CONJUGAISON QUASI SYMÉTRIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE À DES ROTATIONS ET APPLICATIONS AUX DISQUES SINGULIERS DE SIEGEL, I (?)

M.R. HERMAN

Version très préliminaire

Note du transcripteur : La source de ce texte datant du milieu des années 1980 est une photocopie de manuscrits d'Herman, scannée et mise en ligne par Shishikura. J'ai travaillé dessus en juin 2003, avril 2005, juin 2006 et juin 2014. J'ai effectué des modifications, qui apparaissent en vert, et dont je prends la responsabilité. Elles correspondent soit à des corrections mineures, soit à des omissions, soit à des parties illisibles des documents. J'ai également fait quelques corrections orthographiques sans les signaler. Je n'ai pas forcément respecté la ponctuation du manuscrit. J'ai pu malheureusement introduire des fautes de frappes ou des fautes d'orthographe durant la transcription. J'ai inséré des commentaire personnels sous formes de notes de bas de page portant la mention *Ndt* et indexées numériquement, de façon à les distiguer des notes d'Herman, que j'ai indexées alphabétiquement. Enfin, j'ai mis en rouge des morceaux du texte original dont je ne suis pas certain.

Arnaud Chéritat.

Introduction

Plan

§0 : Notations

§1 à §13 : Généralités sur la conjugaison quasi symétrique des difféomorphismes du cercle à des rotations.

§14 à §20 : Théorème 2 et sa démonstration.

§21 : Remarques sur le théorème 2.

§22 : Application du théorème 2 aux disques singuliers d'après E. Ghys.

§23 à §26 : généralisation de la construction d'E. Ghys.

Du §1 au §13 nous donnons quelques généralités sur la conjugaison quasi symétrique des difféomorphismes du cercle à des rotation. Le résultat principal est le théorème 1 au §1 qui est essentiel pour le théorème 2.

Le théorème 2 permet de montrer que si $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$ a la propriété A_0 (définie au §7) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_\lambda = f + \lambda$ soit quasi symétriquement conjugué à une translation $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) :

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$$

Date: 1986 ?

mais h n'est pas de classe C^2 (ou ce qui revient au même par [H,IV.4][1] $h \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{T}^1)$).

En utilisant au §22 la construction d'Étienne Ghys [G] le théorème permet de montrer qu'il existe de nombreuses fractions rationnelles ayant des disques singuliers de Siegel dont le bord est un quasi cercle ne contenant pas de point critique, en particulier il existe $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que cela soit le cas pour

$$z \mapsto e^{2\pi i\alpha}(z + z^2). \quad \text{(Théorème 3 §22.1)}$$

Évidemment, on obtient aussi des anneaux singuliers (§23) ayant des propriétés similaires et nous laissons au lecteur amateur de tératologie fabriquer, grâce aux quasi cercles, sa propre zoologie fantastique, par exemple en utilisant les constructions de M. Shishikura [S].

La construction de Ghys montre que le résultat d'E. Ghys [G] et ceux de [H2] nécessitent des conditions arithmétiques sur les nombres de rotation (§22.12 à §22.16).

Pour un survey sur les domaines singuliers nous renvoyons le lecteur (éventuel) par exemple à [H3].

Notations

On note $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et les translations (ou rotations) de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}^1$ par $R_\alpha(x) = x+\alpha$.

On désigne par $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ le cercle et par $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ le disque unité de $\mathbb{C}$.

Le groupe revêtement universel des difféomorphismes de classe C^r, $r \in \mathbb{N}\cup\{\infty, \omega\}$ est désigné par

$$\mathcal{D}^r(\mathbb{T}^1) = \{f \in \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{R}),\ f \circ R_p = R_p \circ f,\ p \in \mathbb{Z}\}$$

où $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{R})$ désigne le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$, croissants de classe C^r (où si $r = 0$ difféomorphisme C^0 veut dire homéomorphisme et $r = \omega$ désigne la classe $\mathbb{R}$-analytique).

Si $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, $C^r(\mathbb{T}^1)$ désigne les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$-périodiques de classe C^r.

Si $r \in \mathbb{N}$, $\phi \in C^r(\mathbb{T}^1)$, $D^r\phi$ désigne la dérivée $r^{\text{ème}}$ de ϕ avec la convention que $D^0\phi = \phi$. Sur $\mathbb{R}$ on met la métrique standard et Lipschitzienne et Höldérienne se rapportent toujours à cette métrique. Si $r \in \mathbb{N}$, $C^{1+\mathrm{Lip}}$ veut dire que la dérivée $r^{\text{ème}}$ est Lipschitzienne.

Si $\phi \in C^0(\mathbb{T}^1)$,

$$\|\phi\|_{C^0} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\phi(\theta)|$$

et $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}, d\theta)$ et $\| \ \|_{L^\infty}$ est la norme du supremum essentiel.

Un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est dit de type constant s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\gamma}{q^2}$$

et si $p/q \in \mathbb{Q}$, on convient que $q \geqslant 1$ et p et q sont premiers entre eux.

Si $S \subset \mathbb{C}$ est un sous-ensemble on désigne par ∂S sa frontière (ou bord).

1. Soit $h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$, h est dit un <u>homéomorphisme quasi symétrique</u> s'il existe $M \geqslant 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^*$ on ait

$$(1) \quad |h|_{\mathrm{qs}} = \sup_{x,t\neq 0}\left(\frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)}\right) \leqslant M$$

[1] Ndt : Théorème de Gottschalk et Hedlund, mais je pense que c'est plus simple que ça : si h' s'annule en un point, il s'annule alors sur son orbite et donc sur un ensemble dense et donc partout par continuité, ce qui est absurde.

ou ce qui revient au même

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \leqslant M \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \neq 0.$$

2. Soit $\mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1) = \big\{h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1),\ h$ est un homéomorphisme quasi symétrique$\big\}$.

L'ensemble $\mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ est un groupe puisque[2] (1) équivaut à

Pour tout $C \geqslant 1$, il existe $M(C) \geqslant 1$, croissante avec C, tel que tous intervalles adjacents $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [b,c]$, $a < b < c$ vérifiant

$$(2) \qquad \frac{1}{C} \leqslant \frac{|I_1|}{|I_2|} \leqslant C \qquad \textit{vérifient} \qquad \frac{1}{M(C)} \leqslant \frac{|f(I_1)|}{|f(I_2)|} \leqslant M(C)$$

où $|I_1| = |b-a|$ (sa longueur).

En effet, si on suppose que $t = b - a < c - b$ (l'autre cas étant analogue) on a, si

$$J_k = [b + (k-1)t, b + kt], \quad k = 1, 2, \dots$$

$|f(J_1)|/|f(I_1)| \leqslant M$, $|f(J_{k+1})|/|f(J_k)| \leqslant M$ donc

$$|f(J_k)|/|f(I_1)| \leqslant M^k$$

or

$$\bigcup_{k=1}^{l} J_k \supset I_2, \quad l = [C] + 1$$

d'où

$$\frac{|f(I_2)|}{|f(I_1)|} \leqslant M \frac{M^l - 1}{M - 1}.$$

On a $|f(I_2)|/|f(I_1)| \geqslant |f(J_1)|/|f(I_1)| \geqslant 1/M$ ce qui démontre (2).

3. Si h vérifie (1) alors par [A] ou [L] on a

$$h(x+t) - h(x) \leqslant \left(\frac{M}{M+1}\right)^n, \quad \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2^{-n}.$$

Ce qui implique que l'ensemble des homéomorphismes h qui vérifient (1) avec M fixé et $h(0) = 0$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme et que chaque $h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ est un homéomorphisme höldérien (i.e. $h - \mathrm{Id} \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$ et $h^{-1} - \mathrm{Id} \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$ où $0 < \beta < 1$ ne dépend que de la constante M).

4. Si h vérifie (1) il en est de même de $S_1 \circ h \circ S_2$ où S_1 et S_2 sont des applications affines (i.e. $x \mapsto ax + b$).

5. On projette $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ par $t \mapsto e^{2\pi i t}$ et $h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$ induit un homéomorphisme $\overline{h}$ de $\mathbb{S}^1$. Le théorème d'Ahlfors Beurling ([A] ou [L]) affirme que $\overline{h}$ s'étend en un homéomorphisme quasi conforme de $\overline{\mathbb{D}}$ si et seulement si h est un homéomorphisme quasi symétrique (ce qui implique aussi que $\mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ est un groupe).

6. Soit $f \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}$ son nombre de rotation.

Proposition. *Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

[2]Ndt : La stabilité par composition suit effectivement naturellement de (2). La stabilité par réciproque me semble demander un argument différent.

(i) $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ *avec* $h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ *;*

(ii) $\sup_{n \geqslant 1} \left| f^n \right|_{\mathrm{qs}} = M < +\infty$.

De plus, (ii) implique

$$\left| h \right|_{\mathrm{qs}} \leqslant M$$

Démonstration. Le fait que (i) implique (ii) résulte de 2. et 4. Par [H,IV.5], si $n \longrightarrow +\infty$,

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f^i - i\alpha \right)$$

converge uniformément vers une application h telle que $h - \mathrm{Id} \in C^0(\mathbb{T}^1)$, vérifiant

$$h \circ f = R_\alpha \circ h$$

(i.e. une semi conjugaison à R_α). Or $\left| h_n \right|_{\mathrm{qs}} \leqslant M$ et donc $h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ avec $\left| h \right|_{\mathrm{qs}} \leqslant M$. ■

Par [H,IV.5], si $\alpha \in \mathbb{Q}$, (i) équivaut à

(iii) $f^q = R_p$.

7. Soit $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$. On dit que f a la propriété A_0 si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $p/q \in \mathbb{Q}$ on a $(R_\lambda \circ f)^q \not\equiv R_p$. Les exemples suivants sont tirés de [H,III.3] et ont la propriété A_0.

— $f = \mathrm{Id} + \phi$ où ϕ s'étend en fonction entière de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ non constante (par exemple $\phi(\theta) = \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi\theta)$, $0 < |a| < 1$)

— L'homéomorphisme $\overline{f}$ induit sur $\mathbb{S}^1$ est la restriction d'une fraction rationnelle de degré $d \geqslant 2$, voir aussi [H1,IV].

8. Il suit de [H,III.5] que si f a la propriété A_0, alors l'adhérence K_f de l'ensemble $\left\{ \lambda,\ \rho(R_\lambda \circ f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \right\}$ est modulo 1 un ensemble de Cantor.

Par [H,XII.2], il existe un G_δ dense G de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que, si $\rho(R_\lambda \circ f) \in G$, alors par le théorème de Denjoy $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ avec $h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$, mais pour tout $0 < \beta < 1$, h n'est pas un homéomorphisme de classe C^β et donc par le §3, h n'est pas un homéomorphisme quasi symétrique. On peut même remplacer C^β par n'importe quel module de continuité donné à l'avance. Les exemples de 7 montrent que même si $f \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, le théorème de Denjoy ne permet pas d'obtenir "en général" un homéomorphisme quasi symétrique.

9. Dans la suite, $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1/2]$ et $\alpha = [a_1, a_2, \ldots] = 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots))$ désigne son développement en fractions continues et $(p_n/q_n)_{n \geqslant 0}$ les réduites : $q_0 = 1$, $p_0 = 0$, $q_1 = a_1 \geqslant 2$, $p_1 = 1$ et $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ si $n \geqslant 2$. On rappelle que l'on a (voir par exemple [H,V]), si $n \geqslant 0$,

$$(-1)^n \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n} \right) > 0$$

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{a_{n+1} q_n{}^2}$$

$$\text{et} \quad \left\| q_n \alpha \right\| = \left| q_n \alpha - p_n \right|$$

où on a posé

$$\|x\| = \inf_{p\in\mathbb{Z}} |x+p|, \ x \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a

$$(3) \quad \|q_{n-1}\alpha\| = a_{n+1}\|q_n\alpha\| + \|q_{n+1}\alpha\|.$$

Si $\alpha = [a_1, \ldots]$ vérifie $a_1 = 1$ alors $1-\alpha$ vérifie $1-\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$ avec $a_1 \geqslant 2$.

10. On se donne $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$ un homéomorphisme de classe P (cf [H,VI.4]) : on suppose qu'en tout point f a une dérivée à gauche et à droite et $\log Df$ est une fonction à variation bornée et on pose

$$V = \mathrm{Var}(\log Df) = \text{ la norme de mesure de } D\log Df \text{ sur } \mathbb{T}^1.$$

Ceci implique que f et f^{-1} sont absolument continues sur tout intervalle compact. Si $\rho(f) = \alpha$ alors on a l'inégalité de Denjoy [H,VI.4]

$$(4) \quad \left\|\log Df^{\pm q_n}\right\|_{L^\infty} \leqslant V$$

ce qui implique le théorème de Denjoy [H,VI.5]. Dans la suite, on posera

$$\widehat{f}^{q_n} = f^{q_n} - p_n$$
$$\text{et } I_n(x) = [x, \widehat{f}^{q_n}(x)]$$

où $[x, \widehat{f}^{q_n}(x)]$ désigne l'intervalle compact déterminé par x et $\widehat{f}^{q_n}(x)$.

11.

Théorème 1. *On suppose que f vérifie les hypothèses de 10 et qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ on ait*

$$(5) \quad \left\|\log Df^{q_n}\right\|_{L^\infty} \leqslant \frac{C}{(2+a_{n+1})}, \ n \geqslant 0$$

alors $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, $h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ et on a

$$(6) \quad \left|h\right|_{\mathrm{qs}} \leqslant 2e^{2C}.$$

<u>Démonstration</u> : (5) implique l'inégalité presque partout pour la mesure de Lebesgue

$$e^{-C} \underset{\text{p.p.}}{\leqslant} Df^{kq_n} \underset{\text{p.p.}}{\leqslant} e^C, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |k| \leqslant 2 + a_{n+1}$$

et donc

$$(7) \quad e^{-C} \leqslant |\widehat{f}^{kq_n}(I_n(x))|/|I_n(x)| \leqslant e^C, \quad |k| \leqslant 2 + a_{n+1}.$$

Soit h l'homéomorphisme donné par le théorème de Denjoy, uniquement déterminé si on impose que $h(0) = 0$ et vérifiant

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}.$$

Soit y tel que $h(y) = x$. L'inégalité (7) implique[3]

$$e^{-2C} \leqslant \frac{h\big(y + k\|q_n\alpha\|\big) - h(y)}{h(y) - h\big(y - k\|q_n\alpha\|\big)} \leqslant e^{2C}, \quad 1 \leqslant |k| \leqslant a_{n+1} + 1, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

[3]Ndt : Découper l'intervalle $[y - k\|q_n\alpha\|, y + k\|q_n\alpha\|]$ en intervalles de longueur $\|q_n\alpha\|$ et comparer la longueur de leurs images à la longueur de l'image de celui correspondant à $I_n(x)$. On peut dans l'énoncé remplacer $2 + a_{n+1}$ par $1 + a_{n+1}$.

Comme $\|q_n\alpha\|(a_{n+1}+1) \geqslant \|q_{n-1}\alpha\| \geqslant a_{n+1}\|q_n\alpha\|$ valable, même si $n=0$, avec la convention que $\|q_{-1}\alpha\| = 1$, on en déduit[4], pour tout $n \geqslant 0$,

$$\text{(8)} \quad \frac{1}{2}e^{-2C} \leqslant \frac{h(y+t)-h(y)}{h(y)-h(y-t)} \leqslant 2e^{2C}, \quad \text{si } \|q_n\alpha\| \leqslant |t| \leqslant \|q_{n-1}\alpha\|.$$

Il suit que (8) est vrai pour tout y et tout $0 < t < 1$, ce qui démontre le théorème. ■

12. Le corollaire suivant suit immédiatement de (4).

Corollaire. *Soit f un homéomorphisme de classe P tel que $\rho(f) = \alpha$ est un nombre de type constant (i.e. $\sup_{i\geqslant 1} a_i = l < +\infty$) alors $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ où $h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1)$ et*

$$\big|h\big|_{\mathrm{qs}} \leqslant 2\exp(V(2l+4))$$

en utilisant les notations du §10, c.à.d. $V = \mathrm{Var}(\log Df)$.

13. Exemple Soient $\lambda > 1$ et l'homéomorphisme linéaire par morceaux $g \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$ défini par

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda x, \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a = (\lambda+1)^{-1}, \\ g(x) &= 1 + \lambda^{-1}(x-1), \quad \text{si } a \leqslant x \leqslant 1, \\ g(x+p) &= p + g(x), \quad \text{si } p \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$

On choisit $0 < b < 1$ pour que $b + g = f$ vérifie $\rho(f) = \alpha$ où α est un nombre de type constant, et donc, par le corollaire précédent, on obtient

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1), \quad h(0) = 0.$$

Par [H,VI.7], sur $\mathbb{T}^1$, f mod 1 ne laisse pas invariant de mesure σ-finie absolument continue par rapport à la mesure de Haar m de $\mathbb{T}^1$, par conséquent l'unique mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}^1$, invariante par f mod 1, est singulière par rapport à m. Or μ est la dérivée au sens des distributions de h d'où il suit que h et h^{-1} sont singuliers par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour d'autre exemples d'homéomorphismes quasi symétriques non absolument continus, voir [AB] et [P].

14. On se donne $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$ et on suppose que f a la propriété A_0 que nous avons définie au §7. On pose[5] $K = K_f \cap [0,1]$. Quitte à remplacer f par $\lambda_1 + f$ où $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, on peut supposer que $K \subset]0,1[$ et

$$\big\{\rho(R_\lambda \circ f),\ \lambda \in K\big\} = \Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big]$$

On pose $f_\lambda = \lambda + f$.

15. (Sous les conditions du § précédent)

Théorème 2. *Il existe $\lambda \in K$ tel que l'on ait :*

[4] Ndt : Il est facile d'obtenir une borne qui dépend de C, mais la forme précise proposée demande peut-être quelques explications. Supposons pour simplifier que $t > 0$ et majorons l'expression. Soit k le plus grand tel que $k\|q_n\alpha\| \leqslant |t|$. Soit $y_j = y + j\|q_n\alpha\|$. Alors $h(y+t) - h(y) \leqslant h(y_{k+1}) - h(y)$ et $h(y) - h(y-t) \geqslant h(y) - h(y_{-k})$, d'où $\frac{h(y+t)-h(y)}{h(y)-h(y-t)} \leqslant \frac{h(y_k)-h(y)}{h(y)-h(y_{-k})} + \frac{h(y_{k+1})-h(y_k)}{h(y)-h(y_{-k})}$. Le premier terme de cette somme est $\leqslant e^{2C}$. Pour le deuxième, d'après (7) le numérateur est $\leqslant e^C|I_n(x)|$ et le dénominateur $\geqslant e^{-C}|I_n(x)|$.

[5] Ndt : K_f a été défini au §8.

(i) $f_\lambda = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}, \quad g \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1), \quad g(0) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

(ii) g *n'est pas de classe* C^2 *(et donc par*[6] *[H,IV] pas de classe* $C^{1+\mathrm{Lip}}$*).*

15.1 Nous avons besoin pour prouver le théorème 2 de rappels et de quelques préliminaires. On a

$$D(R_\lambda \circ f) = Df$$

et donc

$$\mathrm{Var}(\log Df_\lambda) = V$$

est indépendant de λ.

Par [H,VI.6], si $y, z \in I_n(x) = [x, \widehat{f}^{q_n}(x)]$, on a

$$(9) \quad e^{-V} \leqslant \frac{Df^j(y)}{Df^j(z)} \leqslant e^V \quad \text{pour } 0 \leqslant j < q_{n+1}.$$

Ce qui résulte de ce que les intervalles modulo 1

$$\Big(f^k(I_n(x))\Big)_{0 \leqslant k < q_{n+1}}$$

sont d'intérieurs 2 à 2 disjoints [H,V.8.3].

Il en résulte[7] que si $\xi_k \in I_n(x)$,

$$(10) \qquad \sum_{k=0}^{q_{n+1}-1} Df^k(\xi_k) \leqslant \frac{e^V}{|I_n(x)|} = e^V \Big|\widehat{f}^{q_n}(x) - x\Big|^{-1}.$$

16. Soient les nombres irrationnels $\alpha_{n,l} = [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} + l, a_{n+2}, \ldots]$ avec $l = 0, 1, \ldots$. Si on a supposé que

$$(11) \quad n \equiv 0 \bmod 2$$

alors (voir §9)

$$\frac{p_n}{q_n} < \alpha_{n,l+1} < \alpha_{n,l} < \alpha_{n,0}$$

et $\alpha_{n,l}$ a pour $n^{\text{ième}}$ réduite p_n/q_n.

Par [H,III.4], il existe un unique $\lambda_l \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\rho(f_{\lambda_l}) = \alpha_{n,l}.$$

Lemme 1. *Pour* $0 \leqslant j < q_n$ *on a*

$$(12) \quad f^j_{\lambda_{l+1}}(x) \in f^j_{\lambda_l}\Big(I_n\big(\widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x)\big)\Big) \equiv \big[f^j_{\lambda_l} \circ \widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x), f^j_{\lambda_l}(x)\big].$$

Démonstration. On a $\lambda_{l+1} < \lambda_l$ donc pour tout $j \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^j_{\lambda_{l+1}}(x) < f^j_{\lambda_l}(x).$$

Supposons par l'absurde que pour un $i < q_n$ et un $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$f^i_{\lambda_{l+1}}(x) < f^i_{\lambda_l} \circ \widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x)$$

donc

$$\widehat{f}^{q_n}_{\lambda_{l+1}}(x) = f^{q_n - i}_{\lambda_{l+1}} \circ f^i_{\lambda_{l+1}}(x) - p_n < f^{q_n - i}_{\lambda_l} \circ f^i_{\lambda_{l+1}}(x) - p_n < f^{q_n - i}_{\lambda_l}\big(f^i_{\lambda_l} \circ \widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x)\big) - p_n = x.$$

Ceci contredit

$$\widehat{f}^{q_n}_{\lambda_{l+1}}(x) > x \quad \text{pour tout } x$$

[6] Ndt : Le théorème de Gottschalk et Hedlund. Il implique que si α est irrationnel et si ϕ est une fonction L^∞ sur $\mathbb{T}$ telle que $\phi \circ R_\alpha - \phi$ est continue (a un représentant continu), alors ϕ est continue (a un représentant continu). Appliquer cela à la dérivée de $\log Dg$.

[7] Ndt : Explications : soit $I = I_n(x)$. Les $f^k(I)$ sont disjoints. La somme de leur longueur est donc $\leqslant 1$. Or $|f^k(I)| = \int_I Df^k \geqslant e^{-V} Df^k(\xi_k)\, |I|$.

puisque p_n/q_n est la $n^{\text{ème}}$ réduite de $\alpha_{n,l}$.

Corollaire.

$$(13) \qquad \sum_{j=0}^{q_n-1} \Big| - f^j_{\lambda_{l+1}}(x) + f^j_{\lambda_l}(x) \Big| \leqslant e^V \frac{\big|\widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x) - x\big|}{\big|\widehat{f}^{q_{n-1}}_{\lambda_l}(x) - x\big|}.$$

<u>Démonstration</u>. On a par le lemme 1 :

$$A(x) = \sum_{j=0}^{q_n-1} \big|f^j_{\lambda_l}(x) - f^j_{\lambda_{l+1}}(x)\big| \leqslant \sum_{j=0}^{q_n-1} \big|f^j_{\lambda_l}(\widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x)) - f^j_{\lambda_l}(x)\big|$$

et par la formule de la moyenne

$$A(x) \leqslant \sum_{j=0}^{q_n-1} Df^j_{\lambda_l}(\xi_j)\big|\widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x) - x\big|$$

où

$$\xi_l \in [\widehat{f}^{-q_n}(x), x] \subset [\widehat{f}^{q_{n-1}}(x), x]$$

et le corollaire résulte de (10). ■

Si on remplace (11) par

$$(11') \quad n \equiv 1 \bmod 2$$

alors

$$f_{\lambda_l} < f_{\lambda_{l+1}}$$

et (13) devient[8]

$$(13') \qquad \sum_{j=0}^{q_n-1} \big|f^j_{\lambda_{l+1}}(x) - f^j_{\lambda_l}(x)\big| \leqslant e^V \frac{|\widehat{f}^{-q_n}_{\lambda_l}(x) - x|}{|\widehat{f}^{q_{n-1}}_{\lambda_l}(x) - x|} \; .$$

17. Si $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ où $h \in \mathcal{D}^{1+\mathrm{Lip}}(\mathbb{T}^1)$ alors

$$(14) \quad \big\| \log Df^{q_n} \big\|_{C^0} \leqslant \|D \log Dh\|_{L^\infty} \|q_n\alpha\| \leqslant \frac{\|D \log Dh\|_{L^\infty}}{q_{n+1}}$$

puisque

$$\log Df^{q_n} \circ h = \log Dh \circ R_{q_n\alpha - p_n} - \log Dh.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose[9]

$$\widetilde{H}_2(\lambda) \equiv \widetilde{H}_2(f_\lambda) = \sup\Big(\sup_{i\in\mathbb{Z}}\big(\big\|Df^i_\lambda\big\|_{C^0}\big), \sup_{i\in\mathbb{N}}\big(\big\|D^2f^i_\lambda\big\|_{C^0}\big)\Big) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

On a $\widetilde{H}_2(\lambda) \geqslant 1$ et $\widetilde{H}_2(\lambda) = 1$ implique $f = R_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par [H,IV.6], f_λ est C^2 conjuguée à R_α si et seulement si

$$\widetilde{H}_2(\lambda) < +\infty$$

et si

$$\widetilde{H}_2(\lambda) \leqslant p + 1$$

on a $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ et h vérifie

$$(15) \quad \frac{1}{p+1} \leqslant Dh \leqslant p+1 \qquad \|D^2(h^{-1})\|_{L^\infty} \leqslant p+1 \quad \text{(cf [H,IV.6.2])}.$$

Ceci implique : $\|D \log Dh\|_{L^\infty} \leqslant (p+1)^3$ et $\|D^2 h\|_{L^\infty} \leqslant (p+1)^4$.

---

[8]Ndt : C'est identique à (13).

[9]Ndt : L'utilisation de la paire $(\mathbb{Z},\mathbb{N})$ est une façon condensée de dire que l'on prend la plus petite constante $C > 0$ telle que $\underline{\forall n \geqslant 0}$, $\forall x$, $\frac{1}{C} \leqslant |Df^i_\lambda(x)| \leqslant C$ et $|D^2 f^i_\lambda(x)| \leqslant C$.

Tout ce qu'on utilisera dans la suite est que si

$$f_\lambda = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad \widetilde{H}_2(\lambda) \leqslant p+1 \quad \text{implique que}$$

$h \in \mathcal{D}^{1+\mathrm{Lip}}(\mathbb{T}^1)$ (i.e. les difféomorphismes h de classe C^1 tels que Dh soit Lipschitzienne) vérifie les inégalités (15). Ceci résulte du théorème d'Ascoli et de ce que

$$h_n^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_\lambda^i - i\alpha), \quad \text{si } n \longrightarrow +\infty,$$

converge uniformément vers

$$h^{-1} = \mathrm{Id} + \phi, \quad \phi \in C^0(\mathbb{T}^1)$$

vérifiant

$$h^{-1} \circ f_\lambda = R_\alpha \circ h^{-1}.$$

Les inégalités résultent de ce que $\widetilde{H}_2(\lambda) \leqslant p+1$ implique $\frac{1}{p+1} \leqslant Df_\lambda^i \leqslant p+1$ et $\|D^2 f_\lambda^i\|_{L^\infty} \leqslant p+1$, pour tout $i \geqslant 0$.

18. Démonstration du théorème 2.

Nous allons construire des nombres $\mu_1, \dots, \mu_p$ dans K, tels que $\rho(f_{\mu_p}) = \alpha_p \in [0, \frac{1}{2}] - \mathbb{Q}$, associé à une suite d'entiers

$$2 < k_1 < k_2 < \dots$$

tels que, si $\alpha_p = [a_{1,p}, a_{2,p}, \dots]$ sont les développements en fractions continues des nombres α_p, ils satisfont :

$$a_{1,p} = 2 \qquad p \geqslant 1 \quad (\text{pour avoir } \alpha_p \in [0, \frac{1}{2}])$$

$$(16) \quad a_{n,p} = a_{n,p-1} \quad \text{sauf si } n = k_p$$

et

$$(17) \quad a_{n,p} = 1 \quad \text{si } n \neq k_j \quad 1 \leqslant j \leqslant p \quad \text{et} \quad n>1.$$

Nous allons montrer qu'on peut déterminer la suite $k_1, \dots, k_p, \dots$, les nombres α_p et une constante vérifiant

$$(18) \quad C_0 \geqslant 3V + 1 \;;$$

$$(18') \quad C_0 \geqslant 6\big\|D \log Df\big\|_{C^0} e^V + \frac{1}{3}$$

tels que pour tout p on ait par récurrence sur $p \geqslant 1$:

$$(19)_p \quad \forall k \geqslant 0, \ \big\|\log Df_{\mu_p}^{q_k(\alpha_p)}\big\|_{C^0} \leqslant \frac{C_p}{2 + a_{k+1}(\alpha_p)}$$

où les entiers $q_k(\alpha_p)$ et $a_{n+1}(\alpha_p)$ sont associés à α_p ;

$$(20)_p \quad C_0 \leqslant C_p = C_{p-1} + \frac{1}{2^p} \;;$$

$$(21)_p \quad \widetilde{H}_2(\mu_p) > p \;;$$

$$(22)_p \quad \begin{array}{l} \mu_p \in l_p \cap K \quad \text{où} \quad l_p = [\mu_{p-1} - \varepsilon_p, \mu_{p-1} + \varepsilon_p] \subset l_{p-1}, \quad \varepsilon_p > 0 \\ \qquad \text{et on a} \quad \widetilde{H}_2(\mu) > p, \quad \text{si } \mu \in l_p \cap K. \end{array}$$

Pour $p = 1$, on choisit $k_1 = 3$, $a_{1,3} = 1$, $k_2 > 10$, $l_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et on a $H_2(\mu) > 1$ si $\mu \in l_1$.

L'inégalité de Denjoy (4) montre que[10] pour tout $p \geqslant 1$,

$$(22) \quad \left\| \log Df_{\mu_q}^{q_k(\alpha_p)} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{C_0}{2 + a_{k+1}(\alpha_p)} \quad \text{si } k \neq k_2 - 1, \dots, k_p - 1.$$

19. Nous allons montrer comment passer à l'étape $p+1$.

Pour cela nous allons modifier α_p en $\alpha_{p+1} = [a_{1,p+1}, \dots, a_{k_{p+1},p+1}, 1, \dots]$. On pose $n+1 = k_{p+1}$ et

$$\beta_j = [b_1, \dots, j, 1, 1, \dots]$$

où

$$(23) \quad \begin{cases} b_k &= a_{k,p} \quad \text{si } k \neq n+1, \\ b_{n+1} &= j \geqslant 1. \end{cases}$$

Par continuité, il existe $\varepsilon'_{p+1} > 0$, $l'_{p+1} = [\mu_p - \varepsilon'_{p+1}, \mu_p + \varepsilon'_{p+1}] \subset l_p$ tel que si $\mu \in l'_{p+1}$, $\alpha = \rho(f_\mu)$ a les mêmes réduites (p_k/q_k) que α_p pour $k \leqslant k_p + 10$ et tel que l'on ait

$$(24) \quad \forall i \leqslant k_p, \quad \left\| \log Df_\mu^{q_i(\alpha)} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{C_p + 2^{-(p+1)}}{a_{i+1}(\alpha) + 2}, \quad \text{si} \quad \mu \in l'_{p+1}.$$

(A) On supposera que k_{p+1} est assez grand (voir §9) pour que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, si $\rho(f_{\lambda_j}) = \beta_j$, alors

$$(25) \quad \lambda_j \in l'_{p+1} \cap K.$$

Puisque β_j est un nombre de type constant, par [H,IX] on a

$$f_{\lambda_j} = h_j \circ R_{\beta_j} \circ h_j^{-1}, \quad h_j \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1).$$

On rappelle aussi que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,

$$(26) \quad q_n(\alpha) \geqslant 2^{(n-1)/2}.$$

(B) Si k_{p+1} est assez grand en utilisant (14) on obtient[11]

$$(27) \quad \left\| \log Df_{\lambda_1}^{q_n} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{\|D \log Dh_1\|_{L^\infty}}{q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{(a_{n+1}(\beta_1) + 2)(p+1)^2}$$

$(a_{n+1}(\beta_1) = 1)$.

Affirmation. *Il existe un plus grand entier $1 < l < +\infty$ tel que l'on ait*[12]

$$(28) \quad \left\| \log Df_{\lambda_l}^{q_n} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{1}{(l+2)(p+1)^2}$$

et donc

$$(29) \quad \left\| \log Df_{\lambda_{l+1}}^{q_n} \right\|_{C^0} > \frac{1}{(l+3)(p+1)^2}.$$

Démonstration. Il résulte de (27) que (28) est vraie pour $l = 1$. Si (28) est vraie pour tout l on aurait $\lambda_l \longrightarrow \lambda_\infty$, $\rho(f_{\lambda_\infty}) = \beta_\infty = p_n/q_n$ et f_∞ vérifie

$$\log Df_{\lambda_\infty}^{q_n} \equiv 0$$

soit $f_{\lambda_\infty}^{q_n} = R_{p_n}$ ce qui est contraire au fait que nous avons supposé que f a la propriété A_0. ■

Nous allons envisager 2 possibilités :

$$(30) \quad \widetilde{H}_2(\lambda_l) > p+1,$$

[10] Ndt : ... En supposant (17) et (18). En effet, $a_{k+1}(\alpha_p) = 1$ pour les valeurs de k considérées ici. Notez qu'il y a deux équations numérotées 22.

[11] Ndt : En effet, h_1 ne dépend pas de $k_{p+1} = n+1$ et $q_{n+1} \longrightarrow +\infty$.

[12] Ndt : On peut, dans (27) et dessous, remplacer le facteur $(1+p)^2$ par une constante. Voir le §21.9.

ou

$$(31) \quad \widetilde{H}_2(\lambda_l) \leqslant p+1.$$

19.1 Si (30) se produit on choisit $\alpha_{p+1} = \beta_l$. Comme l'application $\lambda \mapsto \widetilde{H}_2(\lambda)$ est semi continue inférieurement on peut trouver un intervalle $l_{p+1} \subset l'_{p+1}$ tel que l'on ait $(22)_{p+1}$. Il suit de (22), (24) et (28) que $(19)_{p+1}$ est bien vérifié, ce qui montre, que sous l'hypothèse (30), on peut passer à l'étape $p+1$.

19.2 On suppose que (31) est vérifiée. On choisit $\alpha_{p+1} = \beta_{l+1}$.

Affirmation. *On a, si k_{p+1} est assez grand,*

$$(32) \quad \widetilde{H}_2(\lambda_{l+1}) > p+1.$$

Démonstration. Si on suppose non (32), par (15), on en déduit que

$$\|D \log Dh_{l+1}\|_{L^\infty} \leqslant (p+1)^3$$

d'où par (14)

$$\big\| \log Df^{q_n}_{\lambda_{l+1}} \big\|_{C^0} \leqslant \frac{(p+1)^3}{a_{n+1}(\beta_{l+1})q_n}.$$

Il suit de (29) que l'on doit avoir

$$\frac{1}{(l+3)(p+1)^2} \leqslant \frac{(p+1)^3}{(l+1)q_n}, \quad l \geqslant 1,$$

soit

$$\frac{1}{2} q_n \leqslant (p+1)^5.$$

L'entier p est fixé, par (26), ceci ne peut être vrai

(C) si $k_{p+1} = n+1$ est assez grand.

Par l'absurde si (C) est vérifié l'affirmation suit. ■

Affirmation. *Si k_{p+1} est assez grand on a*

$$(33) \quad \big\| \log Df^{q_n}_{\lambda_{l+1}} \big\|_{C^0} \leqslant \frac{C_0}{a_{n+1}(\beta_{l+1})+2} = \frac{C_0}{l+3}.$$

Démonstration. On a, en utilisant (28),

$$\big\| \log Df^{q_n}_{\lambda_{l+1}} \big\|_{C^0} \leqslant \big\| \log Df^{q_n}_{\lambda_{l+1}} - \log Df^{q_n}_{\lambda_l} \big\|_{C^0} + \frac{1}{4(l+2)}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} B &= \big\| \log Df^{q_n}_{\lambda_{l+1}} - \log Df^{q_n}_{\lambda_l} \big\|_{C^0} = \Big\| \sum_{j=0}^{q_n-1} \log Df \circ f^j_{\lambda_{l+1}} - \log Df \circ f^j_{\lambda_l} \Big\|_{C^0} \\ &\leqslant \big\| D \log Df \big\|_{C^0} \Big\| \sum_{j=0}^{q_n-1} (f^j_{\lambda_{l+1}} - f^j_{\lambda_l}) \Big\|_{C^0}. \end{aligned}$$

En utilisant (13) et (13') on en déduit[13]

$$B \leqslant L \sup_\theta \left(\frac{|h_l(q_n\beta_l - p_n + \theta) - h_l(\theta)|}{|h_l(\theta - q_{n-1}\beta_l + p_{n-1}) - h_l(\theta)|} \right)$$

avec

$$L = \big\| D \log Df \big\|_{C^0} e^V.$$

Par la formule de la moyenne

$$\frac{h_l(q_n\beta_l - p_n + \theta) - h_l(\theta)}{h_l(\theta - q_{n-1}\beta_l + p_{n-1}) - h_l(\theta)} = \frac{Dh_l(\xi_1)}{Dh_l(\xi_2)} \, \frac{\|q_n\beta_l\|}{\|q_{n-1}\beta_l\|}$$

[13]Ndt : Il y a une erreur de signe sans gravité : il faut remplacer dans toute cette démonstration $q_n\beta_l - p_n + \theta$ par $p_n - q_n\beta_l + \theta$ et $\theta - q_{n-1}\beta_l + p_{n-1}$ par $\theta + q_{n-1}\beta_l - p_{n-1}$.

avec

$$\xi_1 \in [\theta, \theta + q_n\beta_l - p_n], \quad \xi_2 \in [\theta, \theta - (q_{n-1}\beta_l - p_{n-1})] \ ;$$

d'où

$$B_1 = \left| \frac{Dh_l(\xi_1)}{Dh_l(\xi_2)} - 1 \right| \leqslant \|D^2 h_l\|_{L^\infty} \Big\| \frac{1}{Dh_l} \Big\|_{C^0} \|q_{n-1}\beta_l\|.$$

En utilisant (31) et (15) on conclut que[14]

$$B_1 \leqslant (p+1)^5 \|q_{n-1}\alpha_p\| \leqslant (p+1)^5 \frac{1}{q_n}.$$

L'entier p est fixé et donc

(D) si k_{p+1} est assez grand

en utilisant (26) on a

$$B_1 \leqslant \frac{1}{2}$$

et

$$B \leqslant L \, \frac{3}{2} \, \frac{\|q_n\beta_l\|}{\|q_{n-1}\beta_l\|}.$$

Il suit de (3) que

$$B \leqslant \frac{3L}{2} \, \frac{1}{a_{n+1}(\beta_l)} = \frac{3L}{2l}.$$

On a finalement en utilisant (18') :

$$\big\| \log Df^{q_n}_{\lambda_{l+1}} \big\|_{C^0} \leqslant \frac{3}{2} \, \frac{L}{l} + \frac{1}{4(l+2)} \leqslant \frac{C_0}{l+3}.$$

■

On conclut maintenant en utilisant (32) et 19.1 qu'il existe un intervalle $l_{p+1} \subset l'_{p+1}$ tel que l'on ait $(22)_{p+1}$. Il suit de (22), (24) et (33) que $(19)_{p+1}$ est vérifiée.

Avec les choix (A), (B), (C) et (D) sur k_{p+1} nous avons montré comment construire α_{p+1} tel que $f_{\mu_{p+1}}$ vérifie $(19)_{p+1}$ à $(22)_{p+1}$.

20. Fin de la démonstration du théorème 2.

Il suit du théorème 1 et de $(19)_p$, que pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$f_{\mu_p} = g_p \circ R_{\alpha_p} \circ g_p^{-1} \quad \text{avec} \quad g_p \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1), \ g_p(0) = 0$$

et

$$(34) \quad \big| g_p \big|_{\mathrm{qs}} \leqslant 2e^{2C_\infty},$$

avec

$$C_\infty = \sup_p C_p = C_0 + 1.$$

Soit $l_\infty = \bigcap_{p \geqslant 1} l_p \cap K$ qui est compact non vide. Par compacité, si $\lambda = \mu_\infty \in l_\infty \cap K$ et si g_∞ est une valeur d'adhérence de la suite $(g_p)_{p\geqslant 1}$ pour la C^0 topologie (c.f. §3) par passage à la limite uniforme on a

$$f_{\mu_\infty} = g_\infty \circ R_{\alpha_\infty} \circ g_\infty^{-1} \quad \text{avec} \quad g_\infty \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1), \ g_\infty(0) = 0$$

et

$$\big| g_\infty \big|_{\mathrm{qs}} \leqslant 2e^{2C_\infty}$$

(on utilise (34) et le §3).

Il suit du §7 que l_∞ est réduit à un point $\mu_\infty \in K$ et $\rho(f_\infty) = \alpha_\infty \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (puisque f a la propriété A_0). Ceci démontre la partie (i) du théorème 2.

---

[14]Ndt : Il faut remplacer α_p par $\frac{p_n}{q_n}$.

Pour voir (ii), il suit de $(22)_p$, comme $\mu_\infty \in l_p$, qu'on a

$$\widetilde{H}_2(\mu_\infty) > p, \quad \text{pour tout } p \geqslant 1,$$

et donc $\widetilde{H}_2(\mu_\infty) = +\infty$. (ii) résulte maintenant du §17. ■

21. Remarques :

21.1 Le point crucial de toute la démonstration est (33).

21.2 Si $f \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$, f_{μ_∞} est limite de la suite f_{μ_p} où chaque $\rho(f_{\mu_p})$ est un nombre de type constant et donc par [H,IX] $f_{\mu_p} = g_p \circ R_{\alpha_p} \circ g_p^{-1}$ avec $g_p \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$.

21.3 On pourrait partir de $\alpha_1 = [a_{1,1}, \ldots, a_{1,k}, \ldots] \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en supposant seulement que

$$a_{1,k} = 1 \quad \text{si} \quad k \geqslant k_0.$$

21.4 Sans rien changer, on peut remplacer (17) par

$$1 \leqslant a_{j,p} \leqslant t \quad \text{si} \quad j \neq k_q,\ q \leqslant p$$

où $t \in \mathbb{N}^*$ est donné.

En fait, on peut faire beaucoup mieux si on utilise les faits suivants :[15]

$$(34') \qquad \left\| \widehat{f}^{q_n} - \mathrm{Id} \right\|_{C^0} \leqslant L_1(1 + e^{-V})^{-n/2}$$

qui suit de [H,VIII.2], avec $L_1 = \sup(\left\| \widehat{f}^{q_1} - \mathrm{Id} \right\|_{C^0}, \left\| f - \mathrm{Id} \right\|_{C^0})$;

$$(35) \quad \left\| \log Df^{q_n} \right\|_{C^0} \leqslant L_2 \left\| \widehat{f}^{q_n} - \mathrm{Id} \right\|_{C^0}^{1/2}$$

qui est l'inégalité de Yoccoz [Y1], avec L_2 une constante ne dépendant que de $\left\| D^2 \log Df \right\|_{C^0}$. Si $f \in \mathcal{D}^r(\mathbb{T}^1)$, $r \geqslant 4$, on a encore beaucoup mieux si on utilise [Y2].

21.5

Conjecture. *Le théorème 2 reste vrai si on remplace (i) par*[16]

$$(i') \quad f_\lambda = g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \quad \textit{avec} \quad g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{T}^1).$$

En utilisant (34') et (35) il suffirait par la même démonstration que pour [H,IX.1.6] d'assurer que[17]

$$\sum_{j=1}^{p} \left\| \log Df_{\mu_p}^{q_{k_j}(\alpha_p)} \right\|_{C^0} a_{k_j+1}(\alpha_p) \leqslant C_p$$

avec $\sum_{p \geqslant 1} C_p < +\infty$.

Pour cela, il serait peut-être possible d'améliorer (33).

21.6 Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $\eta > 0$ tel que si $\left\| D^3 f \right\|_{C^0} \leqslant \eta$ alors l'homéomorphisme g de (i) vérifie :

$$(36) \quad \left| g \right|_{\mathrm{qs}} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Pour voir ceci, on choisit k_1 très grand, on utilise (34') et (35), on remplace dans l'inégalité (28) le facteur $\frac{1}{(p+1)^2}$ par $\frac{1}{(p+t)^2}$ avec t fixé mais grand.

---

[15] Ndt : Dans l'original, il y a deux équations numérotées 34.

[16] Ndt : $\mathcal{D}^1(\mathbb{T}^1)$ désigne les C^1-difféomorphismes (préservant l'orientation).

[17] Ndt : L'auteur a probablement voulu dire $\forall j$, $\exists C_j$, $\forall p$, $\left\| \log Df_{\mu_p}^{q_{k_j}(\alpha_p)} \right\|_{C^0} a_{k_j+1}(\alpha_p) \leqslant C_j$ avec $\sum_1^\infty C_j < +\infty$.

On peut choisir C_0 petit,

$$(20')_p \quad C_0 \leqslant C_{p+1} \leqslant C_p + \frac{1}{2^{p+t}}, \quad t \geqslant 1 \text{ grand}$$

et on remplace $(19)_p$ par

$$(19')_p \quad \sup_{p\geqslant j\geqslant 1} \left\| \log Df_{\mu_p}^{q_{k_j-1}(\alpha_p)} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{C_0}{a_{k_j}(\alpha_p)+2}.$$

Pour estimer $\left\| \log Df_{\mu_p}^{q_k} \right\|_{C^0}$, si $k < k_1$, on utilise que η est petit, et, si $k > k_1$, $k \neq k_j - 1$ on utilise (34') et (35).

L'inégalité (35) force l à être très grand ce qui permet dans (6) de remplacer le facteur $1/2$ par $1+\varepsilon/2$.

21.7

Proposition. *Soit α un nombre de Liouville. Alors il existe $f_\infty \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f_\infty) = \alpha$ tel que l'on ait*

(i') f_∞ est C^1-conjugué à R_α ;

(ii) f_∞ n'est pas C^2-conjugué à R_α.

La démonstration est plus simple que la démonstration du théorème 2. Nous avons d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $t > 0$, il existe $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$ tel que l'on ait*

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad \text{où} \quad h \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1),\ h(0) = 0$$

vérifiant

$$\begin{aligned} \left\| \log Df \right\|_{C^r} &\leqslant \varepsilon \ ; \\ \left\| \log Dh \right\|_{C^0} &\leqslant \varepsilon \ ; \\ \text{et} \quad \left\| D\log Dh \right\|_{C^0} &\geqslant t. \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>. Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ vérifiant, $q \geqslant 2$, $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^k}$, q et k très grands (c'est possible puisque α est un nombre de Liouville). Soit

$$\log Dh = \frac{\varepsilon}{100}\cos(2\pi q\theta) + \lambda$$

où λ vérifie

$$e^\lambda \int e^{\frac{\varepsilon}{100}\cos(2\pi q\theta)} d\theta = 1.$$

On détermine f par

$$\begin{aligned} \log Df \circ h &= \log Dh \circ R_\alpha - \log Dh \\ &= \frac{\varepsilon}{200}\Big[(e^{2i\pi q\alpha} - 1)e^{2i\pi q\theta} + (e^{-2i\pi q\alpha} - 1)e^{-2i\pi q\theta}\Big]. \end{aligned}$$

Si q et k sont assez grands, on voit facilement en utilisant

$$\left|e^{2i\pi q\alpha} - 1\right| \leqslant \text{constante}\ \frac{1}{q^{k-1}}$$

que les inégalités du lemme sont vérifiées. ■

<u>Démonstration de la proposition</u>. Soit d_∞ une métrique complète définissant la C^∞ topologie du groupe topologique Polonais $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$. Nous allons construire par récurrence, sur $p \geqslant 1$,

$$f_p = h_p \circ R_\alpha \circ h_p^{-1}, \quad h_p \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1),\ h_p(0) = 0$$

$$h_p = h_{p-1} \circ g_p, \quad g_p \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1),\ g_p(0) = 0$$

tel que l'on ait pour tout $p \geqslant 1$:

$$(37)_p \quad d_\infty(f_p, f_{p+1}) < \frac{1}{2^p}\ ;$$

$$(38)_p \quad \left\| \log Dg_p \right\|_{C^0} < \frac{1}{2^p}\ ;$$

$$(39)_p \quad H_2(f_p) = \sup_{k \geqslant 1} \left\| D^2 f_p^k \right\|_{C^0} > p - 1\ ;$$

$$(40)_p \quad f_p \in U_p \subset U_{p-1},$$

U_p est un ouvert où $\forall f \in U_p$, $H_2(f) > p-1$, $\mathrm{diam}(U_p) < \frac{1}{2^p}$ (diamètre pour la métrique d_∞).

On choisit $f_1 = R_\alpha$, $h_1 = \mathrm{Id}$ et $U_1 = \left\{ f,\ d_\infty(R_\alpha, f) < \frac{1}{2} \right\}$.

On veut montrer comment passer à l'étape $p+1$.

Si $H_2(f_p) \leqslant p$; en utilisant (15) et[18] le lemme, il existe g_{p+1} tel que $h_{p+1} = h_p \circ g_{p+1}$, $f_{p+1} \in U_p$ et vérifie $(37)_{p+1}$, $(38)_{p+1}$ et $(39)_{p+1}$.

Si $H_2(f_p) > p$ on choisit $g_{p+1} = \mathrm{Id}$.

Comme l'application $f \mapsto H_2(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi continue inférieurement pour la C^∞-topologie, on a $f_{p+1} \in U_p \cap H_2^{-1}([p, +\infty]) = V_p$ est ouvert (non vide) et on peut trouver U_{p+1} vérifiant $(40)_{p+1}$ inclus dans V_p. Ceci achève par récurrence la construction de la suite $(f_p)_{p \geqslant 1}$.

Si $p \longrightarrow +\infty$, $(f_p)_{p \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$ d'où $f_p \longrightarrow f_\infty \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{T}^1)$ dans la C^∞ topologie. Par $(40)_{p+1}$, on a

$$\bigcap_{p \geqslant 1} U_p = \{f_\infty\}.$$

Si $p \longrightarrow +\infty$, il suit de $(38)_p$ que $h_p \longrightarrow h_\infty \in \mathcal{D}^1(\mathbb{T}^1)$ dans la C^1-topologie et on a $f_\infty = h_\infty \circ R_\alpha \circ h_\infty^{-1}$. Il suit de $(39)_p$ et $(40)_p$ que $H_2(f_\infty) = +\infty$ et il résulte[19] du §17 que $h_\infty \notin \mathcal{D}^{1+\mathrm{Lip}}(\mathbb{T}^1)$. ■

21.8 Le théorème 2 s'applique à $f \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$. Malheureusement, si $f \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$ l'auteur de ces lignes n'est pas parvenu à adapter à ce cas l'argument très simple que nous avons donné juste avant[20] 21.7. La raison profonde vient de ce qu'avec la C^ω-topologie $\mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$ n'est pas un espace de Baire ni d'ailleurs métrisable.[21]

21.9 Nous avons utilisé le théorème fondamental[22] de [H] pour démontrer (32) et (33) mais cela n'est pas nécessaire si on utilise le §17.

---

[18]Ndt : On utilise (15) pour obtenir $(39)_{p+1}$, on ne l'utilise pas sur l'hypothèse $H_2(f_p) \leqslant p$.

[19]Ndt : On utilise le sens facile.

[20]Ndt : Je pense que l'auteur a voulu dire « l'argument très simple de 21.7 ».

[21]Ndt : On appelle aujourd'hui *nombres de Herman* la classe des nombres de rotations pour lesquels toute $f \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$ a sa conjugaison h qui est C^ω. Yoccoz a démontré que la classe de Herman contient des nombres qui sont liouvilliens. Pour ceux-là, par définition, pour toute $f \in C^\omega$, la conjugaison h est nécessairement C^ω. Même en prenant α encore plus proche des rationnels, la construction du lemme semble échouer : la raison superficielle en est que lors du passage de $\log Df \circ h$ à $\log Df$, la composition avec h^{-1} fait croître les dérivées successives de f au moins comme une exponentielle de raison $e^{\pi q}$. Herman a choisi de prendre h entière mais si on prend h^{-1} entière alors on peut s'en sortir : bien que $\log Dh$ ait un petit domaine d'holomorphie, la fonction f en a un bien plus gros, si on la définit comme la composée de la rotation rationnelle p/q et du temps $\alpha - p/q$ du flot du champ de vecteur préimage par h^{-1} du champ trivial d/dz. On remarquera les liens entre l'approche d'Herman et la méthode d'Anosov et Katok.

[22]Ndt : Le théorème fondamental, énoncé au [H,IX], dit qu'un difféomorphisme C^∞ dont le nombre de rotation « satisfait à une conditions A » est automatiquement $\mathbb{C}^\infty$ conjuguée à la rotation ; la condition A est définie au [H,V], ces nombres sont de type Roth et forment une classe de mesure de Lebesgue pleine. Cependant il ne semble n'avoir utilisé que le caractère C^2 des conjugaisons h_l, et uniquement pour les nombres de type constant. Si jamais l'une d'entre elle n'était pas C^2 on pourrait alors stopper la récurrence : rappelons que l'inégalité de Denjoy (4) assure la qs-conjugaison quand le nombre de rotation est de type constant.

Nous l'avons aussi utilisé pour avoir (27) pour conclure l'existence d'un entier l vérifiant (28) et (29). On peut l'éviter en remplaçant (27), (28) et (29) par :

$$(27') \quad \left\| \log Df_{\lambda_1}^{q_n} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{3V}{a_{n+1}(\beta_1)+2} \ ;$$

$$(28') \quad \left\| \log Df_{\lambda_l}^{q_n} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{3V}{a_{n+1}(\beta_l)+2} \ ;$$

$$(29') \quad \left\| \log Df_{\lambda_{l+1}}^{q_n} \right\|_{C^0} \leqslant \frac{3V}{a_{n+1}(\beta_{l+1})+2} \ ;$$

en choisissant C_0 assez grand et en modifiant un peu les démonstrations de (32) et (33).[23]

22. Application aux disque singuliers de Siegel d'après E. Ghys [G].

Ce §22 doit être considéré comme dû à E. Ghys [G] à quelques petites améliorations près et quelques détails supplémentaires.

22.1 Soit $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ une fraction rationnelle de la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, de degré $d > 1$, laissant invariant $\mathbb{S}^1 = \big\{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\big\}$ et telle que $f\big|_{\mathbb{S}^1}$ soit un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique. On note le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\big\}$.

22.2 Par exemple :

$$g : z \mapsto z^2 \frac{1-\bar{a}z}{z-a} \quad \text{avec} \quad 0 < |a| < 1 \text{ et } |a| < \frac{1}{3}.$$

Pour tous les exemples, voir [H1,IV], et on a $d = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

22.3 Si on relève $f\big|_{\mathbb{S}^1}$ à $\mathbb{R}$ en $\widetilde{f}$ la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1$ étant donnée par $t \mapsto e^{2\pi i t}$ alors $\widetilde{f}$ a la propriété A_0 et μf, $\mu = e^{2\pi i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ donne la famille $\widetilde{f} + \lambda \equiv R_\lambda \circ \widetilde{f}$.

22.4 Soit $\mu \in \mathbb{S}^1$ tel que $\alpha = \rho(\mu f) \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, où $\rho(\mu f) = \rho(\widetilde{\mu f}) \bmod 1$([a]), mais μf n'est pas C^ω-conjugué à $r_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z$.

Soit $C_1 = \big\{c_1, \ldots, c_q \,\big|\, c_i$ est un point critique de f et pour tout $j > 0$ $f^j(c_i) \notin \mathbb{S}^1\big\}$. La proposition suivante est une petite modification d'un argument de P. Fatou.

22.5

Proposition. *Avec les hypothèses de 22.4 l'ensemble*

$$L = \omega_f(C_1) = \bigcap_{N \geqslant 1} \overline{\bigcup_{j \geqslant N} f^j(C_1)}$$

contient $\mathbb{S}^1$.

Démonstration. Puisque l'ensemble fermé L est invariant par f, si $L \cap \mathbb{S}^1 \neq \varnothing$ alors par le théorème de Denjoy $L \supset \mathbb{S}^1$. Si on suppose par l'absurde que $L \cap \mathbb{S}^1 = \varnothing$, alors on peut déterminer une suite de déterminations de l'inverse de f^n telles que $(f^{-n})_{n \geqslant 1}$ sont définies pour $n \geqslant 1$ sur $A = \{\frac{1}{r} < |z| < r\}$ où $r > 1$ et vérifient

$$f^{-n}\big|_{\mathbb{S}^1} = (f\big|_{\mathbb{S}^1})^{-n}.$$

[a] Le nombre de rotation d'un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1$ dépend d'une orientation de $\mathbb{S}^1$ et nous choisissons celle donnée par $t \mapsto e^{2\pi i t}$.

[23] Ndt : En réalité, il semble n'avoir déjà appliqué que le §17 pour justifier (27), (28) et (29), et il aurait pu directement se servir de (27'), (28') et (29'). Je n'ai pas trouvé où il a utilisé ni le théorème fondamental, ni le facteur $(p+1)^2$.

La famille $(f^{-n}\big|_A)_{n\geqslant 1}$ est normale (si r est assez petit $f^{-n}(A)$ évite pour tout $n \geqslant 1$ 3 cycles périodiques distincts donnés à l'avance, et après conjugaison de f par un élément de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ on peut supposer que 2 de ces cycles contiennent les points 0 et ∞). On relève par $z \mapsto e^{2\pi i z} \in \mathbb{S}^2 - \{0,\infty\}$, $f^{-n}\big|_A$ en $\widetilde{f}^{-n}\big|_{\widetilde{A}}$ où

$$\widetilde{A} = \big\{z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Im} z| < \log r\big\}$$

et $\widetilde{f}^{-n}\big|_{\mathbb{R}} = (\widetilde{f}\big|_{\mathbb{R}})^{-n}$. La famille

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\widetilde{f}^{-i}\big|_{\widetilde{A}} - i\widetilde{\alpha}), \quad \widetilde{\alpha} = \rho(\widetilde{f})$$

est normale de A dans $\mathbb{S}^2$ (i.e. équicontinue pour la topologie compacte ouverte sur $C^0(\widetilde{A},\mathbb{S}^2)$). Soit $(h_{n_i})_{i\geqslant 0}$ tel que $h_{n_i} \longrightarrow h$ dans la topologie compacte ouverte où $1 < n_i < n_{i+1}$. Sur $\mathbb{R}$ on a

$$h \circ f = R_{-\alpha} \circ h, \quad h \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$$

et donc[24]

$$h \neq \{\infty\}.$$

On a sur $\widetilde{A}$

$$h \circ f(z) = R_{-\alpha} \circ h(z), \quad z \in \widetilde{A}$$

ceci implique $h\big|_{\mathbb{R}}$ est C^ω et par[25] [H,IX.6.3] on conclut que $h \in \mathcal{D}^\omega(\mathbb{T}^1)$. Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite en 22.4 et montre par l'absurde que $L \cap \mathbb{S}^1 \neq \varnothing$. ∎

22.6 Remarque[b] : même si c_k est un point critique de f et $l_k = f^j(c_k) \in \mathbb{S}^1$ on peut bien définir $f\big|_A^{-n}$ si on suppose que $L \cap \mathbb{S}^1 = \varnothing$ et r est assez petit. En effet, si $C = \{\text{points critiques de } f\}$, $VC = \{\text{valeurs critiques de } f\} = f(C)$, $VC_n = VC(f^n) = VC \cup f(VC) \cup \cdots \cup f^{n-1}(VC)$

$$f^n : \mathbb{S}^2 - f^{-n}(VC_n) \to \mathbb{S}^2 - VC_n \text{ est un revêtement.}$$

Comme $f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est un difféomorphisme C^ω, sur un petit voisinage V_k de l_k, on peut choisir un détermination de $f^{-n}\big|_V$ telle que $f^{-n}\big|_{\mathbb{S}^1} = (f\big|_{\mathbb{S}^1})^{-n}$. Puis on peut prolonger $(f\big|_{\mathbb{S}})^{-n}$ sur un anneau A évitant L et $\bigcup_{j\geqslant 1} f^j(C - C_1) - \mathbb{S}^1 = L_1$ en recouvrant $A - \bigcup V_k$ par une suite finie d'ouverts U_j simplement connexes : au voisinage de l_k on choisit un recouvrement par secteurs (voir la figure).

[b]Cet argument est implicitement utilisé plusieurs fois par P. Fatou et G. Julia et nous l'avons aussi implicitement utilisé dans [H2] pages [pages manquantes].[26]

[24]Ndt : Autrement dit il utilise que la série définissant h_n est connue pour converger sur $\mathbb{R}$ vers la conjuguante à la rotation.
[25]Ndt : Référence erronée ? Et pourquoi la conclusion n'est-elle pas immédiate ?
[26]Ndt : J'ai relu [H2] intégralement et je n'ai pas su trouver où cette utilisation implicite a lieu.

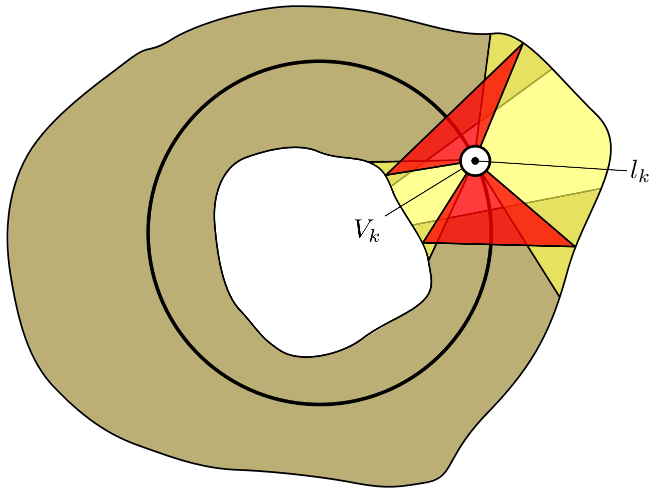

Figure : Exemple d'un recouvrement de $A - V_k$, dans le cas où il y a un seul point c_k. Deux des U_i sont en rouge, deux en jaune et un en brun.[27]

22.7 La construction de Ghys.

On se donne f comme en 22.1 et on choisit $\mu \in \mathbb{S}^1$ tel que $\mu f = h^{-1} \circ r_\alpha \circ h$, $r_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$ où h est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1$ quasi symétrique mais μf n'est pas C^ω-conjugué à R_α (c'est possible par le théorème 2). Par le théorème d'Ahlfors-Beurling [A] ou [L] il existe un homéomorphisme K-quasi conforme de $\mathbb{D}$ tel que $H\big|_{\mathbb{S}^1} = h$. Soit

$$t(z) = \mu f(z), \quad \text{si} \quad |z| \geqslant 1 \ ;$$
$$t(z) = H^{-1} \circ r_\alpha \circ H, \quad \text{si} \quad |z| \leqslant 1.$$

L'application continue $t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ laisse invariante la forme de Beltrami u mesurable vérifiant

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant \delta < 1 \quad \text{où} \quad (\delta + 1)(1 - \delta)^{-1} = K$$

définie de la façon suivante

$$u(z) = \frac{H_{\overline{z}}}{H_z} \quad \text{où} \quad H_{\overline{z}} = \overline{\partial} H,\ H_z = \partial H \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

$$u(t^n(z)) = u(z)\frac{\overline{(f^n)'(z)}}{(f^n)'(z)} \quad \text{si}$$

$z \in V_n = t^{-n}(\mathbb{D}) \cap \{|z| > 1\}$ $\quad n \geqslant 1$ (on utilise que les ensembles ouverts V_n sont 2 à 2 disjoints[28]) ; et

$$u(z) = 0, \quad \text{si} \quad z \notin \mathbb{D} \cup \Big(\bigcup_{n \geqslant 1} V_n\Big).$$

Soit G donné par le théorème de Morrey-Ahlfors-Bers [A] un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$, K quasi conforme et donc absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et vérifiant $G(\infty) = \infty$

$$G_{\overline{z}}/G_z = u(z).$$

L'application $f_1 = G \circ t \circ G^{-1}$ est continue, localement quasi conforme sauf en un nombre fini de points, absolument continue sur presque toute droite et presque partout conforme. f_1 est donc une fraction rationnelle de $\mathbb{S}^2$.

[27] Ndt : Je me suis permis de compléter le dessin. On peut faire plus simple, mais ce n'est pas l'important ici.

[28] Ndt : Il faut légèrement modifier la définition de V_n pour qu'ils soient 2 à 2 disjoints : il faut prendre $n =$ le premier itéré qui tombe dans $\mathbb{D}$.

22.8 La fraction rationnelle f_1 a un disque singulier de Siegel $G(\mathbb{D})$. L'ouvert $G(\mathbb{D})$ est bien la composante connexe de $\mathbb{S}^2 - J(f_1)$ contenant le point fixe elliptique linéarisable $G \circ H^{-1}(0)$ de multiplicateur $e^{2\pi i\alpha}$, puisque $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ n'est pas $\mathbb{R}$-analytiquement conjugué à R_α. Comme t est injective sur un voisinage de $\mathbb{S}^1$, f_1 est injective sur un voisinage du quasi cercle $\partial G(\mathbb{D})$ et donc f_1 n'a pas de point critique sur $\partial G(\mathbb{D})$.

22.9 Le degré de f est de la forme $2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ et celui de f_1 est $k+1$ (on a supprimé les k pôles ou images inverses par g de $\{\infty\}$, inclus dans $\mathbb{D}$).

22.10 Si on part d'une application $\mathbb{C}$-analytique $R_\lambda \circ f : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que sur $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $R_\lambda \circ f\big|_{\mathbb{T}^1}$ soit un difféomorphisme alors la même construction donne une application entière $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ayant un disque singulier de Siegel ayant les mêmes propriétés qu'en 22.8 (on définit f_1 seulement sur $\mathbb{S}^2 - \{\infty\} \cong \mathbb{C}$).

22.11 Si on part de G définie en 22.2 alors pour f_1, ∞ est un point super attractif et comme f_1 est de degré 2, f_1 est un polynôme de degré 2 et donc conjugué par une transformation affine (i.e. $z \mapsto b_1 z + b_2$, $b_1 \in \mathbb{C}^*$, $b_2 \in \mathbb{C}$) à

$$g_\alpha : z \mapsto e^{2\pi i\alpha}(z + z^2).$$

Il suit de ce qui précède qu'on a le théorème suivant

Théorème 3. *Il existe $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que g_α soit linéarisable en 0 et son disque de Siegel S vérifie :*

(i) ∂S *est un quasi cercle ;*

(ii) $c = \dfrac{-1}{2} \notin \partial S$ *(g_α est injective sur un voisinage de $\overline{S}$) ;*

(iii) $g_\alpha^n(c) \notin \partial S$, *pour tout* $n \geqslant 1$.

En effet, (i) et (ii) résultent de 22.8 et (iii) résulte de la démonstration de 22.5 et 22.6.[29] ∎

Il est à noter que pour g_α, l'orbite du point critique $c = \frac{-1}{2}$ sera "très semblable" à l'orbite par μg du point critique c, $c \neq \infty$, $|c| > 1$ (μg a pour points critiques c, $1/\overline{c}$, 0 et ∞).

22.12 Par le résultat de [G] ou [H2] le $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ne satisfait pas à une condition diophantienne.

On rappelle que si α est un nombre de Brjuno :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < +\infty$$

où q_k sont les dénominateurs des réduites de α et si $f_1(z) = e^{2\pi i\alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ est un germe d'application $\mathbb{C}$-analytique en 0 alors f est linéarisable en 0 (théorème de Siegel-Brjuno [B]).

22.13

Proposition. *Soit α le nombre donné par le théorème 3, alors l'une des affirmations suivantes est vraie*
(i) α n'est pas un nombre de Brjuno ;
(ii) il existe un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique f de $\mathbb{T}^1$, tel que $\rho(f) = \alpha$ est un nombre de Brjuno mais f n'est pas C^ω conjugué à R_α.

[29] Ndt : (iii) résulte immédiatement de 22.5 pour t, et donc pour f_1 par la conjugaison. La preuve de 22.5 (preuve qui inclut l'argument donné en 22.6) peut être adaptée pour déduire (iii) de (ii) sans passer par t.

Démonstration. Si (i) et (ii) sont faux alors la même démonstration que [G] ou [H2] en utilisant non (ii) implique dans le théorème 3 que $c \in \partial S$. ■

L'auteur de ces lignes n'a à l'heure actuelle aucune opinion sur laquelle des affirmations de 22.13 est vraie[30] ((i) suppose des compensations inattendues, voir [Y3], et non (ii) est vraie si f est une perturbation de R_α dans la topologie C^ω).

22.14

Proposition. *Il existe une fonction entière non linéaire $f_1 = e^{2\pi i\alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$, $z \longrightarrow 0$ telle que*
(i) $f_1'(z) \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$;
(ii) f_1 est linéarisable en 0 et le disque singulier de Siegel S de f_1 est d'adhérence compacte dans $\mathbb{C}$ et f_1 est injective au voisinage de $\overline{S}$.

Démonstration. On utilise la construction de 22.10 en partant de f telle que

$$Df(\theta) = e^{a\sin(2\pi\theta)+c}, \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

et $c \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\int_0^1 e^{a\sin(2\pi\theta)+c} d\theta = 1.$$

■

22.15

Proposition. *Il existe $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ injective, univalente, vérifiant $G(0) = 0$, $G'(0) = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, G est linéarisable en 0 et le domaine maximal de linéarisation de G, S_1 vérifie $\overline{S}_1 \cap \partial\mathbb{D} = \varnothing$.*

Démonstration.[31] On conjugue, en utilisant le théorème de la représentation conforme, le g_α donné par le théorème 3 en remarquant que g_α est injective sur un petit voisinage ouvert V simplement connexe de $\overline{S}$ et vérifie $g_\alpha(\overline{S}) = \overline{S}$. ([32]) ■

Il suit de [G] ou [H2] que 22.14 et 22.15 sont faux si α satisfait à une condition diophantienne.

22.16 Remarque. Dans la construction de Ghys 22.7, si $\rho(\mu f) = \alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, μf n'est pas en général quasi symétriquement conjugué à R_α (cf. §8) mais par le théorème de Denjoy μf est topologiquement conjugué à R_α : $\mu f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$. On peut étendre h en un difféomorphisme C^1 de $\mathbb{D}$ et ensuite définir $t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ une application continue. En général, t n'est pas topologiquement conjugué à une fraction rationnelle car sinon f_1 aurait un point fixe elliptique linéarisable de multiplicateur $e^{2\pi i\alpha}$ or ceci n'est pas vrai pour α appartenant à un G_δ dense G de $\mathbb{T}^1$ (l'ensemble G ne dépend pas de la fraction rationnelle f) cf. [H1,VIII.15].

Question. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que t soit topologiquement conjugué à une fraction rationnelle de la sphère de Riemann.*

[30] Ndt : Il est désormais connu que c'est (ii) qui est vraie. En effet, Yoccoz a démontré que la condition de Brjuno est optimale dans la famille quadratique.

[31] Ndt : Il y a un problème dans cette preuve, voir la note suivante.

[32] Ndt : Il n'y a pas de raison que l'application conforme de V vers $\mathbb{D}$ ait une extension sur $V \cup g_\alpha(V)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. A priori on n'obtient qu'un $G : U \to \mathbb{D}$ avec $U \subset \mathbb{D}$, et non pas $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Il n'est pas clair qu'on puisse s'arranger pour que le domaine de G soit $\mathbb{D}$. On voudrait envoyer $V \cup g_\alpha(V)$ dans $\mathbb{C}$ de façon à ce que V s'envoie sur $\mathbb{D}$ et 0 sur 0. On voit déjà que cela requiert que ∂V soit analytique à l'intérieur de $g_\alpha(V)$, tant qu'à faire, on peut prendre tout ∂V analytique. Mais ce n'est pas suffisant.

23. Généralisations de la construction d'E. Ghys.

On se donne f comme en 22.1 et μ tel que μf vérifie les conclusions du théorème 2 et $\alpha = \rho(\mu f\big|_{\mathbb{S}^1})$.

Proposition. *Il existe une fraction rationnelle f_1 de même degré que f laissant invariant $\mathbb{S}^1$, $\rho(f_1\big|_{\mathbb{S}^1}) = \alpha$ ayant un anneau singulier A, contenant $\mathbb{S}^1$, (A est une composante connexe de $\mathbb{S}^2 - J(f_1)$) et vérifiant f_1 n'a pas de point critique sur ∂A et ∂A est l'union de 2 quasi cercles disjoints.*

Démonstration. Soit $0 < t < 1$ donné, on pose

$$g_1(z) = \frac{1}{t}\mu f(tz) \qquad |z| \geqslant \frac{1}{t}$$
$$g_1(z) = \frac{1}{\overline{g_1(1/\overline{z})}} \qquad |z| \leqslant t.$$

Soit $H : \{t \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{t}\} \to \{t \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{t}\} = B$ un homéomorphisme quasi conforme tel que l'on ait :

$$H \text{ commute avec } z \mapsto 1/\overline{z}$$
$$H \circ r_\alpha \circ H^{-1}(z) = g_1(z), \quad z \in \partial B.$$

C'est possible puisque $(\mu f)\big|_{\mathbb{S}^1}$ est quasi symétriquement conjugué à $r_\alpha : z \mapsto e^{2\pi i\alpha}z$.

On définit

$$T_1(z) = g_1(z), \quad \text{si } |z| \geqslant \frac{1}{t} \text{ ou } |z| \leqslant t$$

et

$$T_1(z) = H \circ r_\alpha \circ H^{-1}(z), \quad \text{si } t \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{t}.$$

Par construction, T_1 commute avec l'involution, reversant l'orientation et conforme : $z \mapsto 1/\overline{z}$. Par le même argument qu'en 22.7, T_1 laisse invariante une forme de Beltrami u. On peut donc conjuguer T_1 par un homéomorphisme quasi conforme à une fraction rationnelle g et on peut choisir u de telle sorte que g commute avec une involution j, conjuguée à $z \mapsto 1/\overline{z}$, conforme et donc $\cancel{j \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})}$ on peut conjuguer j par un élément $h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ à $h^{-1} \circ j \circ h(z) = 1/\overline{z}$ et $f_1 = h \circ g \circ h^{-1}$ vérifie toutes les conclusions de la proposition. ■

24. Si on partait de $\mu f = \mu z^2 \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$, f_1 serait de la même forme avec un μ_1, $\mu_1 \in \mathbb{S}^1$ et $a_1 \in \mathbb{C}$, $0 < |a_1| < \frac{1}{3}$.

Conclusion. *L'existence d'un anneau singulier pour une fraction rationnelle ne dépend pas seulement de l'arithmétique du nombre de rotation mais de la fraction rationnelle (des valeurs des coefficients de P et Q tels que $f = P/Q$ où P et Q sont des polynômes premiers entre eux de degré $\leqslant d$).*

25. Soit f comme en 22.1 et $\mu \in \mathbb{S}^1$ tel que $\rho(\mu f)$ satisfait à une condition diophantienne. Alors par le résultat de J.C. Yoccoz [Y2] $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est C^ω conjugué à $r_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$. Il en résulte que μf a un anneau singulier contenant $\mathbb{S}^1$. Cet anneau disparaîtra si $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est seulement un homéomorphisme (analytique de $\mathbb{S}^1$) i.e. μf a un point critique sur $\mathbb{S}^1$. Pour de nombreux exemples nous renvoyons le lecteur à [H1,IV].

Par exemple si $f = z^2 \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$, si $a\overline{a} = \frac{1}{9}$, $f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est un homéomorphisme ayant un point critique double sur $\mathbb{S}^1$. J.C. Yoccoz a montré [Y4] que si $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est un homéomorphisme (analytique) et $\rho(\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}) \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ alors $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est topologiquement conjugué à R_α. En général $f\big|_{\mathbb{S}^1}$ n'est pas quasi symétriquement conjugué à une rotation (cf. §8).

Question. [33] *Si $\rho(\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}) = \alpha$ est un nombre de type constant, est-ce que $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ est quasi symétriquement conjugué à R_α ?*

26. La proposition suivante a été obtenue indépendamment par Adrien Douady :

Proposition. *Soit $\mu f\big|_{\mathbb{S}^1}$ un homéomorphisme analytique possédant un point critique sur $\mathbb{S}^1$ et tel que $(\mu f)\big|_{\mathbb{S}^1}$ soit quasi symétriquement conjugué à R_α, $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ alors il existe une fraction rationnelle g possédant un disque de Siegel S associé à un point fixe de g linéarisable, de multiplicateur $e^{2\pi i\alpha}$, tel que ∂S soit un quasi cercle et il existe un point critique de g sur ∂S.*

La démonstration est presque identique à celle de 22.7 et 22.8. ∎

Suite au prochain numéro.

Références

[A] L.V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings.* Van Nostrand (1966).

[AB] L.V. Ahlfors and Beurling, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings.* Acta Math., 96, 125–142, (1956).

[B] A.D. Brjuno. *Analytical form of differential equations.* Transactions Moscow Math. Soc. 25 (191), 131–288.

[G] E. Ghys. *Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan.* C.R. Acad. Sc. Paris. t 289 (1984), 383–388.

[H] M.R. Herman. *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.* Publ. Math. I.H.E.S. 49 (1979) 5–233.

[H1] M.R. Herman. *Exemple de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann.* Bull. S.M.F. 112 (1984), 93–142.

[H2] M.R. Herman. *Are there critical points on the boundaries of singular domains ?* Comm. Math. Phys. 99 (1985), 593–612.

[H3] M.R. Herman. *Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytical diffeomorphisms of $\mathbb{C}^n$ near a fixed point.* À paraître[34].

[L] O. Lehto and V.I. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane.* Springer Verlag (1973).

[P] Ch. Pommerenke. *Univalent functions.* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen (1975).

[S] M. Shishikura. *On the quasiconformal surgery of the rational functions.* À paraître[35] aux An. Ec. Nor. Sup.

[Y1] J.C. Yoccoz. *C^1-conjugaison des difféomorphismes du cercle.* Lect. Notes in Math. 1007 Springer Verlag (1983), 814–827.

[33] Ndt : La réponse est positive, comme démontré par Herman et Świątek dans des travaux ultérieurs. Ils ont été rendus possible grâce à l'introduction de la dérivée schwarzienne, analogue d'ordre supérieur à la dérivée de distorsion $D \log Df$.

[34] Ndt : Paru à : VIII$^{\text{th}}$ international congress on mathematical physics (Marseille, 1986), 138–184, World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

[35] Ndt : Paru : Ann. sci. École Norm. Sup., série 4 tome 20 n°1 (1987), 1–29.

[Y2] J.C. Yoccoz. *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. Ann. Sc. E.N.S. 4$^{\text{ème}}$ série 17 (1984), 333–359.

[Y3] J.C. Yoccoz. *A remark a Brjuno condition*. Manuscript 1985.

[Y4] J.C. Yoccoz. *Il n'y a pas de contre exemple de Denjoy analytique*. C.R. Acad. Sc. Paris. t 298 (1984), 141-1-44.