной u_k означает, что мы вместо нее подставляем только слова, не содержащие символа o_5 .

В тех случаях, когда одной строке таблицы 2 отвечают две различные послонные модели пересекающихся ветвей, мы этот трюк применяли только к одной из них, чтобы не возиться с согласованием выбора овала O_5 . То, что данная предосторожность не напрасна, видно на примере расположения 1 при $p \in D_{45}$. Анализируя последнюю колонку таблицы 3 (смысл которой объяснен ниже), можно увидеть, что если бы мы рассматривали только слова, не содержащие символа o_5 , то мы бы "доказали" нереализуемость пятого расположения из серии 1.

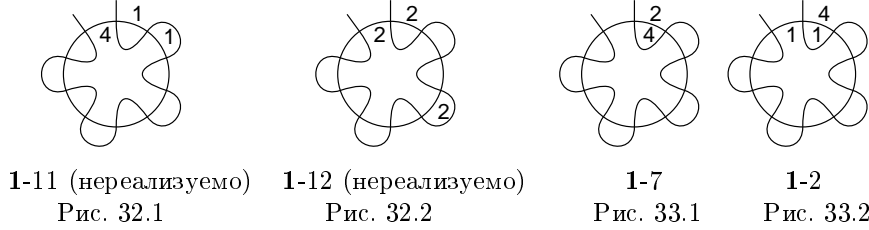
Данное рассуждение также неприменимо к (1. $p \in D_{0\dots 9}$), поскольку в этом случае возможно, что прямая L пересекает $J_5 \cup O_2$ только в трех вещественных точках, и поэтому в процессе допустимой изотопии овалы квинтики могут перемещаться через L , превращаясь из o_2 в o_5 и наоборот.

Для всех послонных расположений, перечисленных в таблице 3 и удовлетворяющих вышеописанным ограничениям, для соответствующей косы b мы проверили (см. детали в [16]), выполняется ли неравенство Мурасуги-Тристрама, а также удовлетворяет ли многочлен Александера $\Delta_b(t)$ условию Фокса-Милнора

$$\exists f \in \mathbb{Z}[t] \quad : \quad \Delta_b(t) \doteq f(t)f(t^{-1})$$

при $e(b) = 6$ (т.е. в случае 1. $p \in D_{0\dots 9}$), или условию $\Delta_b(t) = 0$ при $e(b) \leq 5$ (т.е. в остальных случаях). Здесь через $e(b)$ обозначена сумма показателей косы b , т.е. $e(b) = \sum k_j$ при $b = \prod \sigma_{i_j}^{k_j}$, а через \doteq обозначено равенство с точностью до умножения на единицы кольца $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Все послойные расположения кривой C , для которых эти два условия выполнены, перечислены в предпоследней колонке таблицы 3 (формат данных тот же, что и в последней колонке таблицы 1). Для каждого из них в последней колонке указан порядковый номер (по списку из п. 0.5) среди расположений данной серии. Звездочкой помечены случаи, которые будут исключены ниже, а номера 11 и 12 серии **1** означают расположения на рис. 32.1 и рис. 32.2.



Например, первая строка таблицы 3 означает, что были рассмотрены все послойные расположения, кодируемые словами вида

$$[\exists_3 o_{i_1} \dots o_{i_k} \times_3 o_{i_{k+1}} \dots o_{i_5} \in_2 \times_3^7],$$

где $0 \leq k \leq 5$, $2 \leq i_j \leq 4$ при всех j , и если $k < 5$, то $i_{k+1} = 4$. Среди них неравенству Мурасуги-Тристрама и равенству $\Delta_b(t) = 0$ удовлетворяют только

$$[\exists_3 o_2^2 o_3 o_2 o_3 \times_3 \in_2 \times_3^7], \quad [\exists_3 o_4 o_3^4 \times_3 \in_2 \times_3^7] \quad \text{и} \quad [\exists_3 o_4 \times_3 o_4^4 \times_3 \in_2 \times_3^7],$$

причем первому случаю отвечает седьмое расположение серии **1** (т.е. рис. 33.1), а второму и третьему случаям — второе расположение той же серии (рис. 33.2).

Нам осталось доказать нереализуемость расположений на рис. 32.1 и рис. 32.2. Для этого мы воспользуемся следующим обобщением теоремы Фокса-Милнора.

Теорема 6.6. (Флоранс [5]). Пусть $F = F_1 \cup \dots \cup F_\mu$ — гладкая компактная поверхность, вложенная в четырехмерный шар \mathbb{B}^4 , причем $L = \partial F \subset \mathbb{S}^3 = \partial \mathbb{B}^4$. Положим $L_i = \partial F_i$. Пусть $\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu)$ — многочлен Александера от многих переменных, отвечающий разбиению $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$.

Предположим, что эйлерова характеристика $\chi(F)$ равна единице. Тогда существует многочлен $f(t_1, \dots, t_\mu)$ с целыми коэффициентами, такой что

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu) \prod_{i=1}^{\mu} (t_i - 1)^{-\chi(F_i)} \doteq f(t_1, \dots, t_\mu) f(t_1^{-1}, \dots, t_\mu^{-1}), \quad (12)$$

где через \doteq обозначено равенство с точностью до умножения на единицы кольца $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_\mu^{\pm 1}]$.

Пусть b — коса, отвечающая одному из послойных расположений, перечисленных в последней строке серии **1** в таблице 3. Как объяснено в [13], если данное послойное расположение является послойной моделью вещественной псевдоголоморфной кривой $C = C_2 \cup C_5$, то замыкание L косы b можно представить

как край поверхности F , являющейся пересечением комплексификации кривой C с некоторым четырехмерным шаром, вложенным в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Пусть $L = L_2 \cup L_5$ и $F = F_2 \cup F_5$ — разбиения, отвечающие разбиению $C = C_2 \cup C_5$. По формуле Римана-Гурвица мы имеем $\chi(F) = \deg C - e(b) = 7 - 6 = 1$. Следовательно, полином Александера $\Delta_L(t_2, t_5)$, отвечающий разбиению $L = L_2 \cup L_5$, должен представляться в виде (12). Непосредственное вычисление показывает, что это не так в случаях, помеченных звездочкой в таблице 3.

Замечание 6.7. Расположение на рис. 32.1 (соответственно, на рис. 32.2) можно запретить и без использования теоремы 6.6. Можно проверить, что если выбрать центр пучка прямых внутри овала, лежащего в двуугольнике (12) (соответственно, (34)), то все послойные модели противоречат неравенству Мурасуги-Тристрама. Как и выше, достаточно рассмотреть всевозможные послойные расположения кластеров двойных точек $c_1 = (01)$ и $c_2 = (2 \dots 9)$ (соответственно, $c_1 = (0123)$ и $c_2 = (456789)$) на конике C_2 , которую при данном выборе точки p можно представить в виде эллипса на аффинной плоскости. Согласно предложению 6.2, достаточно рассмотреть случаи, когда точки экстремума x -координаты на кривой C_2 являются крайними точками кластеров.

Замечание 6.8. Расположения на рис. 32.1 – 32.2 псевдоголоморфно нереализуемы, но соответствующие полиномы Александера от одной переменной не противоречат теореме Фокса-Милнора. Возможно, это простое совпадение. Однако интуитивно ясно, что вероятность такого совпадения очень мала (в отличие, скажем, от того, что случайно выполнилось неравенство Мурасуги-Тристрама). В связи с этим возникает естественный вопрос: не является ли это признаком того, что данные расположения реализуемы в виде множества вещественных точек некоторых объектов (например, гибких кривых в смысле Виро), являющихся обобщением вещественных алгебраических кривых, но в более слабом смысле, чем вещественные псевдоголоморфные кривые?

§7. ЗАВЕРШЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИИ

7.1. Запреты для $C_5 \cup L_1 \cup L_2$, сводимые к вышедоказанным запретам для $C_5 \cup C_2$.

Из теоремы Безу для вспомогательных прямых несложно вывести, что если M -квинтика C_5 и прямые L_1, L_2 реализуют расположение типа (1,1) (соответственно, (1,3)), то нечетная ветвь J_5 квинтики расположена относительно $L_1 \cup L_2$ одним из 8 (соответственно, 19) способов, отвечающих сериям в списке в п. 0.6 (соответственно, в п. 0.7). Вопрос заключается в том, как овалы квинтики распределены по областям дополнения к $J_5 \cup L_1 \cup L_2$.

Для большинства серий, в том числе для всех серий типа (1,1), ответ на этот вопрос следует из той частичной классификации расположений квинтики и коники с одним проходом через бесконечность, которая получена в §6, а также из классификации расположений с пятью проходами через бесконечность или с пятью вложенными внутренними дугами, которая очевидным образом сводится к классификации Полотовского расположений квинтики и одной прямой.

Пример 7.1. Серия 8 типа (1,1), т.е. серия E согласно [9]. Обозначим области дополнения к $J_5 \cup L_1 \cup L_2$ как на рис. 34.1 (как обычно, каждая из

букв a, b, \dots обозначает одновременно и область, и число лежащих в ней овалов квинтики). Из теоремы Безу для вспомогательных прямых следует, что в других областях овалов быть не может. Возмутим пару прямых в неособую конику C_2 как показано на рис. 34.2. Мы получаем расположение $J_5 \cup C_2$ серии **28**. Для этой серии классификации еще нет (наоборот, в §5 мы решили свести этот случай к классификации квинтики и пары прямых). Попробуем тогда перерисовать данное расположение как показано на рис. 35.3 и возмутить его как на рис. 35.4. На этот раз мы получаем расположение $J_5 \cup C_2$ серии **24**, для которой классификация завершена в п. 6.2. Из этой классификации следует, что возможны только два случая: (1) $a = d = 0, b = 4, c = 2$ или (2) $c = 0, a = b = d = 2$. Оба этих случая приведены в списке реализованных расположений в п. 0.6.

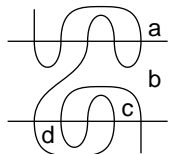


Рис. 34.1

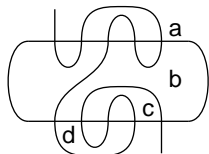


Рис. 34.2

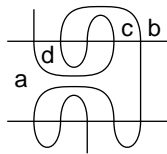


Рис. 34.3

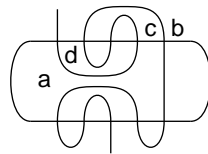


Рис. 34.4

Пример 7.2. Серия **16** типа (1,3). Обозначим области как на рис. 35.1. Поскольку при одном из двух способов возмущения прямых в конику получается расположение с тремя проходами через бесконечность, а их классификацию мы еще даже не начинали (она будет получена в п. 7.3), мы будем рассматривать только возмущение на рис. 35.2. Это серия **13**, в которой согласно п. 6.2 реализуемо только одно расположение, и для него имеем $a + b = c = d = 2$. Осталось доказать, что $a = 0$ и $b = 2$. Это следует из того, что, забывая одну из прямых, мы лишь при этих значениях a и b получаем расположение, не противоречащее классификации Полотовского расположений квинтики и прямой.

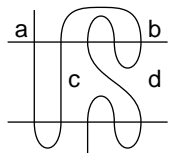


Рис. 35.1

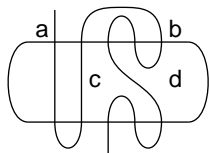


Рис. 35.2

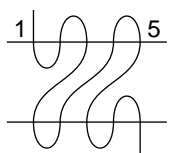


Рис. 36.1

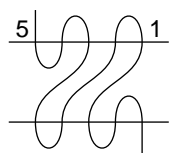


Рис. 36.2

Действуя так же, как в рассмотренных примерах, несложно исключить все расположения, которых нет в пп. 0.6 – 0.7, кроме серий **1, 2, 3, 9, 10, 12, 14** типа (1,3) и кроме еще двух расположений серии **5** того же типа, изображенных на рис. 36.1 – 36.2.

7.2. Окончание доказательства теоремы 2.

Ко всем оставшимся случаям мы применяем неравенство Мурасуги-Тристрама. Для расположений на рис. 36.1 – 36.2, выбор центра пучка прямых в единичном овале дает единственные послойные модели $[\ni_4 o_3^5 \times_3 \in_4 \times_4^2 \times_3^2 \times_4^2 \times_3^2]$ и $[\supset_4 o_4^4 \times_2 \times_3^3 \times_2^2 \times_3^2 \times_2^3 \times_3^3 \subset_3]$ соответственно.

В остальных случаях мы выбираем центр пучка на одной из прямых L_1 , L_2 (пусть это будет L_1), внутри гнезда вложенных дуг квинтики. Прямую L_1 выбираем в качестве бесконечно удаленной. Результаты вычислений представлены в таблице 4, которая устроена примерно так же, как и таблицы 1 и 3 в пп. 6.2 и 6.4. Как и в п. 6.2, через u_i обозначены слова вида, $o_{i_1} o_{i_2} \dots$, которые при стирании прямой L_2 дают реализуемые послойные расположения квинтики. Если слово u_i следует непосредственно за символом \times_k , то оно либо пусто, либо начинается с символа o_{k+1} .

Таблица 4.

| | | | |
|-----|--|--|---------|
| 1. | $[\supset_2 u_1 \in_2 \times_2 \supset_1 u_2 \in_1 \times_2]$ | $[222][322], [1][22222]$ | 1,2 |
| 2. | $[\times_3 \supset_2 u_1 \times_1^\alpha u_2 \times_1^{3-\alpha} u_3 \subset_1]$ | $[322244][\square], [323311][\square], [\square_1[211111]_2[\square]]$ | 3,1,2 |
| 3. | $[\supset_1 u_1 \times_1 u_2 \times_1 u_3 \in_2 \times_3^2]$ | $[44][\square][2223], [1133][\square][23], [11111][2][\square]$ | 3,1,2 |
| 9. | $[\supset_1 u_1 \supset_2 \times_2 \times_1^2 \times_2]$ | $[112222], [111111]$ | 2,1 |
| 10. | $[\supset_2 u_1 \times_1 u_2 \in_1 \times_2 \times_3^2]$ | $[444444][\square], [333344][\square], [3333][22], [\square][222222]$ | 1,2,2,1 |
| 12. | $[\supset_1 u_1 \in_2 \times_2 \supset_1 u_2 \times_1 u_3 \in_3]$ | $[1111][22], [1122][33]$ | 1,2 |
| 14. | $[\supset_1 u_1 \times_1 u_2 \in_1 \times_2 \supset_2 u_3 \in_2]$ | $[113][\square][223]$ | 1 |

7.3. Окончание доказательства теоремы 1.

В силу следствия 5.2, классификация для серий, не рассмотренных в §6, сводится к теореме 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕРЕАЛИЗУЕМОСТИ ОДНОЙ ПСЕВДОГОЛОМОРФНОЙ M -КРИВОЙ БИСТЕПЕНИ (4, 8) НА КВАДРАТИЧНОМ КОНУСЕ

Предложение А.1. *Не существует вещественной алгебраической кривой бистепени (4, 8) на поверхности Хирцебруха $\mathbb{R}\mathcal{F}_2$ (на раздутом квадратичном конусе), расположенной относительно исключительного дивизора E и одного из слоев F как изображению на рис. 37, где поверхность $\mathbb{R}\mathcal{F}_2$ представлена в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами, причем горизонтальные стороны представляют исключительную кривую E , а вертикальные — слой F .*

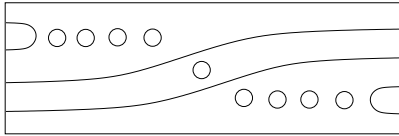


Рис. 37.

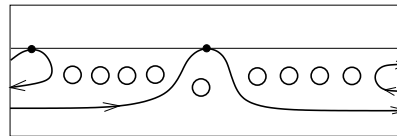


Рис. 38.

Этот результат был доказан в [21] методом Гильберта – Роона. Заметим, что рис. 37 реализуется вещественной псевдоголоморфной кривой в почти комплексной структуре, в которой E имеет самопересечение -2 . В настоящем приложении мы дадим новое доказательства этого предложения А.1, аналогичное доказательству алгебраической нереализуемости расположения на

рис. 16.12, приведенному в п. 4.4, правда, с применением неравенств Агнихотри – Вудварда. На наш взгляд, новое доказательство проще и ”надежнее” старого (к сожалению, как показывает опыт, в доказательствах методом Гильберта – Роона иногда встречаются ошибки, связанные с тем, что какой-нибудь случай вырождения оказывается забытым; первая версия §4 настоящего текста чуть не пополнила список таких ошибочных доказательств).

В то же время, результат предложения А.1 получен в [21] как следствие более сильного утверждения о том, что $(M - 1)$ -кривая, получающаяся из изображенной на рис. 37 удалением центрального овала, тоже алгебраически нереализуема. В настоящее время мне неизвестно никакого другого доказательства этого более сильного факта кроме того, которое приведено в [21] и основано на методе Гильберта – Роона.

Кстати, в этой связи уместно сформулировать следующий вопрос. *Реализуемо ли алгебраически расположение $(M - 1)$ -квинтики и двух прямых на $\mathbb{R}P^2$, получающееся из рис. 16.12 удалением одиночного пустого овала (т.е. стиранием цифры ”1” на соответствующем рисунке)?*

Доказательство предложения А.1. Если рис. 37 алгебраически реализуем, то кубическая резольвента R должна быть расположена относительно оси L как изображено на рис. 38 (см. замечание 4.5). Коса, отвечающая кривой $A = RUL$, имеет вид

$$b = \sigma_3^{-2} \sigma_2^{-5} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-2} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-4} \Delta^4.$$

Кривая R является M -кривой, и ее комплексная ориентация должна быть такой, как показано на рис. 38, поскольку иначе не равен нулю индекс зацепления положительных и отрицательных нитей. Введем обозначения H , N , N_R и N_0 как в §4. Из подсчета эйлеровых характеристик и индексов зацепления компонент косы следует, что N состоит из двух компонент N_1 , N_2 , однократно и двукратно накрывающих H . Проекция $N_2 \rightarrow H$ имеет две точки ветвления, и каждая из поверхностей N_1 и N_2 в одной точке касается N_0 .

Поэтому при раскраске нитей косы b в цвета (t_2, t_1, t_2, t_0) , получаем, что она должна представляться в виде $b = b_1^{(1)} b_1^{(2)} b_4^{(1)} b_4^{(2)}$, где крашенная коса $b_1^{(j)}$, $j = 1, 2$, сопряжена косе $\sigma_1 : (t_2, t_2, t_0, t_1) \rightarrow (t_2, t_2, t_0, t_1)$, а коса $b_4^{(j)}$, $j = 1, 2$, сопряжена косе $\sigma_4^j : (t_0, t_j, t_{3-j}, t_2) \rightarrow (t_0, t_j, t_{3-j}, t_2)$.

Образы кос $b_1^{(j)}$ и $b_4^{(j)}$ имеют спектры $(-t_2, 1, 1)$ и $(t_0^2 t_j^2, 1, 1)$ соответственно.

Вычисления аналогичные тем, что приведены в [15], показывают, что при подстановке значений $t_0 = t_2 = i = \sqrt{-1}$, $t_1 = -\bar{\tau} = (1 + i\sqrt{3})/2$ получается противоречие с одним из неравенств Агнихотри – Вудварда.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ПРИМЕР НЕУСТРАНИМОГО ЗИГЗАГА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Предложение Б.1. *а). Существует неособая вещественная алгебраическая кривая бистепени $(3, 6)$ на \mathcal{F}_2 (см. определение 2.10), послойное расположение которой кодируется словом $w = [\supset_1 o_1 \subset_1 \supset_2 o_2 \subset_2 \supset_1 \subset_2 \supset_1 \subset_2]$.*

б). Не существует неособой вещественной алгебраической кривой бистепени $(3, 6)$ на \mathcal{F}_2 , послойное расположение которой кодируется словом $w' = [\supset_1 o_1 o_2 \subset_2 \supset_1 \subset_2 \supset_1 \subset_2]$.

Доказательство. а). Такую кривую легко построить методом Виро, разбивая треугольник $(0,0)$ - $(6,0)$ - $(0,3)$ отрезком $(3,0)$ - $(0,3)$. Склеиванию карт соответствует представление слова w в виде $w = u_1 v u_2$, где $u_1 = \supset_1 o_1 \subset_1$, $v = \supset_2 o_2 \subset_2 \supset_1 \subset_2$, $u_2 = \supset_1 \subset_2$. При этом v отвечает карте в треугольнике $(0,0)$ - $(3,0)$ - $(0,3)$, а $u_1 u_2$ — карте в треугольнике $(3,0)$ - $(6,0)$ - $(0,3)$.

б). Следует из результата [18; лемма 6.6], заключающегося в том, что слово, кодирующее послойное расположение кривой бистепени $(3, 3n)$ на поверхности Хирцебруха \mathcal{F}_n , не может содержать больше, чем n подслов вида $\supset_1 \subset_2$ или $\supset_2 \subset_1$. \square

Слово w' получается из слова w вычеркиванием фрагмента $\subset_1 \supset_2$, т.е. устранением зигзага.

Замечание. Недавно Брюгалле [1] обобщил на кривые произвольных степеней результат [18; лемма 6.6] (к которому сводится часть (б) предложения Б.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ГЛАДКИЕ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ
БИСТЕПЕНИ $(4, 16)$ НА \mathcal{F}_4 , ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ТИП КОТОРЫХ
(НЕ ПОСЛОЙНЫЙ!) НЕ РЕАЛИЗУЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИ

Напомним, что через \mathcal{F}_n мы обозначаем n -ую поверхность Хирцебруха (см. определение 2.10, где сказано также о выборе вещественной структуры на \mathcal{F}_n). Говоря о вещественных псевдоголоморфных кривых на \mathcal{F}_n , мы будем рассматривать только такие ручные Conj -инвариантные почти комплексные структуры, для которых существует псевдоголоморфная кривая E , индекс самопересечения которой равен $-n$ (исключительная кривая). Такая кривая обязательно должна быть вещественной.

Для общих Conj -инвариантных структур на \mathcal{F}_n при $n \geq 2$ в [24] построены вещественные псевдоголоморфные кривые A , для которых изотопический тип кривой $\mathbb{R}A$ нереализуем алгебраически. Причина алгебраической нереализуемости примеров из [24] заключается в том, что иначе число вещественных точек пересечения $\mathbb{R}A$ с $\mathbb{R}E$ было бы большим, чем индекс пересечения $A.E$. Из этого, в частности, следует, что примеры из [24] нереализуемы в почти комплексных структурах с исключительной кривой.

В случае, если есть исключительная кривая, запреты, основанные на индексах пересечения со вспомогательными рациональными кривыми, непременны, однако можно применять метод Гильберта – Роона и технику кубических резольвент. Этими методами [21, 22] (см. также приложение А выше) доказана алгебраическая нереализуемость некоторых послойных изотопических типов, реализуемых псевдоголоморфно. Однако кривые в данных примерах изотопны (не послойно) алгебраическим.

В настоящем приложении методом кубических резольвент доказана алгебраическая нереализуемость некоторых (не послойных) изотопических типов кривых бистепени $(4, 16)$ на \mathcal{F}_4 , причем данные изотопические типы реализуемы вещественными псевдоголоморфными кривыми относительно ручно комплексной структуры, в которой есть исключительная кривая. Этот результат я получил одновременно с результатами, изложенными в [16], но не включил его в [16], так как собирался написать отдельную статью про применение метода кубических резольвент. Поскольку в [18, 22] и в настоящей статье этот

метод уже изложен, отдельную статью писать стало незачем, и я решил написать данное приложение.

Окружность, гладко вложенную в $\mathbb{R}\mathcal{F}_n$, будем называть *овалом*, если она ограничивает диск (поскольку $\mathbb{R}\mathcal{F}_n$ — тор или бутылка Клейна, это условие эквивалентно гомологичности нулю). Диск, ограничиваемый овалом, будем называть *внутренностью* овала. Если кривая имеет только одни овалы, то для идентификации ее изотопического типа мы будем использовать кодировку, введенную О.Я. Виро (при ее использовании подразумевается, что все вложенные окружности — овалы).

Предложение В.1. *Изотопические типы $1 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 18 \rangle$ и $1 \sqcup 1\langle 7 \rangle \sqcup 1\langle 12 \rangle$*

а). *нереализуемы вещественными алгебраическими кривыми бистепени $(4, 16)$ на $\mathbb{R}\mathcal{F}_4$;*

б). *реализуемы вещественными \mathcal{J} -голоморфными кривыми бистепени $(4, 16)$ на $\mathbb{R}\mathcal{F}_4$ для некоторой ручной conj -инвариантной почти комплексной структуры \mathcal{J} с исключительной \mathcal{J} -голоморфной кривой.*

Доказательство. а). Если один из данных изотопических типов реализуем вещественной псевдоголоморфной кривой A , то, с точностью до устранения зигзагов и симметрии, послойный изотопический тип кривой $\mathbb{R}A$ — либо $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\supset_1 \subset_1 o_2^{\alpha_1} o_3 o_2^{\alpha_2} \supset_1 \subset_2 o_2^{\alpha_3}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 19$, $\alpha_3 \in \{1, 7, 12, 18\}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2$, либо $B(\alpha_1, \alpha_2) = [\supset_1 \subset_1 o_2^{\alpha_1} \supset_1 o_1 \subset_1 o_2^{\alpha_2}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 19$, $\alpha_3 \in \{1, 7\}$. При переходе к кубической резольвенте они дают M -кривые бистепени $(3, 24)$ на \mathcal{F}_8 послойных изотопических типов $A'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [o_2 o_1^{\alpha_1} o_2 o_1^{\alpha_2} o_2 o_1^{\alpha_3}]$ и $B'(\alpha_1, \alpha_2) = [o_2 o_1^{\alpha_1} o_2^2 o_1^{\alpha_2}]$ соответственно.

Алгебраическая длина соответствующих кос равна двум. Из критерия квазиположительности [19] для кос из 3 нитей легко вывести, что изотопический тип A' реализуем псевдоголоморфно только в случае, если $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \{(17, 1, 1), (11, 7, 1), (11, 1, 7), (7, 5, 7)\}$. а изотопический тип B' не реализуем ни при каких значениях (α_1, α_2) .

Обозначим через $b = b(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; e_1, e_2)$ косу, отвечающую послойному изотопическому типу $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Она зависит от двух целочисленных параметров e_1, e_2 и имеет вид

$$b = a \sigma_3^{1+e_1} \sigma_1^{1-e_1} \sigma_2^{-\alpha_1} \tau_{2,3} \sigma_3^{-1} \tau_{3,2} \sigma_2^{-\alpha_2} a \sigma_3^{1+e_2} \sigma_1^{1-e_2} \sigma_2^{-\alpha_3} \Delta^4,$$

где $a = \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1}$, $\tau_{2,3} = \tau_{3,2}^{-1} = \sigma_3^{-1} \sigma_2$ и $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$.

Если $e_1 \not\equiv e_2 \pmod{2}$, то образ косы b в группе перестановок S_4 равен $(13)(23)$, т.е. замыкание косы L имеет две компоненты. Их индекс зацепления равен -3 , что невозможно. Поэтому будем считать, что $e_1 \equiv e_2 \pmod{2}$. В этом случае образ косы в S_4 тривиален. Из подсчета эйлеровых характеристик следует, что L ограничивает трехкомпонентную поверхность в шаре B^4 . Из подсчета индексов зацеплений компонент следует, что возможны 2 случая:

- (i) $e_1 \equiv e_2 \equiv 0 \pmod{2}$ и $e_2 - e_1 = 10$;
- (ii) $e_1 \equiv e_2 \equiv 1 \pmod{2}$ и $e_2 - e_1 = 11 - \alpha_3$.

Из [22; лемма 3.7] следует, что $(2|e_1| - 1) + (2|e_2| - 1) \leq 12$, т.е., $|e_1| + |e_2| \leq 7$ (см. конец п. 4.1). Это исключает случай (i) при всех $\alpha_3 \in \{1, 7\}$, а также случай (ii) при $\alpha_3 = 1$.

Остается рассмотреть случай (ii) при $\alpha_3 = 7$. Из неравенства Мурасуги-Тристрама следует, что определитель d зацепления L должен равняться нулю. Выражая e_2 через e_1 и вычисляя d при помощи программы `ssmW` из [16; Appendix] (или вручную при помощи матриц Гёритца, как в [21]), получаем $d = 24(347 - 876e_1 - 223e_1^2)$ при $\alpha_1 = 7$ и $d = 24(31e_1 + 137)(3 - e_1)$ при $\alpha_1 = 11$. В первом случае целочисленных решений уравнения $d(e_1) = 0$ нет, а во втором случае есть одно решение $e_1 = 3$, которое дает $e_2 = e_1 + 11 - \alpha_3 = 3 + 11 - 7 = 7$, что противоречит неравенству $|e_1| + |e_2| \leq 7$ (это решение отвечает псевдоголоморфной кривой, построенной в [16; §5.2]).

б). Изотопический тип $1 \sqcup 1\langle 7 \rangle \sqcup 1\langle 12 \rangle$ реализован в [16; §5.2].

Для реализации $1 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 18 \rangle$ заметим, что рассмотренная выше коса $b(17, 1, 1; e_1, 10 - e_1)$ не зависит от e_1 и является квазиположительной. Более того, при $e_2 = 10 - e_1$ квазиположительной является коса

$$a \sigma_3^{1+e_1} \sigma_1^{1-e_1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-16} \tau_{2,3} \sigma_3^{-1} \tau_{3,2} \sigma_2^{-1} a \sigma_3^{1+e_2} \sigma_1^{1-e_2} \sigma_2^{-1} \Delta^4,$$

отвечающая посылонному расположению $[\supset_1 \subset_1 o_2 \subset_2 \times_1 \supset_2 o_2^{15} o_3 o_2 \supset_1 \subset_2 o_2]$. Поскольку алгебраическая длина этой косы равна единице, для доказательства квазиположительности достаточно проверить, что эта коса сопряжена стандартной образующей.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Brugallé, *A bound on the number of jumps of real algebraic curves in Σ_n* , Preprint, 2006.
2. А.И. Дегтярев, В.М. Харламов, *Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: Du côté de chez Rokhlin*, Успехи Мат. Наук, 55:4, 2000, 128–212.
3. T. Fiedler, *Congruence mod 16 for symmetric M -curves*, Ксерокопия рукописного текста.
4. S. Fiedler-LeTouzé, S.Yu. Orevkov, *A flexible affine M -sextic which is algebraically unrealizable*, J. of Alg. Geometry **11** (2002), 293–310.
5. V. Florens, *On the Fox-Milnor theorem for the Alexander polynomial of links*, Int. Math. Res. Notices (2004), no. 2, 55–67.
6. М.А. Гушин, *Построения некоторых расположений коники и M -квинтики с одной точкой на бесконечности*, Вестник ННГУ, сер. мат., вып. 1(2), 2004, 43–52.
7. М.А. Гушин, *Коника и M -квинтика с одной точкой на бесконечности*, Записки научн. семина. ПОМИ, Т. 329, 2005, 14–27.
8. V.M. Kharlamov, O.Ya. Viro, *Extension of the Gudkov-Rohlin congruence*, Lect. Notes Math. **1346** (1991), 407–426.
9. A. Korchagin, G.M. Polotovskii, *On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), 1–24.
10. А.Б. Корчагин, Г.М. Полотовский, *О расположении плоской вещественной квинтики относительно пары прямых. II*. (In preparation).
11. А.Б. Корчагин, Е.И. Шустин, *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Изв. АН СССР, сер. мат., 52:6, 1988, 1181–1199.
12. С.М. Натанзон, *Аutomorphisms римановой поверхности M -кривой*, Функц. анализ и его прилож., 12:3, 1978, 82–83.
13. S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology **38** (1999), 779–810.
14. С.Ю. Оревкин, *Проективные коники и M -квинтики в общем положении с максимальной пересекающейся парой овалов*, Мат. Заметки, 65:4, 1999, 632–636.
15. S.Yu. Orevkov, *Quasipositivity test via unitary representations of braid groups and its applications to real algebraic curves*, J. of Knot Theory and its Ramifications **10** (2001), 1005–1023.

16. S.Yu.Orevkov, *Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy*, GAFA – Geom. and Funct. Anal. **12** (2002), 723–755.
17. S.Yu. Orevkov, *Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse. Math. (6), **12** (2003), 517–531.
18. С.Ю. Оревкив, *Построения расположений M -квартики и M -кубики с максимально пересекющимися овалом и нечетной ветвью*, Вестник ННГУ, сер. матем. моделирование и оптимальное управление, вып. 1(25), 2002, 12–48.
19. S.Yu. Orevkov, *Quasipositivity problem for 3-braids*, Turkish J. Math. **28** (2004), 837–852.
20. С.Ю. Оревкив, Г.М. Полотовский, *M -кубики и M -квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов*, Алгебра и анализ, 11:5, 1999, 166–184.
21. S.Yu.Orevkov, E.I.Shustin, *Flexible algebraically unrealizable curves: rehabilitation of Hilbert-Rohn-Gudkov approach*, J. für die Reine und Angew. Math. **511** (2002), 145–172.
22. S.Yu.Orevkov, E.I.Shustin, *Pseudoholomorphic algebraically unrealizable curves*, Moscow Math. J. **3** (2003), 1053–1083.
23. Г.М. Полотовский, *Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка*, Докл. АН СССР, 236:3, 1977, 1241–1245.
24. J.-Y. Welschinger, *Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$* , Proc. London Math. Soc. III Ser. **85** (2002), 367–392.
25. В.И. Звонилов, *Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперболюде и эллипсоиде*, Алгебра и анализ, 3:5, 1991, 88–108.

МАТЕМ. ИН-Т РАН ИМ. В.А. СТЕКЛОВА

ЛАБОРАТОРИЯ ИМ. ЭМИЛЯ ПИКАРА, УНИВ. ТУЛУЗА-3