TABLE DES MATIÈRES

Préface

Ces notes correspondent à l'enseignement dispensé pour le cours de séries de Fourier du parcours de L2 spécial au cours du premier semestre de l'année scolaire 2012-2013.

CHAPITRE 1

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. Activité d'approche

On empile des blocs pour former une pile de pont. Les blocs sont posés les uns sur les autres avec un léger décalage, mais sans utiliser de ciment ou de colle. Quel est le décalage maximal entre le bloc du haut et celui du bas pour que la pile de pont reste en équilibre ?

II. Définitions

Définition 1. Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres réels (ou complexes). La *série de terme général* a_k est la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ (on dit que S_n est une *somme partielle* de la série).

La série de terme général a_k se note $\sum a_k$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Définition 2. On dit que la série $\sum a_n$ converge (respectivement diverge) si la suite des *sommes partielles* S_n converge (respectivement ne converge pas). Dans ce cas, on note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ la valeur de la limite. On dit que S est la *somme de la série.*

Attention, quand la série $\sum a_n$ converge, la notation $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est utilisée à la fois pour désigner la série et la valeur de la somme (c'est-à-dire la limite de la suite (S_n)).

III. Exemples à traiter en TD

1. $a_k = 1$. Calculer S_n. Montrer que la série diverge.
2. série géométrique : $a_k = \dfrac{1}{2^k}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que la série converge et donner la valeur de sa somme.

3. série téléscopique : $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Ecrire a_k comme la différence de deux termes. Calculer $\sum_{k=1}^{n} a_k$. En déduire que cette série converge et donner la valeur de sa somme.

Pour tous ces exemples, on sait calculer S_n. Mais ce n'est généralement pas le cas.

IV. Limite du terme général

Proposition 1. Si la série $\sum a_n$ converge, alors $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Preuve : la suite des sommes partielles S_n converge vers une limite S. On a alors

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

□

Attention. Il se peut que la suite a_n tende vers 0 et que la série $\sum a_n$ diverge. C'est le cas par exemple pour la série harmnoique $\sum \frac{1}{n}$.

V. Espace vectoriel des séries convergentes

Théorème 2. Si $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont deux séries convergentes, alors $\sum(a_k + b_k)$ est une série convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\sum a_k$ est une série convergente, alors $\sum(\lambda a_k)$ est une série convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Corollaire. Si $\sum a_k$ converge et si $\sum b_k$ diverge, alors $\sum(a_k + b_k)$ diverge.

Preuve: $b_k = (a_k + b_k) - a_k$. Si $\sum a_k$ converge et si $\sum(a_k + b_k)$ converge, alors $\sum b_k$ converge. □

VI. Séries à termes positifs

Théorème 3. Si $\sum a_k$ est une série à termes positifs, la suite (S_n) des sommes partielles est croissante.

Corollaire. Si $\sum a_k$ est une série à termes positifs, elle est convergente si et seulement si elle est majorée.

Preuve : une suite croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée. □

Théorème 4 (comparaison). Supposons que $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$.

- Si $\sum b_k$ converge, alors $\sum a_k$ converge.
- Si $\sum a_k$ diverge, alors $\sum b_k$ diverge.

Preuve : Soit (A_n) (respectivement (B_n)) la suite des sommes partielles de la série de terme général a_k (respectivement b_k). Alors,

$$\sum b_k \text{ converge} \Rightarrow (B_n) \text{ est majorée} \Rightarrow (A_n) \text{ est majorée} \Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

□

Séries à termes positifs de référence

1. séries géométriques : $\sum r^n$ converge si, et seulement si, $|r| < 1$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

2. séries de Riemann : $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

VII. Séries alternées

Définition 3. La série $\sum a_k$ est une série alternée si $a_k \geqslant 0$ pour k pair et $a_k \leqslant 0$ pour k impair (ou vice et versa).

Théorème 5. Si

- $\sum a_k$ est une série alternée,
- la suite $|a_k|$ est décroissante,
- la suite a_k converge vers 0.

(**il faut vérifier les 3 conditions**), alors la série $\sum a_k$ est convergente.

Exemple : la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Preuve : On va le montrer dans le cas où $a_{2n} \geqslant 0 \geqslant a_{2n+1}$. L'autre cas est similaire.

Soit S_n la somme partielle de rang n. On montre que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont des suites adjacentes. Plus précisément, comme $0 \leqslant a_{2n+2} \leqslant -a_{2n+1} \leqslant a_{2n}$, on a :

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} \geqslant S_{2n-1}$$

et

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant S_{2n}.$$

De plus :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite S (qui est la somme de la série). De plus, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$|S - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}|.$$

□

VIII. Séries absolument convergentes

Définition 4. On dit que la série $\sum a_k$ est absolument convergente si la série $\sum |a_k|$ est convergente.

Théorème 6. Si la série $\sum a_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Preuve : on applique le critère de Cauchy dans les deux sens. La série $\sum |a_k|$ converge. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 0$, on a :

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant \varepsilon.$$

□

Attention, il y a des séries qui sont convergentes sans être absolument convergente, par exemple la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

IX. Pour aller plus loin.

Théorème 7 (équivalents). Si $0 \leqslant a_k \sim b_k \geqslant 0$, alors $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature (l'une est convergente si, et seulement si, l'autre est convergente).
Si elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes.
Si elles convergent, les restes sont équivalents.

Preuve que les séries sont de même nature : Comme $a_k/b_k \to 1$, si k est suffisamment grand, alors $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{3}{2}$. Par conséquent, $\dfrac{1}{2}b_k \leqslant a_k \leqslant \dfrac{3}{2}b_k$. Le résultat suit du théorème de comparaison. □

Attention, si $a_k \sim b_k$ sans que les a_k soient positifs, les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ ne sont pas nécessairement de même nature.

Théorème 8 (critère de d'Alembert). Si $|a_{k+1}/a_k| \longrightarrow \ell$ alors,
- si $\ell < 1$, la série $\sum a_k$ converge,
- si $\ell > 1$, la série $\sum a_k$ diverge,
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Attention, il se peut que la série $\sum a_k$ soit convergente sans que la suite $|a_{k+1}/a_k|$ n'ait de limite.

Exercices sur les séries numériques.

Exercice 1 : Critère de d'Alembert

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $u_{n+1}/u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
   (a) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la suite (u_n) ne converge pas vers 0. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
   (b) On suppose que $\ell < 1$. Soit r un réel tel que $\ell < r < 1$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier n_0 tels que $u_n \leqslant cr^n$ pour tout $n \geqslant n_0$. En déduire la nature de la série u_n.
   (c) On suppose que $\ell = 1$. Donner un exemple pour lequel la série $\sum u_n$ converge et un autre exemple pour lequel la série $\sum u_n$ diverge.
2. Soit $\sum u_n$ une série telle que $|u_{n+1}/u_n| \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
   (a) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la série diverge.
   (b) On suppose que $\ell < 1$. Montrer que la série est absolument convergente.
   (c) Que peut-on dire si $\ell = 1$.

Exercice 2 : Un vrai-faux

Répondre par vrai ou faux, et justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$
   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série à termes strictement positifs. Si cette série converge, alors la suite $\displaystyle\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel $\ell < 1$.

Exercice 3 : Un développement asymptotique de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de H_n**
   Soit n un entier naturel non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Si k est un entier non nul, montrer que : $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$.
   (c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.
2. **Suites adjacentes**
   Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que :
   (v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant w_n + 1$. En déduire que la suite (v_n) est majorée.
(b) Montrer que la suite (w_n) est minorée.
(c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. **Constante d'Euler**
On pose, pour $n \geqslant 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \dfrac{1}{n}$.
(a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
(b) Montrer que les suite (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite. On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).
(c) Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 4 : Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, r_n son reste de rang n : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

1. On pose pour $n \geqslant 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.
Calculer r_n puis montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.
2. On pose pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.
Nous allons chercher un équivalent de (r_n).
Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
(a) Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$.
(c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$
(d) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$. Que peut-on conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} r_n$?
3. On pose pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(a) Justifier la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} a_n$.

(b) Expression intégrale de r_n.
Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x.$$

(i) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

(ii) Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.

(iii) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n.

(c) Conclusion

(i) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

(ii) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} r_n$.

Exercice 5 : Règle de Raabe-Duhamel.

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$, montrer que : si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2. Soit β un réel non nul et (u_n) une suite de réels strictement positifs satisfaisant à : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   (a) Montrer que, si l'on pose, pour $n \geqslant 1$ et α réel $\alpha > 0$, $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   (b) Si $\beta > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge. (On pourra choisir le réel $\alpha \in]1, \beta[$).

   (c) Si $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Déterminer, en utilisant la règle de Raabe-Duhamel (résultats 2b et 2c ci-dessus), la nature des séries de terme général u_n :

   (a) $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

   (b) $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ où a et b sont deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs. (On discutera selon la valeur de $b-a$)

Exercice 6 : Etude d'une série produit

Si $S_a = \sum_{n \geqslant 1} a_n$ et $S_b = \sum_{n \geqslant 1} b_n$ sont deux séries convergentes, on appelle série produit de S_a par S_b la série $\sum_{n \geqslant 2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Le but de cet exercice est d'établir la nature de la série produit de $S_\alpha = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle-même.

1. Equivalent de la série harmonique
   Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, cela définit la série harmonique.
   (a) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
   (b) Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (c) Désormais on pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à une expression de la forme $\frac{p}{n^q}$ où p et q sont deux réels à déterminer.
   (d) En déduire la nature de la suite (u_n) et enfin un équivalent simple de H_n lorsque n tends vers $+\infty$.
2. Une série produit.
   Pour quelles valeurs de α, la série S_α converge-t-elle ? Jusqu'à la fin de l'exercice, on choisit α de la sorte. On considère $\sum_{n \geqslant 2} c_n$ la série produit de S_α par S_α.
3. Jusqu'à la fin de l'exercice on considère $n \geqslant 2$ un entier.
   (a) Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto x(n-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $|c_n| \geqslant \frac{4^\alpha (n-1)}{n^{2\alpha}}$.
   (c) Conclure que pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geqslant 2} c_n$ diverge.
4. Désormais, on suppose que $\alpha = 1$.
   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.
   (b) En déduire une expression de c_n en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$.
   (c) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geqslant 2}$.
   (d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} c_n$.

Exercice 7 : Calcul de la somme d'une série

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif ou nul. Démontrer que :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
On pourra partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$ puis intégrer.
3. Démontrer à l'aide d'un encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$.
4. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. **Un équivalent de H_n**
   (a) Si k est un entier non nul et si $k \leqslant t \leqslant k+1$, on a :
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$
   En intégrant ces deux inégalités de k à $k+1$, on obtient :
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$
   (b) Si l'on somme les inégalités précédentes de $k=1$ à $k=n-1$, on obtient :
   $$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n - 1 \\ \leqslant \ & \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n \\ \leqslant \ & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = H_n - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
   On a donc :
   $$H_n \leqslant \ln n + 1 \quad \text{et} \quad \ln n + \frac{1}{n} \leqslant H_n.$$
   (c) D'après la question précédente :
   $$\underbrace{1 + \frac{1}{n \ln n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \underbrace{1 + \frac{1}{\ln n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}.$$
   D'après le théorème des gendarmes, $H_n / \ln n$ tend donc vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Cela montre que $H_n \sim \ln n$.

2. **Suites adjacentes**
   (a) Revenons à la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|v_n - w_n| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n - w_n \leqslant 1$ (et donc $v_n \leqslant w_n + 1$).
   La suite (w_n) est décroissante. Par conséquent, pour $n \geqslant n_0$ on a $v_n \leqslant w_n + 1 \leqslant w_{n_0} + 1$.
   La suite (v_n) est croissante. Par conséquent, pour tout $n \leqslant n_0$, on a $v_n \leqslant v_{n_0} \leqslant w_{n_0} + 1$.
   La suite (v_n) est donc majorée par $w_{n_0} + 1$.
   (b) La suite (w_n) est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \leqslant n_0$, on a $w_n \geqslant w_{n_0} \geqslant v_{n_0} - 1$. La suite (v_n) est croissante. Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $w_n \geqslant v_n - 1 \geqslant v_{n_0} - 1$. La suite (w_n) est donc minorée par $v_{n_0} - 1$.
   (c) La suite v_n est croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$. La suite (w_n) est décroissante et minorée. Elle converge donc vers une

limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$. La suite $(v_n - w_n)$ converge vers 0. On a donc $\ell_1 - \ell_2 = 0$. Pa conséquent, les deux suites convergent vers la même limite $\ell_1 = \ell_2$.

3. **Constante d'Euler**
   (a) Pour $n \geqslant 1$, la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que
   $$\ln(n+1) - \ln n = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c).$$
   Comme $c \in]n, n+1[$, on a :
   $$\frac{1}{n+1} < f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{n}.$$
   (b) Montrons que les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes. Tout d'abord, :
   $$c_{n+1} - c_n = \big(H_{n+1} - \ln(n+1)\big) - \big(H_n - \ln n\big) = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) \leqslant 0.$$
   La suite (c_n) est donc décroissante. Ensuite :
   $$d_{n+1} - d_n = \left(c_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(c_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) \geqslant 0.$$
   La suite (d_n) est donc croissante. Enfin :
   $$c_n - d_n = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes. Elles ont donc la même limite.
   (c) Nous venons de montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} H_n - \ln n = \gamma.$$
   Autrement dit :
   $$\lim_{n \to +\infty} H_n - \ln n - \gamma = 0,$$
   ce qui s'écrit également $H_n - \ln n - \gamma = o(1)$ ou encore :
   $$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

Corrigé de l'exercice 4

1. On a :
   $$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}.$$
   La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $1/2 < 1$. La série $\sum_{n \geqslant 0} r_n$ est donc convergente, de somme :
   $$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

2. (a) Si $k \geqslant 1$, la fonction $1/t^2$ est décroissante sur $[k, k+1]$. Donc pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
(b) En intégrant l'encadrement précédent sur l'intervalle $[k, k+1]$, on obtient :
$$\frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$
En sommant de $k = n+1$ à $k = N$, on obtient :
$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$
(c) Par conséquent :
$$\sum_{j=n+2}^{N+1} \frac{1}{j^2} \underset{j=k+1}{=} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient :
$$r_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant r_n.$$
Autrement dit :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant r_n = r_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$
(d) On a donc l'encadrement :
$$\underbrace{\frac{1/(n+1)}{1/n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \leqslant \frac{r_n}{1/n} \leqslant \underbrace{\frac{1/(n+1)}{1/n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} + \underbrace{\frac{1/(n+1)^2}{1/n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$
D'après le théorème des gendarmes :
$$\frac{r_n}{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Cela montre que $r_n \sim \dfrac{1}{n}$. Comme $1/n \geqslant 0$ et comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, on voit que la série $\sum r_n$ diverge.

3. (a) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée. Elle est donc convergente.

(b) (i) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a :
$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n.$$
Par conséquent :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Cela montre que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Notons que pour $x \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[\ln(1+x)\big]_0^1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= \ln 2 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

(iii) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2.$$

De plus :

$$r_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 - (I_n - \ln 2) = -I_n.$$

(c) Conclusion

(i) On va faire une intégration par parties en primitivant x^n (de sorte à faire apparaître le terme $1/(n+1)$) et en dérivant $1/(1+x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= (-1)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x}\right]_0^1 - (-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{-1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0,1]$, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leqslant x^{n+1},$$

ce qui conduit à :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}.$$

Par conséquent :

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(ii) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2(n+1)}$ est une série alternée, donc convergente. Posons

$$u_n = I_n - \frac{(-1)^n}{2(n+1)}.$$

Comme $u_n = O(1/n^2)$, il existe une constante C telle que :

$$|u_n| \leqslant C\cdot\frac{1}{n^2}$$

La série $\sum 1/n^2$ est convergente, la série $\sum |u_n|$ est donc convergente. En d'autre termes, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r_n = \sum_{n\geqslant 1} -I_n$ est donc convergente, car somme de deux séries convergentes :

$$\sum r_n = -\sum\frac{(-1)^n}{2(n+1)} - \sum u_n.$$

Corrigé de l'exercice 5

1. Notons que pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\cdot u_{n_0} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}\cdot\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}\cdots\frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}\cdot u_{n_0} = v_n\cdot\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum v_n\cdot\dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ converge. Comme pour $n\geqslant n_0$, le terme de cette série convergente majore u_n, et comme $u_n>0$, la série $\sum u_n$ est convergente.

2. (a) On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha}{n} - 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\beta-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Si $\beta > 1$ et si $1 < \alpha < \beta$, alors d'après le critère de Riemann, la série $\sum v_n$ est convergente. De plus, $\beta - \alpha > 0$ et donc, pour n suffisamment, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 0$, c'est à dire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

D'après la question 1, la série $\sum u_n$ est convergente.

(c) Si $\beta < \alpha < 1$, alors la série v_n diverge et pour n suffisamment grand :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

D'après la question 1, si $\sum u_n$ était convergente, alors $\sum v_n$ serait convergente, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, $\sum u_n$ est divergente.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\big((n+1)!\big)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1/2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut appliquer la règle de Raabe-Duhamel avec :

$$\beta = \frac{1}{2} < 1.$$

La série $\sum u_n$ diverge.

(b) On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{b}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $b - a < 1$, la série est divergente et si $b - a > 1$, la série est convergente. Enfin, si $b - a = 1$, on a :

$$u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \frac{a}{a+n}.$$

Comme $a \neq 0$ (ce n'est pas un entier négatif), $u_n \sim a/n$ qui est de signe constant. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que la série $\sum 1/n$ qui diverge.

Corrigé de l'exercice 6

1. (a) La somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ est

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}(u_{n+1}-u_n)=(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_{N+1}-u_N)=u_{N+1}-u_1.$$

La série converge si et seulement si la suite $u_{N+1}-u_1$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la suite (u_N) converge.

(b) On a

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+1/n}=\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(c) On a

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln(n)\\&=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=\frac{-1/2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $p=-1/2$ et $q=2$.

(d) La série $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente. Comme c'est une série à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge. Donc, d'après la question a), la suite (u_n) converge. La suite

$$\frac{u_n}{\ln n}=\frac{H_n}{\ln n}-1$$

tend donc vers 0, ce qui montre que $H_n/\ln n$ tend vers 1. La suite H_n est donc équivalente à $\ln n$.

2. La série S_α est convergente si et seulement si $\alpha>0$. En effet :
   - Quand $\alpha\leqslant 0$, le terme général $(-1)^n/n^\alpha$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.
   - Quand $\alpha>0$, la série S_α est une série alternée : le terme général $a_n=(-1)^n/n^\alpha$ est positif pour n pair et négatif pour n impair, la suite $|a_n|$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La série S_α est donc convergente.

3. (a) Posons $f(x)=x(n-x)$. C'est un polynôme de degré 2 qui admet un maximum lorsque $f'(x)=0$, c'est-à-dire lorsque $x=n/2$. Le maximum vaut alors $f(n/2)=n^2/4$.

(b) On a

$$c_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k^\alpha}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^\alpha}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^n}{[k(n-k)]^\alpha}=(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{[k(n-k)]^\alpha}.$$

Dans la somme de droite, il y a $n-1$ terme et chaque terme est positif et minoré par $(4/n^2)^\alpha$. On a donc

$$|c_n| \geqslant (n-1)\cdot(4/n^2)^\alpha.$$

(c) Si $0<\alpha\leqslant 1/2$, on a

$$|c_n| \geqslant \frac{2\cdot(n-1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Le terme général de la série $\sum c_n$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum c_n$ est donc divergente.

4. (a) On a

$$\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1/n}{X} + \frac{1/n}{n-X}.$$

(b) On a

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}.$$

Donc

$$c_n = (-1)^n \cdot 2\frac{H_{n-1}}{n}.$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} &= \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)(n+1)} - \frac{1}{(n-1)n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 0.
\end{aligned}$$

La suite H_{n-1}/n est donc décroissante.

(d) La série $\sum_{n\geqslant 2} c_n$ est donc convergente en tant que série alternée. En effet, c_n est positif pour n pair et négatif pour n impair, $|c_n|$ est décroissante et $c_n \to 0$ quand $n\to+\infty$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Il s'agit d'une série alternée : le terme général $u_n = (-1)^n/n$ est positif pour n pair et négatif pour n impair, la suite $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La série est donc convergente.
2. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = 1\cdot\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}.$$

En intégrant entre 0 et x, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x (-t)^k \, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

3. Quand $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n.$$

Par conséquent,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $1/(n+1) \to 0$ quand $n \to +\infty$, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t = 0.$$

4. En remplaçant x par 1, on a

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on a

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} + 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

CHAPITRE 2

SÉRIES DE FOURIER

I. Activité d'approche

On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

où $F(x,t)$ désigne une fonction de deux variables définie sur $[0,L]\times[0,+\infty[$ satisfaisant aux conditions aux bords:

$$F(0,t) = F(L,t) = 0 \qquad \forall t \geqslant 0.$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel.
2. Déterminer toutes les solutions qui sont de la forme $F(x,t) = \varphi(x)\cdot\psi(t)$.
3. On suppose que la condition de départ $f(x) = F(x,0)$ est un **polynôme trigonométrique** :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1}^{N} b_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right).$$

   (a) Montrer que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\,\mathrm{d}x.$$

   (b) Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles.

II. Introduction

En 1809, dans son *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, Fourier s'intéresse au problème suivant : l'évolution de la température d'un anneau circulaire métallique dont les deux moitiés sont initialement à des température différentes. Il énonce alors un principe tout à fait surprenant : toute fonction périodique peut être représentée par une série de sinus et de cosinus. C'est Dirichlet qui en 1829 donnera des bases solides à la théorie de Fourier. Cette théorie est un outil fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles comme l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes.

La première série qu'exhibe Fourier est :

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \cdots = \begin{cases} +\pi/4 & \text{pour } |x| < \pi/2 \\ 0 & \text{pour } |x| = \pi/2 \\ -\pi/4 & \text{pour } \pi/2 < |x| < \pi \end{cases}$$

(c'est en tout cas ce qu'il prétend). Un des objectifs de ce cours est de donner les outils qui permettent de justifier cette affirmation.

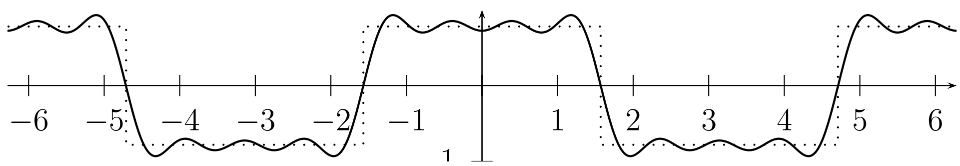


FIGURE 1. La somme des quatre premiers termes de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\big((2n+1)x\big)$ (en trait continu) et de la fonction 2π-périodique qui vaut $\pi/4$ pour $|x| < \pi/2$ et $-\pi/4$ pour $\pi/2 < |x| < \pi$ (en pointillés).

Dans tout ce chapitre, on se donne un réel $T > 0$ et on pose $\omega := \frac{2\pi}{T}\cdot$

Définition 1. On appelle *polynôme trigonométrique de degré N et de période T* toute fonction de la forme :

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega n x}.$$

On appelle *série trigonométrique* toute série de la forme :

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{i\omega n x} + c_{-n} e^{-i\omega n x}\right).$$

III. Coefficients de Fourier

Définition 2. Nous noterons $\mathcal{C}_T$ l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont T-périodiques.

Définition 3. Nous considérerons les fonctions exponentielles :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{e}_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\omega n t} \end{array}$$

Définition 4. Si $f \in \mathcal{C}_T$, les *coefficients de Fourier* de f sont :

$$c_n(f) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-i\omega n t}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple à traiter en TD. Considérons la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi]$ et prolongée à $\mathbb{R}$ par périodicité. Déterminer les coefficients de Fourier de f.

IV. Série de Fourier

Définition 5. Si $f \in \mathcal{C}_T$, la série de Fourier de f est la série de focntions :

$$c_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \big(c_n(f) \cdot \mathrm{e}_n + c_{-n}(f) \cdot \mathrm{e}_{-n} \big).$$

La $N^{\,ème}$ *somme partielle* de la série de Fourier de f est :

$$S_N(f) : t \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \mathrm{e}^{i\omega n t}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous utiliserons la notation $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \cdot \mathrm{e}_n$ pour désigner la série de Fourier de la fonction f.

Lorsqu'une fonction $f \in \mathcal{C}_T$ est à valeurs réelles, il est fréquent d'utiliser une autre écriture des sommes partielles de Fourier. En effet, on peut toujours écrire :

$$\mathrm{e}_n(t) = \cos(\omega n t) + i \sin(\omega n t).$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{i\omega n t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega n t) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\omega n t)$$

avec, pour $n \geqslant 0$:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad b_n = i c_n - i c_{-n}.$$

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 6. Si $f \in \mathcal{C}_T$, on pose, pour $n \geqslant 0$:

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega n t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega n t)\, \mathrm{d}t.$$

La $N^{\,ème}$ somme partielle de la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}_T$ est donc :

$$S_N(f) : t \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f) \cos(\omega n t) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f) \sin(\omega n t).$$

Proposition 1. Si $f \in \mathcal{C}_T$ est une fonction à valeurs réelles, les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels (ce qui n'est pas nécessairement le cas des coefficients $c_n(f)$).

Proposition 2. La fonction f est une fonction paire si, et seulement si, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls. La fonction f est une fonction impaire si, et seulement si, les coefficients $a_n(f)$ sont tous nuls.

Exemple à traiter en TD : si l'on reprend l'exemple de la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ qui coïncide avec $x \mapsto |x|$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut écrire les sommes partielles de la série de Fourier sous la forme :

$$S_N(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\big((2p+1)t\big).$$

La fonction f est paire. La série de Fourier ne fait intervenir que des cosinus.

V. Propriétés des coefficients de Fourier

Proposition 3. On a les relations suivantes entre coefficients de Fourier :

1. Coefficients de $\overline{f}$: $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ et si f est une fonction à valeurs réelles, $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$.
2. Coefficients de $g : t \mapsto f(-t)$: $c_n(g) = c_{-n}(f)$. Si f est paire, alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$ et si f est impaire $c_{-n}(f) = -c_n(f)$.
3. Coefficients de $g : t \mapsto f(t+a)$: $c_n(g) = \mathrm{e}^{i\omega na}c_n(f)$.

Preuve. Changement de variables.

Proposition 4. Si $f \in \mathcal{C}_T$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors :

$$c_n(f') = i\omega n c_n(f).$$

Preuve. Intégration par parties.

Corollaire. Si $f \in \mathcal{C}_T$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors pour tout $k \geqslant 1$:

$$c_n(f^{(k)}) = (i\omega n)^k c_n(f).$$

Preuve. Récurrence.

VI. Taille des coefficients de Fourier

Proposition 5. Si $f \in \mathcal{C}_T$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left|c_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \left|f(t)\right| \,\mathrm{d}t.$$

La suite $\big(c_n(f)\big)$ est donc bornée. En fait, nous établierons ultérieurement le résultat suivant.

Proposition 6. Si $f \in \mathcal{C}_T$, alors $c_n(f)$ tend vers 0 quand $n \to \pm\infty$.

Corollaire. Si $f \in \mathcal{C}_T$ est de classe $\mathcal{C}^k$, alors quand $n \to \pm\infty$,

$$c_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Corollaire. Si $f \in \mathcal{C}_T$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors quand $n \to \pm\infty$, pour tout $\alpha \geqslant 0$, on a

$$c_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

VII. Convergence d'une série de Fourier

Supposons maintenant que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une famille de nombre complexe. La suite de fonctions $S_N := \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot \mathrm{e}_n$ est-elle convergente ? Si oui, les c_n sont-ils les coefficients de Fourier de la limite ?

Proposition 7. Si (c_n) est une suite de nombre complexes tels que $\sum |c_n| < +\infty$, alors la suite

$$S_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot \mathrm{e}^{i\omega n t}$$

converge vers une limite $f(t)$.

Définition 7. On dit alors que la suite de fonctions S_N converge **normalement** vers f, ou encore que la convergence est **normale**.

Proposition 8. Si la suite $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot \mathrm{e}_n$ converge normalement vers f, alors f est continue et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.

Proposition 9. Si la suite des dérivées $\sum_{n=-N}^{N} i\omega n c_n \cdot \mathrm{e}_n$ converge normalement vers g, alors la suite $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot \mathrm{e}_n$ converge normalement vers f avec $f \in \mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

VIII. Convergence de la série de Fourier d'une fonction continue

Attention, il se peut que f soit continue et que sa série de Fourier ne converge pas normalement. En fait, il se peut même que sa série de Fourier ne converge pas.

A. Produit de convolution

Commençons par manipuler les sommes partielles de la série de Fourier pour les écrire sous une forme plus agréable à manipuler :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}_n(x) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-i\omega n t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{i\omega n x} \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot\left(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{i\omega n(x-t)}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On a donc :

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot D_N(x-t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{i\omega n t}.$$

Une notion s'impose alors naturellement, la notion de produit de convolution.

Définition 8. Si $f \in \mathcal{C}_T$ et $g \in \mathcal{C}_T$, le produit de convolution de f par g est la fonction :

$$f * g : x \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

Nous allons dans un premier temps étudier quelques propriétés de ce produit de convolution.

Proposition 10. Soient f, g des fonctions de $\mathcal{C}_T$. Alors :

1. $f * g \in \mathcal{C}_T$.
2. $f * g = g * f$.
3. L'application $h \mapsto f * h$ est une application linéaire de $\mathcal{C}_t$ dans $\mathcal{C}_T$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f * \mathrm{e}_n = c_n(f) \cdot \mathrm{e}_n$.

Corollaire. Si $P := \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n \mathrm{e}_n$ est un polynôme trigonométrique, alors $f * P$ est également un polynôme trigonométrique.

B. Unité approchée

Un résultat fondamental est celui du produit de convolution avec une unité approchée de $\mathcal{C}_T$.

Définition 9. Une unité approchée de $\mathcal{C}_T$ est une suite (h_n) de fonctions positives de $\mathcal{C}_T$ telle que :

- pour tout $0 < \delta < T/2$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $0 \leqslant h_n \leqslant \varepsilon$ sur l'intervalle $[\delta, T-\delta]$ pour n assez grand et
- $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T h_n = 1$ pour tout n.

Exemple d'unité approchée (à traiter en TD). Pour $N \geqslant 0$, posons :

$$h_N(t) := \frac{1}{A_N} \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad \text{avec} \quad A_N := \frac{1}{T}\int_0^T \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t.$$

Montrer que h_N est un polynôme trigonométrique et que (h_N) est une unité approchée de $\mathcal{C}_T$.

Proposition 11. Si $f \in \mathcal{C}_T$ et si (h_n) est une unité approchée de $\mathcal{C}_T$, alors la suite $(f * h_n)$ converge **uniformément** vers f sur $\mathbb{R}$: pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|f * h_n - f| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

C. Théorèmes de convergence

Théorème 12 (Weierstraß). Toute fonction continue $f \in \mathcal{C}_T$ peut être approchée par des polynômes trigonométriques.

Preuve (voir exercice 2 de la feuille sur le produit de convolution). Posons

$$h_N(t) = \frac{1}{A_N} \cos^{2N}(\omega t/2) \quad \text{avec} \quad A_N = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^{2N}(\omega t/2) \, \mathrm{d}t.$$

- Les h_N sont des polynômes trigonométriques, et donc $h_N * f$ est un polynôme trigonométrique.
- la suite (h_N) est une unité approchée de $\mathcal{C}_T$ et donc $h_N * f \to f$.

Nous avons mentionné plus haut que la somme partielle $S_N(f)$ peut s'écrire :

$$S_N(f) = f * D_N \quad \text{avec} \quad D_N = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}_n = \frac{\sin\big(\omega(N+1/2)t\big)}{\sin(\omega t/2)}.$$

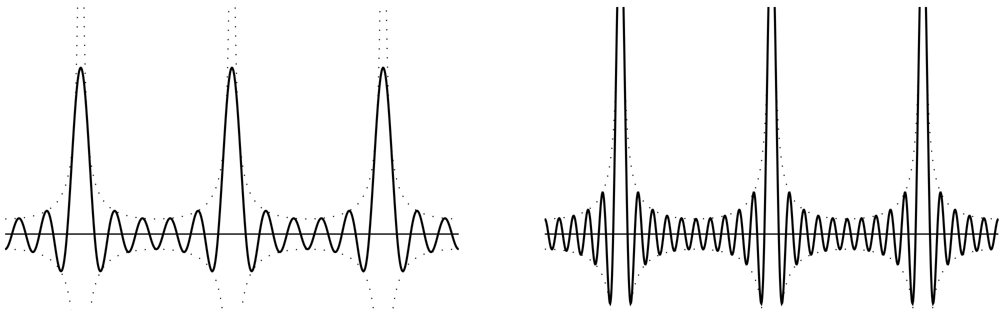


FIGURE 2. Les noyaux de Dirichlet pour $N = 5$ et $N = 10$.

Une fonction $f \in \mathcal{C}_T$ n'est pas nécessairement la somme de sa série de Fourier car la suite (D_N) n'est pas une unité approchée. Les oscillations du noyau de Dirichlet D_N ne deviennent pas petites quand $N \to +\infty$. Bien au contraire, la fonction D_N oscille entre les graphes des fonctions $1/\sin(\omega t/2)$ et $-1/\sin(\omega t/2)$.

Le résultat suivant du à Dirichlet affirme que la série de Fourier converge lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En particulier, en tout point x, la fonction f admet une limite à droite $f(x^+)$ et une limite à gauche $f(x^-)$.

Théorème 13 (Dirichlet). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, f est la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}\big(f(x^-) + f(x^+)\big).$$

Nous ne présenterons pas la preuve ici.

Exemple d'application. Dans le cas de la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ qui coïncide avec $x \mapsto |x|$ sur $[-\pi, \pi]$, on a $c_0(f) = \dfrac{\pi}{2}$ et pour $p \geqslant 1$, $c_{\pm 2p}(f) = 0$ et $c_{\pm(2p-1)}(f) = -\dfrac{2}{\pi(2p-1)^2}$.

On a donc :

$$\pi = f(\pi) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2p+1)^2}\cdot$$

On en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{8}\cdot$$

À la fin du $19^{ème}$ siècle, l'italien Cesàro a l'idée de rendre convergentes des suites divergentes (u_n) en considérant les moyennes arithmétiques :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\cdot$$

Par exemple, si l'on applique ce procédé à la suite (u_n) définie par $u_n := (-1)^n$, la suite (v_n) converge vers 0. Si la suite (u_n) converge, il est rassurant de constater que la suite v_n converge vers la même limite.

Si l'on applique le procédé de Cesàro à la suite des sommes partielles $\big(S_N(f)\big)$ de la série de Fourier de f, on obtient une nouvelle suite :

$$T_N(f) := \frac{1}{N}\big(S_0(f) + S_1(f) + \ldots + S_{N-1}(f)\big) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f)\cdot \mathrm{e}_n.$$

Comme on l'a fait pour les sommes partielles de la série de Fourier, on peut écrire $T_N(f)$ à l'aide d'un produit de convolution :

$$T_N(f) = \frac{1}{N}\big(f * D_0 + f * D_1 + \ldots + f * D_{N-1}\big) = f * F_N$$

où les fonctions

$$F_N = \frac{1}{N}(D_0 + D_1 + \ldots + D_{N-1})$$

portent le nom de noyaux de Féjer.

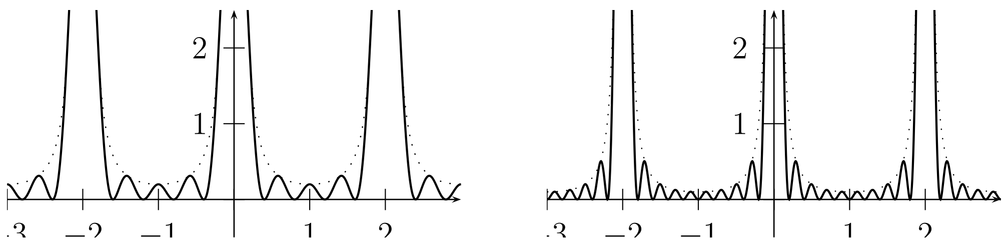


FIGURE 3. Les noyaux de Féjer pour $N = 5$ et $N = 10$.

Théorème 14 (Féjer). Si $f \in \mathcal{C}_T$, les sommes de Féjer $T_N(f) := \dfrac{1}{N}\big(S_0(f)+\ldots+S_{N-1}(f)\big)$ convergent vers f.

Preuve (voir exercice 3). La suite (F_N) des noyaux de Féjer est une unité périodique approchée.

IX. Formule de Parseval

Le cadre naturel pour étudier les séries de Fourier est celui des fonctions T-périodiques non nécessairement continues, mais qui sont de carré intégrable sur une période :

$$\int_0^T \left|f(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

On peut munir cet espace du produit scalaire :

$$(\, f \mid g \,) := \frac{1}{T}\int_0^T \bar{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, les exponentielles :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{e}_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\omega n t} \end{array}$$

forment une famille orthonormale de $\mathcal{C}_T$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\, e_n \mid e_n \,) = \frac{1}{T}\int_0^T |\mathrm{e}_n|^2 = 1$$

et pour $n \neq m$:

$$(\, e_n \mid e_m \,) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{i\omega(m-n)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{i\omega(m-n)t}}{i\omega(m-n)}\right]_0^T = \frac{\mathrm{e}^{i2\pi(m-n)}-1}{i\omega(m-n)} = 0.$$

Si $f \in \mathcal{C}_T$ et si J est une partie finie de $\mathbb{Z}$, le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel engendré par $\{\mathrm{e}_j\}_{j\in J}$ est donc donné par :

$$\sum_{j\in J} c_j(f)\cdot \mathrm{e}_j \quad \text{avec} \quad c_j(f) := (\, \mathrm{e}_j \mid f \,).$$

La série de Fourier $S_N(f)$ est donc le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_{-N},\ldots,\mathrm{e}_{-1},\mathrm{e}_0,\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_N).$$

La densité des polynômes trigonométriques permet d'établir l'égalité suivante, qui est une généralisation en dimension infinie du théorème de Pythagore.

Théorème 15 (Formule de Parseval). Pour toute fonction f qui est T-périodique et de carré intégrable sur une période, on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2.$$

Exemple d'application. Dans le cas de la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ qui coïncide avec $x \mapsto |x|$ sur $[-\pi,\pi]$, on a $c_0(f) = \dfrac{\pi}{2}$ et pour $p \geqslant 1$, $c_{\pm 2p}(f) = 0$ et $c_{\pm(2p-1)}(f) = -\dfrac{2}{\pi(2p-1)^2}$. On a donc :

$$\frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2(2p+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}.$$

On en déduit que :

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}\quad\text{et}\quad\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Exercices sur les séries de Fourier.

Exercice 1 : Déterminer les coefficients $c_n(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour les fonctions suivantes :

1. $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$,
2. $f \in \mathcal{C}_1$ définie par $f(t) = t^2$ pour $t \in [-1/2, 1/2]$,
3. $f \in \mathcal{C}_2$ impaire, définie par $f(t) = t(1-t)$ pour $t \in [0, 1]$,
4. $f(t) = \left|\sin(\pi t)\right|$,
5. $f := \max(\cos, 0)$.

Exercice 2 : Développer $x \mapsto \sin^3(x)$ en série de Fourier.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}_T$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left|c_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{T} \int_0^T \left|f(t)\right| \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4 : Soit $f \in \mathcal{C}_T$. Montrer que $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ et si f est une fonction à valeurs réelles, $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{C}_T$ et posons $g(t) = f(-t)$.

1. Montrer que $c_n(g) = c_{-n}(f)$.
2. En déduire que si f est paire, alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$ et si f est impaire $c_{-n}(f) = -c_n(f)$.

Exercice 6 : Soit $f \in \mathcal{C}_T$ et posons $g(t) = f(t+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$c_n(g) = \mathrm{e}^{i\omega n a} c_n(f).$$

Exercice 7 : Soit $f \in \mathcal{C}_T$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$c_n(f') = i\omega n c_n(f).$$

Exercice 8 : Soit $f \in \mathcal{C}_T$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$c_n(f^{(k)}) = (i\omega n)^k c_n(f).$$

Exercice 9 : Supposons que $f \in \mathcal{C}_T$.

1. Montrer que si $f(x + T/2) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $a_{2p}(f) = 0$ pour tout $p \geqslant 0$ et $b_{2p}(f) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.
2. Montrer que si $f(T/2 - x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $a_{2p+1}(f) = b_{2p}(f) = 0$ pour tout $p \geqslant 0$.

Corrigé de l'exercice 1

1.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{ch}(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}+e^{(-1-in)t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}+\frac{e^{(-1-in)t}}{-1-in}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}+\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{-1-in}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}.\\
a_n &= c_n+c_{-n} = 2c_n\\
b_n &= 0.
\end{aligned}
$$

2.

$$
c_n = \int_{-1/2}^{1/2} t^2 e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t.
$$

Si $n = 0$

$$
c_0 = \int_{-1/2}^{1/2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}.
$$

Si $n \neq 0$, on fait des intégrations par parties :

$$
\begin{aligned}
c_n &= \left[t^2\frac{e^{-2i\pi nt}}{-2i\pi n}\right]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} 2t\frac{e^{-2i\pi nt}}{-2i\pi n}\,\mathrm{d}t\\
&= 0 - \left[2t\frac{e^{-2i\pi nt}}{(-2i\pi n)^2}\right]_{-1/2}^{1/2} + \int_{-1/2}^{1/2} 2\frac{e^{-2i\pi nt}}{(-2i\pi n)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi^2n^2}(1+1) + \left[2\frac{e^{-2i\pi nt}}{(-2i\pi n)^3}\right]_{-1/2}^{1/2}\\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi^2n^2}.\\
a_n &= 2c_n\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

3. $a_n = 0$ car f est impaire.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 t(1-t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t \\
&= 2\left[t(1-t)\cdot\frac{-\cos\pi n t}{\pi n}\right]_0^1 + 2\int_0^1 (1-2t)\frac{\cos\pi n t}{\pi n}\ \mathrm{d}t \\
&= 0 + 2\left[(1-2t)\cdot\frac{\sin\pi n t}{(\pi n)^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-2)\cdot\frac{\sin\pi n t}{(\pi n)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 0 - 4\left[\frac{\cos\pi n t}{(\pi n)^3}\right]_0^1 \\
&= \frac{-4}{(\pi n)^3}\big((-1)^n - 1\big). \\
b_n &= 0 \text{ si } n \text{ est pair.} \\
b_n &= \frac{8}{(\pi n)^3} \text{ si } n \text{ est impair.} \\
c_n &= \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{-i b_n}{2}. \\
c_n &= 0 \text{ si } n \text{ est pair.} \\
c_n &= \frac{-4i}{(\pi n)^3} \text{ si } n \text{ est impair.}
\end{aligned}
$$

4. Période 1.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \int_0^1 \sin\pi t e^{-2\pi i n t}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i} e^{-2i\pi n t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\pi(1-2n)t}}{i\pi(1-2n)} - \frac{e^{i\pi(-1-2n)t}}{i\pi(-1-2n)}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{-1-1}{i\pi(1-2n)} - \frac{-1-1}{i\pi(-1-2n)}\right) \\
&= \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \\
a_n &= 2c_n \\
b_n &= 0.
\end{aligned}
$$

5. Période 2π.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cos nt \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(n-1)t + \cos(n+1)t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)t}{n-1} + \frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 0 \text{ si } n \text{ est impair.}
\end{aligned}$$

si $n = 2k$

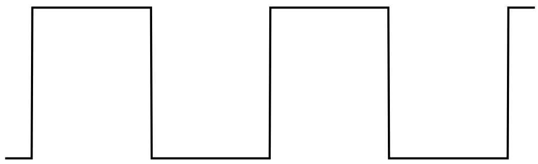
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(2\frac{\sin(n-1)\pi/2}{n-1} + 2\frac{\sin(n+1)\pi/2}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^k}{n-1} + \frac{(-1)^k}{n+1}\right) \\
&= \frac{-2\cdot(-1)^k}{\pi(n^2-1)}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

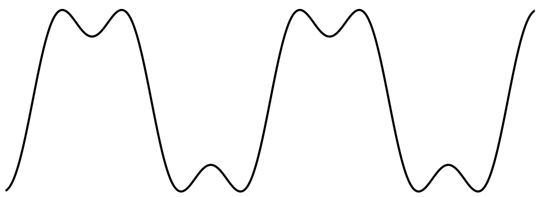
$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.
\end{aligned}$$

L2 spécial. Séries de Fourier.
Devoir maison n°1.

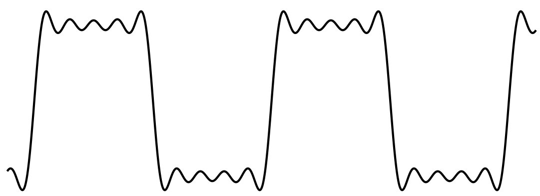
Si l'on observe les sommes partielles $S_N(f)$ de la série de Fourier d'une fonction créneau f, on constate que près de la discontinuité, le graphe de $S_N(f)$ dépasse du graphe de f d'une quantité appréciable. En ajoutant plus de termes de la série, le dépassement ne disparaît pas et ne diminue pas. Nous nous proposons d'étudier ce phénomène, appelé le phénomène de Gibbs.



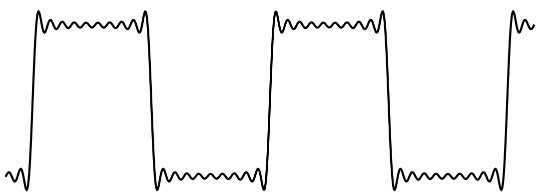
f



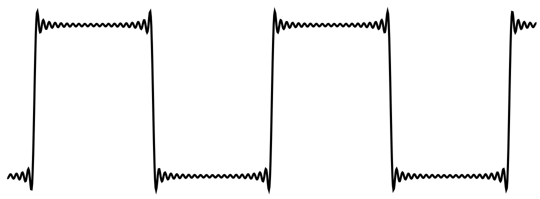
$S_4(f)$



$S_{10}(f)$



$S_{20}(f)$



$S_{40}(f)$

I. Préliminaires

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} z^{2k+1}$ est-elle convergente ?
2. Soit $p \geqslant 1$ un entier. Calculer la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z^{2k+1}$ pour $z \neq 1$.
3. Supposons que $x \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier. En posant $z = e^{2i\pi x}$ et en considérant la partie réelle de la somme partielle précédente, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\bigl(2\pi(2k+1)x\bigr) = \cos(2\pi p x)\frac{\sin(\pi p x)}{\sin(\pi x)}.$$

II. Série de Fourier

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est périodique de période 1 et est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la série de Fourier de f est :

$$\sum_{n>0, n \text{ impair}} \frac{4}{\pi} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

2. Soit

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{4}{\pi} \frac{\sin\big(2\pi(2k+1)x\big)}{2k+1}.$$

la $2p^{\,ème}$ somme partielle de la série de Fourier de f.

(a) Montrer que

$$S_p'(x) = 8\cos\big(2\pi p x\big)\frac{\sin(\pi p x)}{\sin(\pi x)}.$$

(b) En déduire le plus petit $x > 0$ où la dérivée de S_p s'annule. On note M_p la valeur de S_p en ce point.

III. Limite de M_p

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 1.$$

1. Montrer que φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$M_p = 2\sum_{k=0}^{p-1} \varphi(x_k)\cdot(a_{k+1} - a_k) \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{k}{p} \quad \text{et} \quad x_k = \frac{2k+1}{2p} \in [a_k, a_{k+1}].$$

3. En déduire que

$$\lim_{p\to+\infty} M_p = 2\int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

IV. Minoration de l'intégrale

1. Montrer que
   - $\sin(\pi x) \geqslant 2x$ pour $x \in [0, 1/2]$ et
   - $\sin(\pi x) \geqslant 2 - 2x$ pour $x \in [1/2, 1]$.
2. En déduire que

$$2\int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 2\ln 2 > 1.$$

Remarque : la valeur de $2\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas calculable à l'aide des fonctions élémentaires. Un calcul sur ordinateur donne une valeur approchée de $1.1789797976\ldots$.

L2 spécial. Séries de Fourier.
Contrôle continu (1h30).

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barême indicatif : exo I sur 4 points, exo II sur 6 points, exo III sur 10 points.

I. Séries numériques

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ est-elle absolument convergente ?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ est-elle convergente ?

II. Noyau de Dirichlet

1. Soit $N \geqslant 1$ un entier et $z \neq 1$ un nombre complexe. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} z^n$.
2. Supposons que $t \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier. En posant $z = e^{2i\pi t}$, en déduire une expression de
$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega n t}$$
comme quotient de deux sinus.

III. Série de Fourier

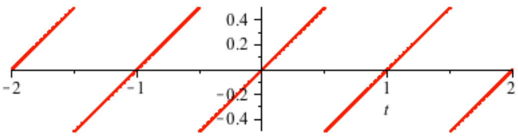
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2 définie par
$$f(t) = |t| \quad \text{pour} \quad t \in [-1, 1].$$

1. Que peut-on dire des coefficients de Fourier $b_n(f)$?
2. Déterminer la série de Fourier de f (on donnera l'expression sous forme d'une série de sinus et cosinus).

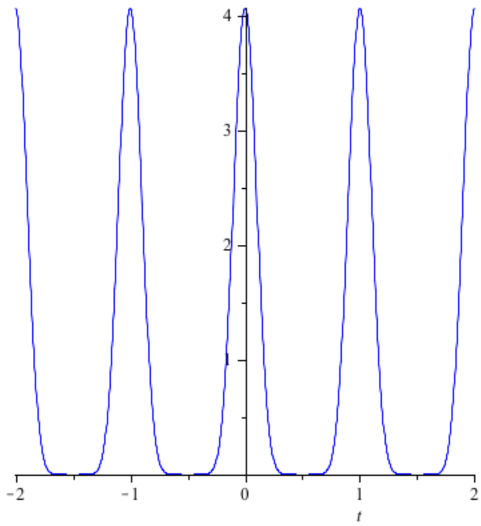
Exercices sur le produit de convolution

Exercice 1 : Voici les graphes de trois fonctions 1-périodiques

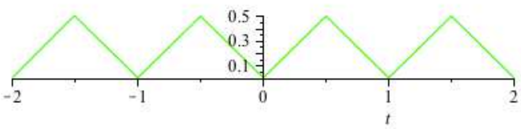
– f_1 :



– f_2 :

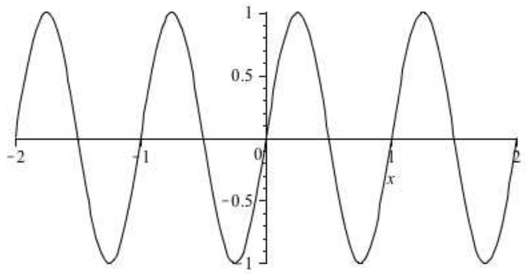


– f_3 :

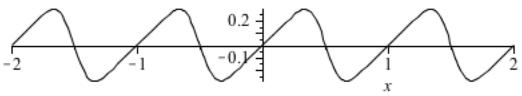


ainsi que les graphes de trois fonctions :

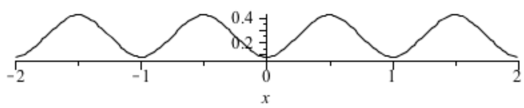
– g_1 :



– g_2 :



– g_3 :



1. Quels sont les graphes de $f_2 * f_1$ et $f_2 * f_3$?
2. A-t-on $f_1 * f_1(0) < 0$, $f_1 * f_1(0) = 0$ ou bien $f_1 * f_1(0) > 0$?

Exercice 2 : Démonstration du théorème de Weierstraß

Soit f une fonction continue T-périodique.

1. Soit
$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i\omega t}$$
un polynôme trigonométrique. Montrer que $f*P$ est un polynôme trigonométrique.
2. Pour $N > 0$, posons
$$h_N(t) = \frac{1}{A_N}\cos^{2N}(\omega t/2) \quad \text{avec} \quad A_N = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^{2N}(\omega t/2)\ \mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que h_N est un polynôme trigonométrique.
   (b) Montrer que la suite (h_N) est une unité approchée.
3. En déduire qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge vers f.

Exercice 3 : Démonstration du théorème de Féjer

Soit f une fonction continue et T-périodique. On note
$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{i\omega t}$$

la N-ième somme partielle de la série de Fourier de f et on pose

$$T_N = \frac{1}{N}(S_0 + S_1 + \cdots + S_{N-1}).$$

1. Montrer que
$$T_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e^{in\omega t}.$$
2. Montrer que
$$T_N = f * F_N \quad \text{avec} \quad F_N = \frac{1}{N}(D_0 + D_1 + \cdots + D_{N-1})$$
où D_N est le noyau de Dirichlet
$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega n t} = \frac{\sin(\omega(2N+1)t/2)}{\sin(\omega t/2)}.$$
3. Montrer que
$$\frac{1}{T}\int_0^T F_N(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T D_N(t)\ \mathrm{d}t = 1.$$
4. Montrer que
$$F_N(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\omega N t/2)}{\sin(\omega t/2)}\right)^2.$$
5. Montrer que la suite (F_N) est une unité approchée.
6. En déduire que $T_N \to f$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 4 : Soit f et g deux fonctions T-périodique. On suppose que f est continue et que g est continue par morceaux.

- On admet que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cette propriété s'appelle l'uniforme continuité de f.
- Montrer que $f * g$ est continue.

L2 spécial. Séries de Fourier.
Devoir maison n°2.

I. Calcul de deux séries numériques

1. Justifier la convergence des séries numériques
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}.$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ sur $[-\pi, \pi[$. Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont de la forme
$$c_n(f) = C \cdot \frac{(-1)^n}{1-in}$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on déterminera.
3. En utilisant le théorème de Dirichlet pour $x = 0$ et pour $x = \pi$, déterminer
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}.$$
4. En utilisant la formule de Parseval, retrouver
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+n^2}.$$

II. Théorème ergodique Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :
$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x+k\alpha) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que le résultat est vrai si $f(x) = e^{i2\pi nx}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ (on distinguera les cas $n = 0$ et $n \neq 0$ et on utilisera le fait que α est irrationnel).
2. En déduire que le résultat est vrai si f est un polynôme trigonométrique.
3. On se place dans le cas général où f est simplement continue. On note S_n la n-ième somme de Fourier de f et $T_n = \dfrac{1}{n}\big(S_0 + \ldots + S_{n-1}\big)$ la n-ième somme de Féjer. On rappelle que pour tout $\varepsilon > 0$, si n est assez grand
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \big|T_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$
   (a) Montrer que si n est assez grand,
$$\left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x+k\alpha) - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T_n(x+k\alpha)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\int_0^1 T_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) Conclure.

L2 spécial. Séries de Fourier.
Corrigé du devoir maison n°2.

I. Calcul de deux séries numériques

1. Les deux séries sont absolument convergentes. En effet, $0 < 1/(1+n^2) < 1/n^2$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge d'après le critère de Riemann.

   Remarque : il est important de préciser *absolument convergent* et *critère de Riemann* pour montrer que l'on sait à quelle partie du cours on fait appel.
2. On a
$$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}}{2\pi(1-in)} = \frac{(-1)^n}{1-in}\cdot\frac{\sinh\pi}{\pi}. \end{aligned}$$
3. La fonction e^x est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$. La fonction et sa dérivée admettent une limite à droite en $-\pi$ et une limite à gauche en π. La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux et on peut appliquer le théorème de Dirichlet.

   On a
$$\begin{aligned} 1 = f(0) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\cdot 0} &= \lim_{N\to+\infty}\left(c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} c_n(f) + c_{-n}(f)\right) \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\left(1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{1-in} + \frac{(-1)^n}{1+in}\right) \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\left(1 + 2\cdot\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right). \end{aligned}$$
   On a donc
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh\pi} - 1\right).$$
   De même
$$\begin{aligned} \cosh\pi = \frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2} = \frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\cdot\pi} \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(c_0(f) + (-1)^n\cdot\sum_{n=1}^{N} c_n(f) + c_{-n}(f)\right) \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\left(1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\right) \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\left(1 + 2\cdot\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2}\right). \end{aligned}$$
   On a donc
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\cosh\pi}{\sinh\pi} - 1\right).$$

Remarque : il est important de rappeler les hypothèses pour utiliser le théorème de Dirichlet : la fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

4. La formule de Parseval affirme que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}=\frac{\sinh(2\pi)}{2\pi}=\frac{\sinh\pi\cosh\pi}{\pi}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=|c_0(f)|^2+\sum_{n\geqslant 1}|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2=\left(\frac{\sinh\pi}{\pi}\right)^2\cdot\left(1+2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2}\right).$$

On retrouve donc

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\cosh\pi}{\sinh\pi}-1\right).$$

II. Théorème ergodique

1. La série

$$\sum_{k=0}^{m-1}e^{i2\pi n(x+k\alpha)}$$

est une série géométrique de premier terme $e^{i2\pi nx}$ et de raison $e^{i2\pi n\alpha}$.

Si $n=0$, alors $f(x)=1$ et la moyenne vaut

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f(x+k\alpha)=1=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $n\neq 0$, alors $2\pi n\alpha$ n'est pas un entier car α est irrationnel et donc $e^{i2\pi n\alpha}\neq 1$. La somme de la série vaut donc

$$\sum_{k=0}^{m-1}e^{i2\pi n(x+k\alpha)}=e^{i2\pi nx}\frac{1-e^{i2\pi n\alpha m}}{1-e^{i2\pi n\alpha}}.$$

On a donc

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f(x+k\alpha)\right|\leqslant\frac{2}{m\cdot|1-e^{i2\pi n\alpha}|}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0=\int_0^1 e^{i2\pi nt}\,\mathrm{d}t.$$

2. Si f est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire une combinaison linéaire de fonctions $e^{i2\pi nx}$, alors le résultat reste valide par linéarité du passage à la limite.

3. (a) On a

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f(x+k\alpha)-\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}T_n(x+k\alpha)\right|\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}|f(x+k\alpha)-T_n(x+k\alpha)|\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon=\varepsilon$$

et

$$\left|\int_0^1 T_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |T_n(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

(b) Si m est assez grand, on a

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T_n(x+k\alpha) - \int_0^1 T_n(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc, pour m et n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x+k\alpha) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x+k\alpha) - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T_n(x+k\alpha)\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T_n(x+k\alpha) - \int_0^1 T_n(t)\ \mathrm{d}t\right| \\ &\quad + \left|\int_0^1 T_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

On vient de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si m est assez grand,

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x+k\alpha) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant 3\varepsilon,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x+k\alpha) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.$$

L2 spécial. Séries de Fourier.
Examen final (2h).

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barême indicatif : exo I sur 10 points, exo II sur 10 points.

I. Calcul d'une série numérique.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

1. Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$ est bien définie.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ sur $[-\pi, \pi]$. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nt)\right).$$
4. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.

II. Inégalité de Wirtinger.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$
On veut montrer que
$$\int_0^1 \left|f(t)\right|^2\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\ \mathrm{d}t$$
et étudier le cas d'égalité.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$c_n(f') = i2\pi n c_n(f).$$
2. En prenant soin du cas $n = 0$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$\left|c_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|c_n(f')\right|.$$
3. En déduire que
$$\int_0^1 \left|f(t)\right|^2\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\ \mathrm{d}t.$$
4. Pour quelles fonctions f a-t-on
$$\int_0^1 \left|f(t)\right|^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\ \mathrm{d}t\ ?$$