Disques de Siegel

Xavier Buff et Arnaud Chéritat

Institut de Mathématiques de Toulouse

Lille, Avril 2009

$0 \in U$ ouvert de $\mathbb{C}$
$f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe

f définit un système dynamique : $z_{n+1} = f(z_n)$

$f(0) = 0$ (l'origine est un point fixe)
le multiplicateur $f'(0)$ a module un : $f'(0) = e^{2i\pi\theta}$
le multiplicateur est apériodique : $\theta \notin \mathbb{Q}$

On dit que 0 est un
point fixe indifférent irrationnel d'un système dynamique holomorphe de dimension complexe 1.

Près de 0, f est proche d'une rotation apériodique. La dynamique se comporte-t-elle de façon similaire ?

Définition des disques de Siegel

Qu'entend-t-on par se comporter comme une rotation ? Qu'au voisinage de 0,

- f est analytiquement conjuguée à $R_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta}z$? (c.à.d. $\exists\phi$ bijection analytique définie près de 0 fixant 0 et tq $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = R_\theta$)
- f est topologiquement conjuguée à R_θ ? (on ne demande plus à ϕ que d'être un homéomorphisme)
- les orbites restent bornées ? (stabilité au sens de Lyapunov)

Il se trouve que ces trois conditions sont équivalentes. On dit que f est *linéarisable*.

Le nombre θ est unique et est appelé le *nombre de rotation*.

Définition des disques de Siegel

Qu'entend-t-on par se comporter comme une rotation ? Qu'au voisinage de 0,

- f est analytiquement conjuguée à $R_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$? (c.à.d. $\exists \phi$ bijection analytique définie près de 0 fixant 0 et tq $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = R_\theta$)
- f est topologiquement conjuguée à R_θ ? (on ne demande plus à ϕ que d'être un homéomorphisme)
- les orbites restent bornées ? (stabilité au sens de Lyapunov)

Il se trouve que ces trois conditions sont équivalentes. On dit que f est *linéarisable*.

Le nombre θ est unique et est appelé le *nombre de rotation*.

Définition des disques de Siegel

Qu'entend-t-on par se comporter comme une rotation ? Qu'au voisinage de 0,

- f est analytiquement conjuguée à $R_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$? (c.à.d. $\exists \phi$ bijection analytique définie près de 0 fixant 0 et tq $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = R_\theta$)
- f est topologiquement conjuguée à R_θ ? (on ne demande plus à ϕ que d'être un homéomorphisme)
- les orbites restent bornées ? (stabilité au sens de Lyapunov)

Il se trouve que ces trois conditions sont équivalentes. On dit que f est *linéarisable*.

Le nombre θ est unique et est appelé le *nombre de rotation*.

Définition des disques de Siegel

Qu'entend-t-on par se comporter comme une rotation ? Qu'au voisinage de 0,

- f est analytiquement conjuguée à $R_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$? (c.à.d. $\exists \phi$ bijection analytique définie près de 0 fixant 0 et tq $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = R_\theta$)
- f est topologiquement conjuguée à R_θ ? (on ne demande plus à ϕ que d'être un homéomorphisme)
- les orbites restent bornées ? (stabilité au sens de Lyapunov)

Il se trouve que ces trois conditions sont équivalentes. On dit que f est *linéarisable*.

Le nombre θ est unique et est appelé le *nombre de rotation*.

Définition des disques de Siegel

Qu'entend-t-on par se comporter comme une rotation ? Qu'au voisinage de 0,

- f est analytiquement conjuguée à $R_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$? (c.à.d. $\exists\phi$ bijection analytique définie près de 0 fixant 0 et tq $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = R_\theta$)
- f est topologiquement conjuguée à R_θ ? (on ne demande plus à ϕ que d'être un homéomorphisme)
- les orbites restent bornées ? (stabilité au sens de Lyapunov)

Il se trouve que ces trois conditions sont équivalentes. On dit que f est *linéarisable*.

Le nombre θ est unique et est appelé le *nombre de rotation*.

Définition des disques de Siegel

Qu'entend-t-on par se comporter comme une rotation ? Qu'au voisinage de 0,

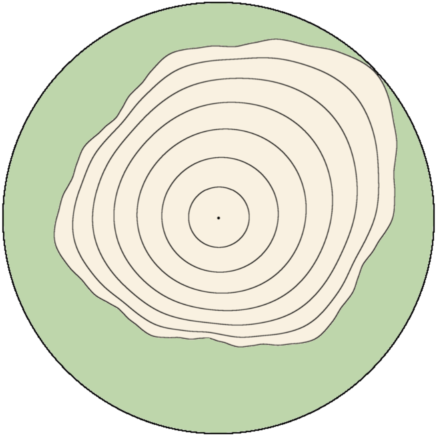
- f est analytiquement conjuguée à $R_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$? (c.à.d. $\exists \phi$ bijection analytique définie près de 0 fixant 0 et tq $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = R_\theta$)
- f est topologiquement conjuguée à R_θ ? (on ne demande plus à ϕ que d'être un homéomorphisme)
- les orbites restent bornées ? (stabilité au sens de Lyapunov)

Il se trouve que ces trois conditions sont équivalentes. On dit que f est *linéarisable*.

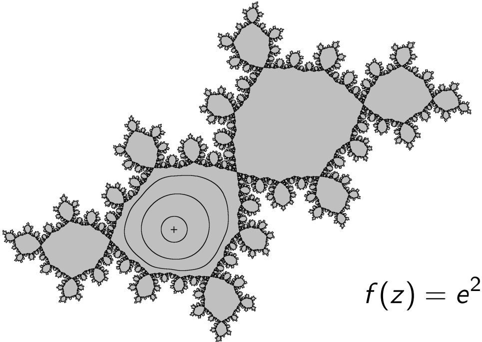
Le nombre θ est unique et est appelé le *nombre de rotation*.

Définition

Le disque de Siegel Δ est le plus grand ouvert U contenant 0 et sur lequel f est analytiquement conjuguée à une rotation. Si f n'est pas linéarisable, on pose par convention $\Delta = \emptyset$.



Exemples

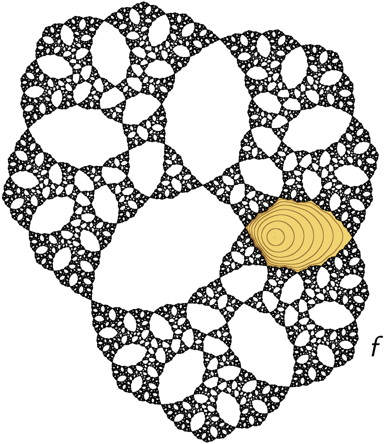


$$f(z) = e^{2i\pi\frac{\sqrt{5}-1}{2}} z + z^2$$

Polynômes. Si f est un polynôme, ∞ est superattractif. Soit $A(\infty)$ le basin d'attraction correspondant. Soit $K = \mathbb{C} \setminus A(\infty)$ son complémentaire. (K est aussi l'ensemble des points dont l'orbite z_n est bornée)

- f est linéarisable si et seulement si $0 \in \operatorname{int} K$.
- Δ est la composante connexe de $\operatorname{int} K$ contenant 0.

Exemples



$$f(z) = \frac{ze^{2i\pi\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{(1+z)^2}$$

Fractions rationnelles. Si f est rationnelle alors Δ est une composante connexe de l'ensemble de Fatou. (ensemble de Fatou = sphère de Riemann moins l'ensemble de Julia)

Le théorème de Mañe

Notons qu'un disque de Siegel ne peut contenir aucun point périodique en dehors de son centre, aucun point critique, et aucune préimage itérée de point périodique ou critique. Il peut par contre y avoir des point critiques qui finissent par tomber dedans. Cependant :

Soit $\omega(z)$ l'ensemble oméga-limite de z, c'est à dire l'ensemble des points d'accumulation de son orbite.

Théorème : (Mañe) *Pour tout polynôme ayant un disque de Siegel Δ, il existe au moins un point critique c récurrent (c.à.d. $c \in \omega(c)$) tel que $\partial\Delta \subset \omega(c)$.*

Outils de la preuve: branches inverses, familles normales et théorèmes de distorsion bornée à la Koebe.

Le théorème de Mañe

Notons qu'un disque de Siegel ne peut contenir aucun point périodique en dehors de son centre, aucun point critique, et aucune préimage itérée de point périodique ou critique. Il peut par contre y avoir des point critiques qui finissent par tomber dedans. Cependant :

Soit $\omega(z)$ l'ensemble oméga-limite de z, c'est à dire l'ensemble des points d'accumulation de son orbite.

Théorème : (Mañe) *Pour tout polynôme ayant un disque de Siegel Δ, il existe au moins un point critique c récurrent (c.à.d. $c \in \omega(c)$) tel que $\partial\Delta \subset \omega(c)$.*

Outils de la preuve: branches inverses, familles normales et théorèmes de distorsion bornée à la Koebe.

Le théorème de Brjuno

Pour certaines valeurs du nombre de rotation θ, toutes les fonctions f sont linéarisables. C'est la découverte de Siegel, qui l'a démontré en 1942 quand θ est diophantien.

Théorème : (Brjuno, 1965) *Si $\theta \in \mathcal{B}$ alors f est linéarisable.*

L'ensemble $\mathcal{B}$ est l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $\sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty$, où $p_n/q_n \longrightarrow \theta$ est la suite des réduites du développement en fraction continue de θ. Cela comprend les diophantiens.

Outils : estimation du rayon de convergence du DSE de la linéarisante ϕ.

Le théorème de Brjuno

Pour certaines valeurs du nombre de rotation θ, toutes les fonctions f sont linéarisables. C'est la découverte de Siegel, qui l'a démontré en 1942 quand θ est diophantien.

Théorème : (Brjuno, 1965) *Si $\theta \in \mathcal{B}$ alors f est linéarisable.*

L'ensemble $\mathcal{B}$ est l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $\sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty$, où $p_n/q_n \longrightarrow \theta$ est la suite des réduites du développement en fraction continue de θ. Cela comprend les diophantiens.

Outils : estimation du rayon de convergence du DSE de la linéarisante ϕ.

Quelques théorème de Yoccoz

En 1988, Yoccoz a démontré que la condition de Brjuno est optimale :

Théorème : (Yoccoz) *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\theta \notin \mathcal{B}$, alors il existe des fonctions holomorphes f de nombre de rotation θ et qui ne sont pas linéarisables.*

Il a également donné un borne inférieure "optimale" de la taille du disque de Siegel : soit

$$B(\theta) = \sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n}$$

Théorème : (Yoccoz) *Il existe $C > 0$ et $C' > 0$ tel que si $\theta \in \mathcal{B}$, alors*

- *pour tout f injective dans $B(0,1)$ alors Δ contient $B(0, Ce^{-B(\theta)})$,*
- *il existe f injective dans $B(0,1)$ telle que Δ ne contient pas $B(0, C'e^{-B(\theta)})$.*

Sa méthode est très différente: il utilise une approche plus géométrique, appelée renormalisation sectorielle.

Universalité de la famille quadratique

Yoccoz a réussi à transférer certains de ses résultats aux disques de Siegel de période 1 des polynômes quadratiques en utilisant une astuce due à Ill'Yashenko. Soit

$$P_\theta(z) = e^{2i\pi\theta} z + z^2.$$

Theorem : (Yoccoz) *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et si il existe un f non linéarisable de nombre de rotation θ alors $P_\theta(z)$ est non linéarisable (à l'origine).*

Il a également donné une borne supérieure à la taille interne du disque de Siegel de P_θ, mais n'a pas réussi à démontrer la conjecture suivante :

Conjecture : (Yoccoz) *Il existe $C > 0$ tel que $\forall\theta \in \mathcal{B}$, le disque de Siegel de P_θ ne contient pas $B(0, Ce^{-B(\theta)})$.*

Nous l'avons démontrée en 2003.

Y a-t-il des points critiques au bord des disques de Siegel ?

Question subtile...

Herman a démontré des résultats partiels. Il a défini un ensemble de nombres $\mathcal{H}$ et prouvé qu'un disque de Siegel de nombre de rotation dans $\mathcal{H}$, pour un polynôme à un seul point critique ($f(z) = z^d + c$), a nécessairement un point critique dans son bord. Il a démontré que $\mathcal{H}$ est non vide.

Méthode : on se ramène à étudier les difféomorphismes analytiques du cercle. Ce sont ensuite des raffinements du théorème de Denjoy, dus à Herman.

Yoccoz a caractérisé $\mathcal{H}$ arithmétiquement. En particulier Dioph $\subset \mathcal{H} \subset \mathcal{B}$.

Est-ce vrai pour tout polynôme ? Toute fraction rationnelle ? Et la réciproque ?

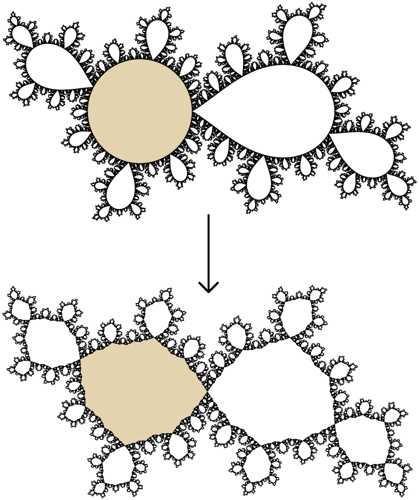
Le bord des disques de Siegel quadratiques

Herman a également démontré l'existence de θ tels que le bord des disques de Siegel des polynômes quadratiques P_θ sont des courbes de Jordan qui *ne contiennent pas* le point critique. Outil : modèle quasiconforme dû à Ghys, construit à l'aide d'une chirurgie holomorphe.

Indépendamment, Perez-Marco a construit des applications $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ (non polynomiales ni entières) dont le disque de Siegel est compactement inclus dans $B(0,1)$ et qui ont un *bord lisse* (C^∞). En particulier il ne peut pas y avoir de point critique sur $\partial\Delta$. Outil : méthodes de renormalisations inversées de Yoccoz, modifiées avec des surfaces de Riemann tube-log.

Une variation du modèle de Ghys s'est révélée particulièrement utile :

Modèles de disques de Siegel quadratiques



Théorème (Herman, Swiatek, Ghys, Douady, Petersen, Lyubich, McMullen, ...) : quand θ est un nombre de type constant alors le disque de Siegel a pour bord une courbe de Jordan et même mieux : c'est un quasicercle, il contient le point critique, l'ensemble de Julia est localement connexe, sa mesure de Lebesgue est $= 0$, sa dimension de Hausdorff est < 2. L'ensemble de Julia rempli est asymptotiquement dense au bord de Δ. Si θ est un nombre algébrique quadratique sur $\mathbb{Q}$, alors l'ensemble de Julia est asymptotiquement autosimilaire au point critique. [... + propriétés d'universalité ...]

Omis

Il y a bien d'autres résultats importants (Perez Marco, Petersen-Zakeri, Graczyk-Swiatek, Graczyk-Jones, Rodin, Rogers, Shishikura, Zhang, ...)

Plus sur les disques de Siegel quadratiques

Nous avons introduit des outils dans le sujet : le contrôle de l'explosion parabolique, le lemme de Schwarz relatif, des méthodes de semi-continuité. Cela a donné, dans la famille P_θ des polynômes quadratiques :

- la preuve de l'existence de disques de Siegel à bords lisses
- la preuve de la conjecture de Yoccoz sur la taille des disques de Siegel
- la preuve d'une conjecture de Marmi raffinant celle de Yoccoz : la continuité (uniforme) de la fonction $\Upsilon(\theta) = \log r(\theta) + Y(\theta)$ où $r(\theta)$ est le rayon conforme du disque de Siegel et Y est une variante de la somme de Brjuno

entre autres.

Conjecture (Marmi, Moussa, Yoccoz)

La fonction Υ est $1/2$-Hölder continue.

Plus sur les disques de Siegel quadratiques

Nous avons introduit des outils dans le sujet : le contrôle de l'explosion parabolique, le lemme de Schwarz relatif, des méthodes de semi-continuité. Cela a donné, dans la famille P_θ des polynômes quadratiques :

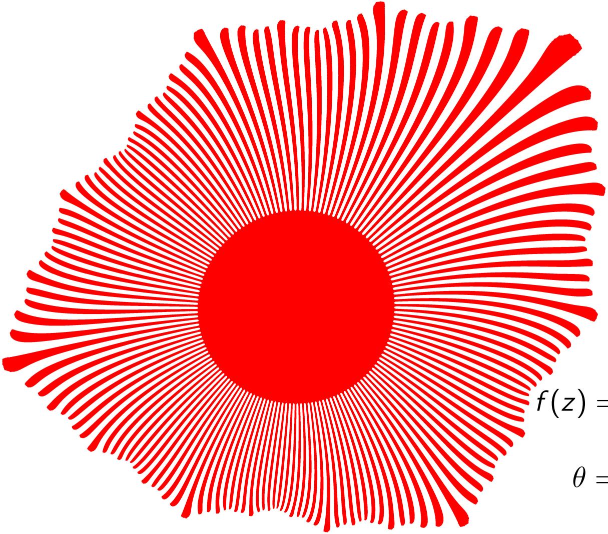
- la preuve de l'existence de disques de Siegel à bords lisses
- la preuve de la conjecture de Yoccoz sur la taille des disques de Siegel
- la preuve d'une conjecture de Marmi raffinant celle de Yoccoz : la continuité (uniforme) de la fonction $\Upsilon(\theta) = \log r(\theta) + Y(\theta)$ où $r(\theta)$ est le rayon conforme du disque de Siegel et Y est une variante de la somme de Brjuno

entre autres.

Conjecture (Marmi, Moussa, Yoccoz)

La fonction Υ est $1/2$-Hölder continue.

Disques de Siegel digités

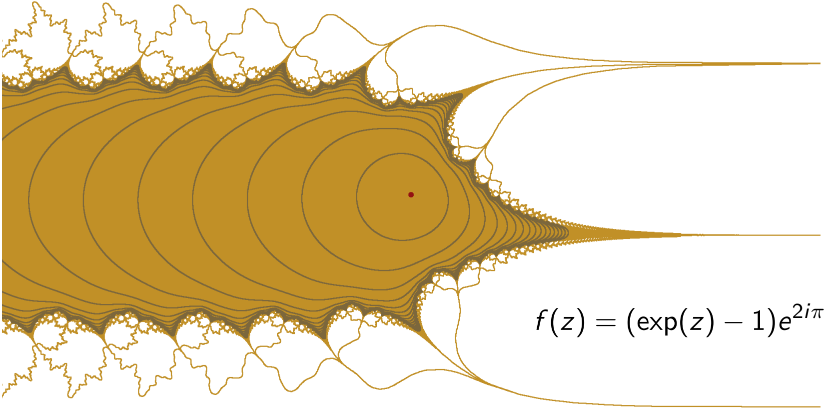


$$f(z) = P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta} z + z^2$$

$$\theta = [0; 1^{[11]}, 10^{60}, 1^{[\infty]}]$$

Le temps des conjectures

Monstre abyssal



$$f(z) = (\exp(z) - 1)e^{2i\pi\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Disques de Siegel bornés

Conjecture

Si un disque de Siegel est compactement inclus dans le domaine de définition de f alors son bord est une courbe de Jordan.

Cela inclurait les polynômes et les applications rationnelles.

Conjecture (Douady)

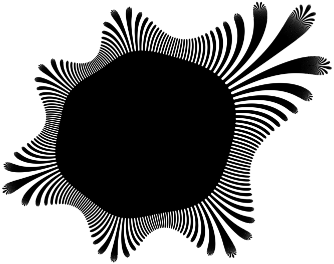
Si un polynôme a un disque de Siegel, alors son nombre de rotation est nécessairement dans $\mathcal{B}$.

Certains cas particuliers de cette conjecture ont été démontrés par Lukas Geyer.

Travaux en cours

Inou et Shishikura ont construit un opérateur de renormalisation qui permet une étude très fine des disques de Siegel des polynômes quadratiques, en particulier de l'orbite critique. Cela devrait permettre de démontrer de nombreuses conjectures concernant les disques de Siegel quadratiques. Pour l'instant leurs techniques ne couvrent pas tous les nombres de rotation.

Leur outil permet également d'étudier les *Hérissons*. Ces objets ont étés inventés par Perez-Marco, et généralisent le disque de Siegel. Nous développons des modèles jouets des hérissons quadratiques (Buff, Rempe, Chéritat).



Disques de Siegel des polynômes

Un raffinement de la conjecture de Douady :

Conjecture (Buff)

Il existe $C_d > 0$ tel que pour tout polynôme f de degré d ayant un disque de Siegel à l'origine :

$$\frac{\text{rayon conforme}(\Delta)}{\text{distance}(0, \text{pts. crit. de } f)} \leq C_d e^{-\frac{B(\theta)}{d-1}}$$

On sait qu'on ne peut pas avoir mieux que $-\frac{B(\theta)}{d-1}$.

Une tranche de l'espace des paramètres