TABLE DES MATIÈRES

Préface

Ce fascicule correspond à l'enseignement dispensé dans les sections L1 SDI-PCI au cours de second semestre de l'année scolaire 2004-2005.

Il ne s'agit pas d'un cours complet, mais d'une base destinée à être complétée en cours et en travaux dirigés. Plus précisément :

– **en cours.** L'étudiant n'est plus tenu à recopier tous les énoncés des propositions et des définitions, mais seulement les compléments (remarques, mises en garde, démonstrations, ...) que le professeur a choisi d'exposer. Lors des séances en amphi, l'étudiant peut alors être sollicité et jouer un rôle actif : recherche des activités d'approche au début de chaque chapitre, mais aussi recherche d'exercices illustrant certains résultats, ou même de certaines démonstrations.

  Nous n'avons démontré que certaines propositions, repérées par un astérisque, selon les critères suivants :
  - les démonstrations sont tout à fait accessibles à l'étudiant
  - les méthodes utilisées peuvent être réinvesties dans d'autres exercices classiques
  - la démonstration peut aider à mémoriser ou à retrouver rapidement certains résultats.

– **en travaux dirigés.** Les exercices ont été choisis de manière à faire manipuler et assimiler les notions fondamentales du programme. Quelques exercices moins classiques sont repérés par un astérisque.

– **évaluation des étudiants.** Nous avons pratiqué le système d'évaluation par contrat de confiance (EPCC) dont voici les trois étapes principales:
  1. présentation du système aux étudiants dès le début du semestre
  2. une semaine environ avant chacun des trois contrôles continus, 15 jours environ avant l'examen final, on indique aux étudiants un programme précis (exercices, questions de cours, ...) sur lequel ils seront interrogés sans modification des énoncés. Un seul exercice noté sur 4 points sur 20 ne sera pas dans la liste.
  3. une séance de questions-réponses est organisée avant chaque épreuve afin de préciser des points mal compris par certains étudiants.

  Le programme et le sujet de l'examen final figurent à la fin du fascicule.

Nous envisageons de publier un fascicule présentant les erreurs usuelles commises par les étudiants ainsi que les commentaires qui nous ont semblés particulièrement important à préciser en cours.

Nous remercions François Dahmani, Marie Delaere et Florian Deloup qui ont bien voulu relire ce fascicule.

Toulouse, janvier 2006.

PARTIE I

ALGÈBRE

CHAPITRE 1

RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Activités d'approche

N.B. Nous nous restreignons dans ce cours d'algèbre aux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Activité 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-y).$$

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
4. L'application f est-elle bijective?
5. Soient $e_1' = (1,2)$ et $e_2' = (3,7)$. Montrer que (e_1', e_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Trouver la matrice de f dans la base (e_1', e_2').

Activité 2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère $f : E \to E$ l'application définie par

$$f(P) = P'.$$

Soient P_1, P_2 et P_3 les polynômes définis par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et $P_3(X) = X^2$.

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de E.
3. Montrer que f est une application linéaire. Quelle est la matrice de f dans la base (P_1, P_2, P_3) ? On notera A cette matrice.
4. Soient Q_1, Q_2 et Q_3 les polynômes définis par $Q_1(X) = 1$, $Q_2(X) = 1 + X$ et $Q_3(X) = (1+X)^2$. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de E.
5. Déterminer la matrice de passage de (P_1, P_2, P_3) à (Q_1, Q_2, Q_3).
6. Déterminer la matrice A' de f dans la base (Q_1, Q_2, Q_3).

Feuille bilan

I. Espaces vectoriels

A. Notions d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel

Définition 1. – Un ensemble E muni d'une addition interne (notée $+$) et d'une multiplication par un réel (notée $\cdot$) est un espace vectoriel (e.v. en abrégé) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
1. $E \neq \emptyset$;
2. $\forall u, v, w \in E$, $(u+v)+w = u+(v+w)$;
3. $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall u \in E$, $0_E + u = u + 0_E = u$;
4. $\forall u \in E$, $\exists (-u) \in E$, tel que $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$;
5. $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$;
6. $\forall u \in E$, $1 \cdot u = u$;
7. $\forall u \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$;
8. $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$;
9. $\forall u \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

– Un ensemble $A \subset E$ est un sous espace vectoriel (s.e.v. en abrégé) de E si $(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Proposition 1. Si E est espace vectoriel et si $A \subset E$, A est un s.e.v. de E si et seulement si

– $0_E \in A$
– $x, y \in A \Longrightarrow x + y \in A$
– $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A \Longrightarrow \lambda x \in A$.

On peut également montrer que $0_E \in A$ et que $(\lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in A) \Longrightarrow (\lambda x + y \in A)$.

B. Famille libre, liée, famille génératrice, base

Définition 2. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$

$$(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E) \Longrightarrow (\lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0).$$

Définition 3. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $(e_1, \ldots, e_n)$ n'est pas une famille libre.

Définition 4. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$

$$(\forall x \in E)(\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}) \quad x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Définition 5. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et génératrice.

C. Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 2. S'il existe une base qui contient n éléments, alors toute base contient n éléments.

Définition 6. La dimension d'un espace vectoriel E est le nombre d'éléments d'une base quelconque de E.

Proposition 3. Si E est de dimension $\underline{n}$ alors
$(e_1, \dots, e_{\underline{n}})$ est une base
$\iff (e_1, \dots, e_n)$ est libre
$\iff (e_1, \dots, e_n)$ est génératrice.

Proposition 4 (*). Si A est un s.e.v. de E et si $\dim A = \dim E$, alors $A = E$.

Corollaire. Si A et B sont deux s.e.v. de E, si $A \subset B$ et si $\dim A = \dim B$, alors $A = B$.

Proposition 5 (Théorème de la base incomplète). Si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre dans E de dimension n, alors il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E.

Définition 7. Le s.e.v. engendré par $(e_1, \dots, e_p)$ est l'ensemble des x de la forme

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

On le note $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ ou bien $[e_1, \dots, e_p]$.

D. Notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 8. Si A et B sont deux sous-ensembles d'un espace vectoriel E, la somme de A et B est l'ensemble :

$$A + B \overset{\text{déf}}{=} \{x + y \ ; \ x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Définition 9. Si A et B sont deux s.e.v. d'un espace vectoriel E, on dit que A et B sont en somme directe et on note $A \oplus B = E$ si et seulement si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$.

Proposition 6. $A \oplus B = E$ si et seulement si $A \cap B = \{0_E\}$ et $A + B = E$.

Proposition 7. Si E est de dimension finie, $A \oplus B = E$ si et seulement si $A \cap B = \{0_E\}$ et $\dim A + \dim B = \dim E$.

II. Applications linéaires

A. *Définitions*

Définition 10. Si E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$,
$f : E \to F$ est une application linéaire $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$

$$(\forall x, y \in E)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Définition 11. f est un endomorphisme de $E \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} f$ est une application linéaire de E dans E.

Proposition 8 (*). On a $f(0_E) = 0_F$ et $f(-x) = -f(x)$.

B. *Image, noyau, théorème du rang*

Proposition 9. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors

– si A est un s.e.v. de E, $f(A)$ est un s.e.v. de F; cas particulier $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf}}{=} f(E)$;
– si B est un s.e.v. de F, $f^{-1}(B)$ est un s.e.v. de E; cas particulier $\mathrm{Ker}(f) \overset{\text{déf}}{=} f^{-1}(0_F)$.

Définition 12. Le rang de f est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 10 (*). L'application linéaire $f : E \to F$ est injective $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Proposition 11. L'application linéaire $f : E \to F$ est surjective $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition 12 (Théorème du rang). Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors

$$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E.$$

Proposition 13 (*). Si E est de dimension finie, alors
$f : E \to E$ est un endomorphisme injectif
$\Longleftrightarrow f : E \to E$ est un endomorphisme surjectif
$\Longleftrightarrow f : E \to E$ est un endomorphisme bijectif.

III. Matrice d'une application linéaire

A. *Définition*

Définition 13. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base de F, alors la matrice de f de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ vers la base $(f_1, \ldots, f_k)$ est la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)} f \overset{\text{déf}}{=} \begin{array}{cc} {\scriptstyle f(e_1) \ldots f(e_n)} & \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle f_1} \\ \vdots \\ {\scriptstyle f_k} \end{array} \end{array}$$

où la i-ème colonne est constituée par les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $(f_1, \ldots, f_k)$.

Remarque. On construit la matrice colonne par colonne.

B. *Image d'un vecteur*

Proposition 14. Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base (e_i), si $f(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ dans la base (f_j) et si $A = (a_{j,i}) = \mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)} f$, alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où la j-ème coordonnée y_j est donnée par

$$y_j = a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \ldots, a_{j,n}x_n.$$

C. *Matrice de $g \circ f$*

Définition 14 (Produit de 2 matrices). Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice à m lignes et n colonnes et si $B = (b_{j,k})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, le produit $A \cdot B$ est la matrice $C = (c_{i,k})$ à m lignes et p colonnes avec

$$c_{i,k} \overset{\text{déf}}{=} a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}b_{n,k}.$$

Règle pratique : Pour obtenir le coefficient $c_{i,k}$, on fait le produit de la i-ème ligne de A et de la k-ème colonne de B :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1,k} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & b_{n,k} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ & \cdots & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & c_{i,k} & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

On multiplie le j-ème terme de la ligne de A avec le j-ème terme de la colonne de B et on ajoute les n produits ainsi obtenus. Il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Attention : rappelons que le produit de 2 matrices n'est pas commutatif.

Proposition 15. Si $f : (E, e_i) \to (F, f_j)$ et $g : (F, f_j) \to (G, g_l)$ sont deux applications linéaires, alors

$$\mathrm{Mat}_{(e_i),(g_l)}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{(f_j),(g_l)} g \cdot \mathrm{Mat}_{(e_i),(f_j)} f.$$

D. Changement de base

Définition 15. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E, alors la matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_i) est par définition la matrice

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \ldots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

où la i-ème colonne de P est constituée des coordonnées du vecteur e'_i dans la base e_i.

On construit la matrice de passage colonne par colonne.

Proposition 16 (Formule de changement de base). Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E, et $(f_1, \ldots, f_k)$ et $(f'_1, \ldots, f'_k)$ deux bases de F. Notons P la matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_i). Notons Q la matrice de passage de la base (f_j) à la base (f'_j). Alors, si A est la matrice de $f : (E, e_i) \to (F, f_j)$ et A' la matrice de $f : (E, e'_i) \to (F, f'_j)$, on a

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Proposition 17 (Cas particulier d'un endommorphisme *)

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Notons P la matrice de passage de la base (e_i) à la base (e'_i). Alors, si A est la matrice de f dans la base (e_i) et si A' est la matrice de f dans la base (e'_i), on a

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Exercices

Exercice 1. 1. Montrer que l'application $f : P \mapsto P + XP'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Soient P_1 et P_2 les polynômes définis par $P_1(X) = 1$ et $P_2(X) = 1 + X$.
   Montrer que $\{P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Quelle est la matrice de f dans la base $\{P_1, P_2\}$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2z, y, y + z).$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. On pose $e'_1 = (1, 0, 0)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$.
   Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y) = (x, x + y, 2y)$.

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Montrer que $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (2, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Quelle est la matrice de f dans les bases $\{u_1, u_2\}$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(P) = (P(0), P'(0))$.

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que les polynômes P_1, P_2 et P_3 définis par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$ et $P_3(X) = 1 + X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (2, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer la matrice de f dans les bases $\{P_1, P_2, P_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base. On notera u_1 le vecteur de cette base. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2) = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = f(e_3) = (1, 1, 2)$ en forment une base.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ (on calculera $f(u_2)$ et $f(u_3)$).
4. Démontrer que $\chi = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et determiner la matrice D de f dans cette base.
5. Donner une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 6. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(\ (1, 1, 1); (0, 1, 1)\ )$, $G = \mathrm{Vect}(\ (1, 0, 1)\ )$. Montrer que $E = F \oplus G$; exprimer les projecteurs associés.

Exercice 7 (*). On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f \circ f \circ f = 0$ et $f \circ f \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $B = \{x, f(x), f \circ f(x)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 4y + 17z, 10z, 5z).$$

Soient v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad v_3 = (3, 2, 1).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. f est-elle inversible ? Quel est le rang de f?
3. Montrer que $\mathcal{E}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_2 et que $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_3.

Exercice 9. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$. Montrer que f est surjectif mais n'est pas injectif.

Exercice 10. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $f(P) = X \cdot P$. Montrer que f est injectif mais n'est pas surjectif.

Exercice 11. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A = \{\text{fonctions paires}\}$ et $B = \{\text{fonctions impaires}\}$ sont des s.e.v. de E.
2. Montrer que $A \oplus B = E$.

CHAPITRE 2

DÉTERMINANTS

Activité d'approche

Préliminaires

Définition : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Généralisation :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Convention de signe :

le coefficient a_1 se trouve dans la colonne 1 et la ligne 1 ; $1+1=2$ est pair, donc le signe devant a_1 est un $+$.
le coefficient a_2 se trouve dans la colonne 2 et la ligne 1 ; $2+1=3$ est impair, donc le signe devant est un $-$,...

Activité 1. 1. Montrer que détA = dét$({}^{\mathrm{t}}A)$, où la transposée de A notée ${}^{\mathrm{t}}A$ est la matrice obtenue en échangeant colonnes et lignes :

$${}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que l'on peut développer un déterminant par rapport à la première colonne (même convention), la deuxième ligne (on admet que le résultat est le même pour la troisième ligne). En déduire que l'on trouve le même résultat en développant par rapport à n'importe quelle colonne.
3. $$C_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$
   On note détA = dét(C_1, C_2, C_3). Montrer que
   $$\text{dét}(\lambda C_1, C_2, C_3) = \lambda \text{dét}(C_1, C_2, C_3)$$
   et
   $$\text{dét}(C_1 + C_1', C_2, C_3) = \text{dét}(C_1, C_2, C_3) + \text{dét}(C_1', C_2, C_3).$$
4. Montrer que dét$(C_1, C_1, C_3) = 0$.
5. (a) Si A est une matrice 2×2, comparer dét(AB) et dét$(A) \times$ dét(B).
   (b) En déduire que si A est inversible, alors dét$(A) \neq 0$ et dét$(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{dét}A}$.
6. Montrer que si A et B sont les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans des bases différentes, alors détA = détB.

Feuille bilan

I. Déterminant d'une matrice carrée

A. Définitions

Définition 1 (déterminant d'une matrice 2×2).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} ad - bc.$$

Définition 2 (déterminant d'une matrice 3×3).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Définition 3 (par récurrence). Si $A = (a_{i,j})$, on multiplie chaque terme $a_{1,j}$ de la première ligne par $(-1)^{1+j}$ puis par le déterminant Δ_j obtenu en supprimant la première ligne et la j-ème colonne. Le <u>déterminant</u> cherché est égal à la somme des termes $(-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot \Delta_j$ ainsi obtenus.

Exemple (Déterminant d'une matrice triangulaire). Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux.

B. Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition 1. Un déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne.

Par exemple, pour la première colonne, on a

$$\text{dét}(\lambda \cdot C_1, C_2, C_3) = \lambda \cdot \text{dét}(C_1, C_2, C_3)$$

et

$$\text{dét}(C_1 + C_1', C_2, C_3) = \text{dét}(C_1, C_2, C_3) + \text{dét}(C_1', C_2, C_3).$$

Proposition 2. Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

Corollaire (*). Un déterminant est inchangé si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Corollaire (*). Si on permute deux colonnes, le déterminant change de signe.

Proposition 3. $\text{dét}(A) = \text{dét}({}^{t}A)$.

On peut donc remplacer le mot " colonne" par le mot " ligne" dans les énoncés qui précèdent.

C. Autres moyens de calculer un déterminant

Proposition 4 (développement par rapport à la ligne i_0)
Si $A = (a_{i,j})$, on multiplie chaque terme $a_{i_0,j}$ de la ligne i_0 par $(-1)^{i_0+j}$ puis par le déterminant $\Delta_{i_0,j}$ obtenu en supprimant la ligne et la colonne contenant le terme $a_{i_0,j}$. Le déterminant cherché est égal à la somme des termes $(-1)^{i_0+j} \cdot a_{i_0,j} \cdot \Delta_{i_0,j}$ ainsi obtenus.

Remarque. On peut développer de manière analogue par rapport à une colonne quelconque.

D. Déterminant de AB et de A^{-1}

Proposition 5. $\text{dét}(AB) = \text{dét}(A) \cdot \text{dét}(B)$.

Corollaire (*). A est inversible si et seulement si $\text{dét}(A) \neq 0$. Dans ce cas,

$$\text{dét}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{dét}(A)}.$$

II. Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 6 (*). Si $f : E \to E$ est un endomorphisme, si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$ et si A' est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}'$, alors $\text{dét}(A) = \text{dét}(A')$.

Définition 4. Si $f : E \to E$ est un endomorphisme, le <u>déterminant de f</u> est le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque de E.

Proposition 7. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{dét}(f) \neq 0.$$

III. Notion de rang

Définition 5.

- Le <u>rang d'une application linéaire</u> de E dans F est la dimension de $\text{Im}(f)$.
- Le <u>rang d'un ensemble de vecteurs</u> (système) est la dimension du s.e.v. engendré par ces vecteurs.
- Le <u>rang d'une matrice</u> (non nécessairement carrée) est la taille maximale d'une matrice carrée extraite de A et dont le déterminant est $\neq 0$.

Proposition 8. Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est égal au rang de sa matrice dans une base quelconque de E et une base quelconque de F.

Proposition 9. Le rang d'un système de vecteurs de E est égal au rang de la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées de ces vecteurs dans une base quelconque de E.

Exercices

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes, lorsque c'est possible:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 3 (*). Sachant que les nombres 546, 273 et 169 sont divisibles par 13, montrer, sans le calculer, que 13 divise le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Indication: remplacer la troisième colonne par $100C_1 + 10C_2 + C_3$.

Exercice 4. Montrer que le déterminant suivant est nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 5 (*). Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 895 & 909 & 346 \\ 562 & 381 & 456 \\ 456 & 986 & 435 \end{bmatrix}.$$

En utilisant le fait que tous les termes sous la diagonale sont pairs et que tous les termes de la diagonale sont impairs, montrer que $\text{dét}(A)$ est impair. En déduire que A est inversible.

Exercice 6. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculer A^2. En déduire que $\text{dét}(A) = \pm 27$.

Exercice 7. Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
$v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 2, 0)$, $v_3 = (1, 3, 5)$.

Exercice 8. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 3, 4, 5)$, $v_3 = (3, 6, 10, 15)$, $v_4 = (4, 10, 20, 35)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par
$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, z).$$
Que vaut le déterminant de f?

Exercice 10 (*). Soient (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3) et Q la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). On suppose que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme tel que $f(u_i) = v_i$. Montrer que
$$\text{dét}(f) = \frac{\text{dét}(Q)}{\text{dét}(P)}.$$

Exercice 11 (*). Pour quelles valeurs de a et b les vecteurs $(2, a, 1)$, $(b, 0, 1)$ et $(a, b, 0)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Quand ces vecteurs sont liés, quelle est la dimension de l'espace qu'ils engendrent?

Exercice 12. Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, déterminer leur inverse. Sinon, donner leur rang.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R},$$
$$D = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{(avec } a, b, c \in \mathbb{R}), \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 (*). Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit λ un réel. Montrer l'équivalence:
($\exists u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, tel que $Au = \lambda u$) si et seulement si
(λ est racine du polynôme $P(x) = \det(A - x\mathrm{I}_n)$).

Exercice 14 (*). Montrer que le déterminant B_n suivant vérifie la relation de récurrence: $B_n - B_{n-1} = x^2(B_{n-1} - B_{n-2})$ et en déduire l'expression de B_n.
$$B_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

CHAPITRE 3

INITIATION À LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Activité d'approche

Activité 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = (3x + y, x + 3y).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Calculer $\text{dét}(f - \lambda \text{Id})$ et déterminer les deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\text{dét}(f - \lambda \text{Id}) = 0$.
3. Trouver un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ et un vecteur $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v_2) = \lambda_2 v_2$.
4. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
5. Déterminer $(A')^n$ puis A^n.

Feuille bilan

Dans tout ce qui suit, f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

I. Définitions

Définition 1. Le vecteur $v \in E$ est un vecteur propre de f si et seulement si

1. v n'est pas le vecteur nul et
2. il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Définition 2. Le réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

On dit alors que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Attention : il ne faut pas se contenter de dire " $f(v) = \lambda v$ donc v vecteur propre et λ valeur propre" .

Proposition 1. Si v est un vecteur propre de f associé à λ alors pour tout réel non nul $k \in \mathbb{R}^*$, le vecteur kv est un vecteur propre de f associé à λ.

II. Théorème fondamental

Proposition 2 (*). Soit f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans une base quelconque de E. Alors,

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \text{dét}(f - \lambda \text{Id}) = 0 \iff \text{dét}(A - \lambda I) = 0.$$

III. Cas particulier : 2 valeurs propres distinctes en dimension 2

Proposition 3 (*). Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Corollaire. En dimension 2, deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes forment une base.

IV. Calcul de A^n lorsque A est diagonalisable

Proposition 4. Si A est une matrice diagonale, la matrice A^n est la matrice diagonale obtenue en élevant les termes diagonaux à la puissance n.

Proposition 5. Soit A la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$, A' la matrice de f dans une base $\mathcal{E}'$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$. Alors,

$$A' = P^{-1}AP, \quad A = PA'P^{-1} \quad \text{et} \quad A^n = P(A')^nP^{-1}.$$

Remarque. Cette proposition est surtout utile lorsque A' est une matrice diagonale. On dit alors que A est diagonalisable.

Exercices

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (2x, x - y).$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale? Si oui, écrivez la matrice de f dans cette base.
3. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f^n (c'est-à-dire $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$) dans cette base?
4. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f^n dans la base canonique ?

Exercice 2. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de f.
2. Trouver un vecteur $v = (x, y)$ tel que $f(v) = v$.
3. (*) En déduire que f est diagonalisable.
4. (*) Quelle est la nature géométrique de f ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et d'angle θ.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. (*) Montrer que f n'admet aucune valeur propre.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que 1 et 3 sont valeurs propres et déterminer des vecteurs propres associés.
2. En déduire que f est diagonalisable.
3. Calculez M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. On se propose de rechercher les endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété (P) suivante :

$$(P) \qquad \text{Pour toute base } (e_i) \text{ de } \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Mat}_{(e_i)} f \text{ est diagonale.}$$

1. Démontrer que chaque homothétie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ vérifie la propriété (P).
2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété (P) et soit $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ sa matrice dans une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que $(e_1, e_1 + e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) (*) En déduire que $a = b$.
   (c) Quels sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété (P) ?

Exercice 6. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Calculer A^n.
3. On pose $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer $A'M$ et MA'.
   (b) Quelles sont les matrices M qui commutent avec A' ?
   (c) (*) En déduire l'expression des matrices 2×2 qui commutent avec A.
4. (a) Trouver une matrice B telle que $B^2 = A'$.
   (b) (*) Trouver une matrice C telle que $C^2 = A$.

Exercice 7. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x+y, x+3y)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. (a) Trouver les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.
   On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2).
4. (a) Pour $n \geq 1$, calculer $(A')^n$.
   (b) Pour $n \geq 1$, en déduire A^n.
5. (a) Trouver une matrice C telle que $C^2 = A'$.
   (b) En déduire une matrice D telle que $D^2 = A$.

Exercice 8. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = (-11x + 10y, -30x + 24y).$$

On pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

1. Vérifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} -11 & 10 \\ -30 & 24 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune d'elles, les vecteurs propres associés.
   On choisira dans la suite les vecteurs propres $v_1 = (2,3)$ et $v_2 = (1,2)$.
3. On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2). Déterminer P et P^{-1}.
4. Déterminer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
5. On note D la matrice de f dans la base (v_1, v_2).
   (a) Trouver une matrice d telle que $d^2 = D$.
   (b) En déduire que $(PdP^{-1})^2 = A$.
6. (a) Démontrer que les matrices D' telles que $D'D = DD'$ sont de la forme
   $D' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels quelconques.
   (b) En déduire que les matrices M telles que $MA = AM$ sont de la forme
   $M = \begin{pmatrix} 4a - 3b & -2a + 2b \\ 6a - 6b & -3a + 4b \end{pmatrix}$.

7. (a) Quelle est la matrice M dans chacun des cas particuliers suivants:
   $a = 1$ et $b = 1$;
   $a = 4$ et $b = 9$.
   (b) Dans ces deux cas particuliers, pouvait-on prévoir simplement que la matrice M est telle que $MA = AM$? Expliquer.

Exercice 9. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x, y) = (5x - y, -x + 5y).$$

On pose $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

1. Vérifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune d'elles, les vecteurs propres associés.
   On choisira dans la suite les vecteurs propres $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.
5. On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2). Déterminer P et P^{-1}.
6. Déterminer A^n pour tout entier $n \geq 1$.

PARTIE II

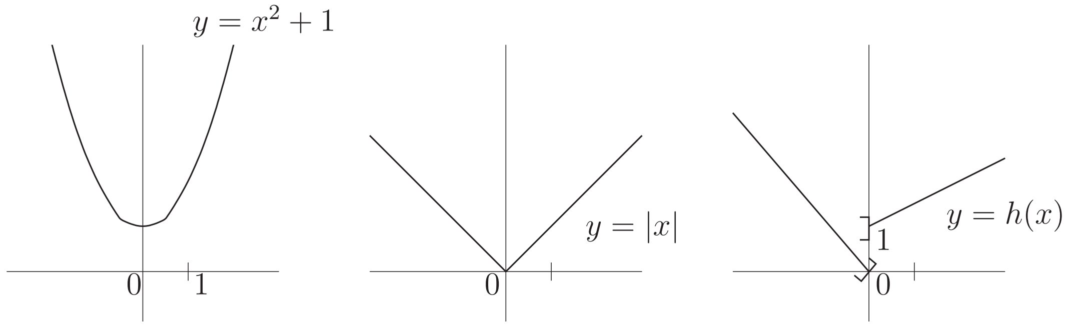
ANALYSE

CHAPITRE 1

LIMITES – CONTINUITÉ – DÉRIVABILITÉ

Activités d'approche

Activité 1 (Approche intuitive). Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue en 0, dérivable en 0, si elle admet une limite en 0.



Activité 2 (Intervalles, valeur absolue).

1. Traduire chacune des propriétés suivantes à l'aide de la valeur absolue:
$$y \in [a-r, a+r]\,; \quad y \in \,]a-r, a+r[\,; \quad y \in [a-r, a+r] \text{ et } y \neq a.$$
2. Expliquer pourquoi si le centre d'un intervalle est fixé, déterminer cet intervalle équivaut à determiner son rayon.
3. I et J étant deux intervalles de $\mathbb{R}$, démontrer que $f(J) \subset I \iff \forall x \in J,\ f(x) \in I$.
4. On pose $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = |x|$ (fonctions de l'activité 1). Déterminer graphiquement $f([0,1])$, $f([-1,1])$ et $g(]-1,2])$.

Activité 3 (Définition de la limite en un point). On note $\mathcal{I}(a)$ l'ensemble de tous les intervalles fermés centrés en a. On note $\dot{\mathcal{I}}(a)$ l'ensemble de tous les intervalles fermés centrés en a, privés de a.

Définition 1.
$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \quad \iff \quad \forall I \in \mathcal{I}(\ell),\ \exists J \in \dot{\mathcal{I}}(a),\ f(J) \subset I.$$

1. Expliquer graphiquement pourquoi la fonction $f : x \mapsto x^2+1$ admet une limite égale à $13/4$ lorsque x tend vers $3/2$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 3/2} f(x) = 13/4$).
2. Démontrer que la fonction h (la troisième fonction de l'activité 1) n'admet pas $1/2$ comme limite en 0, puis qu'elle n'admet aucune limite en 0.
3. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0
4. Démontrer que
$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ 0 < |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Feuille bilan

I. Limites

A. Définitions

Notations :

$\mathcal{I}(a)$ ensemble des intervalles de la forme $[a-r, a+r]$;
$\dot{\mathcal{I}}(a)$ ensemble des intervalles de la forme $[a-r, a[\cup]a, a+r]$.

Définition 1.

$$\ell = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall I \in \mathcal{I}(\ell),\ \exists J \in \dot{\mathcal{I}}(x_0),\ f(J) \subset I.$$

Définitions équivalentes.

- $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ 0 < |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ si et seulement si
pour toute suite x_n qui tend vers x_0 avec $x_n \neq x_0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

B. Existence d'une limite et fonction bornée

Proposition 1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors il existe $I \in \dot{\mathcal{I}}(x_0)$ tel que f est bornée sur I.

C. Opérations sur les limites

Proposition 2. Si

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$$

alors

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \ell_1$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \ell_2$ et
4. si $\ell_2 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} (f/g)(x) = \ell_1/\ell_2$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$.

D. Limites et inégalités

Proposition 3 (*).

$$\Big(f(x) \geq 0 \text{ et } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell\Big) \quad \Longrightarrow \quad \ell \geq 0.$$

Corollaire.

$$\Big(f(x) \geq g(x),\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2\Big) \quad \Longrightarrow \quad \ell_1 \geq \ell_2.$$

Proposition 4 (Théorème des gendarmes).

$$\Big(f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell\Big) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

Corollaire (*). Si f est bornée et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$.

II. Continuité

A. Définitions

Définition 2. f est <u>continue en x_0</u> si et seulement si f est définie dans un intervalle $I \in \mathcal{I}(x_0)$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition 3. f est <u>continue sur E</u> si et seulement si f est continue en tout point de E.

Proposition 5. f est continue en x_0 si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0) \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

B. Opérations et continuité

Proposition 6. Si f et g sont continue en x_0, alors

1. $f + g$ est continue en x_0
2. λf est continue en x_0
3. $f \cdot g$ est continue en x_0
4. si $g(x_0) \neq 0$, f/g est continue en x_0
5. $|f|$ est continue en x_0.

Proposition 7. Si f et g sont continues sur E et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

1. $f + g$ est continue sur E
2. λf est continue sur E
3. $f \cdot g$ est continue sur E
4. si g ne s'annule pas, f/g est continue sur E
5. $|f|$ est continue sur E.

C. Continuité de $g \circ f$

Proposition 8. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Proposition 9. Si f est continue sur I, si g est continue sur J et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

D. Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 10. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Corollaire (Théorème des valeurs intermédiaires). Si f est continue sur I, si a et b appartiennent à I, alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 11. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

III. Dérivabilité

A. Définitions

Définition 4. f est <u>dérivable en x_0</u> si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0; on note $f'(x_0)$ cette limite.

Définition 5. f est <u>dérivable sur E</u> si et seulement si f est dérivable en chaque point de E.

B. Continuité et dérivabilité

Proposition 12 (*). Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse.

Exercices

Exercice 1. Montrer de deux manières que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(x) = 2$ si $x \geq 0$ n'est pas continue en 0:

1. en revenant à la définition
2. en utilisant des suites.

Exercice 2. En utilisant les suites $\left(x_n = \dfrac{1}{2n\pi}\right)$ et $\left(y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right)$, montrer que $x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 3. Etudier l'ensemble de définition et la continuité de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto e^{1/(1+x^2)}$.
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x^4 + 1)$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\ln(x^3 - 1)}{(2 + \sin x) \cdot (x^4 + 1)}$.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis étudier sur quels ensembles elles sont prolongeables par continuité.

1. $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{-5x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) & = & x^3 - 4x + 2 \quad \text{si } x \geq 0 \\ f(x) & = & |x^3 + 2| \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1, 2]$.
3. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$.
4. Montrer que f est continue en 0.

Exercice 6. Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1, 1[$. Même question avec $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.

Exercice 7. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 8 (*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(x_0)) = x_0$. Montrer qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) = x_1$.

Indication: on pourra considérer les trois cas $x_0 < f(x_0)$, $x_0 = f(x_0)$ et $x_0 > f(x_0)$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires .

Exercice 9. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \geq m$.

Exercice 10. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) + m < g(x)$.

Exercice 11 (*). Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré impair. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Exercice 12 (*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existent et sont finies. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (*). Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \sup(f(x), g(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (*). Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1,1]$ telle que $f(-1) = f(1) = 0$, $f(1/2) = 1$ et $f(-1/2) = -1$. Montrer que f est bornée sur $[-1,1]$ et atteint ses bornes sur $]-1,1[$.

Exercice 15 (*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en -1 et satisfaisant à l'égalité fonctionnelle suivante: pour tout réel x, $f(2x+1) = f(x)$. Le but de cet exercice est de montrer que f est constante.

1. Montrer que pour tout réel t on a: $f(\frac{t-1}{2}) = f(t)$.
2. Soit t réel. On définit la suite (u_n) par $u_0 = t$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$ pour $n \geq 1$.
   (a) Montrer que si la suite (u_n) converge vers a, alors $a = -1$.
   (b) Montrer que la suite $(1 + u_n)$ est une suite géométrique de raison $1/2$ et en déduire la convergence de la suite (u_n) vers -1.
   (c) Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t) = f(u_n)$ et en déduire que $f(t) = f(-1)$.
3. Conclure.

CHAPITRE 2

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Activités d'approche

Activité 1. Considérons la fonction sinus, $f : x \mapsto \sin(x)$.

1. Tracer la représentation graphique de f.
2. Expliquer pourquoi f n'admet pas de fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
3. Imaginer une définition possible d'une application réciproque de f.
4. Tracer le graphe de cette fonction réciproque.
5. Une telle application est-elle dérivable ? Si oui, calculer la dérivée.

Activité 2. Reprendre les mêmes questions pour chacune des fonctions suivantes :

1. $g : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
2. $h : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Feuille bilan

I. Théorème fondamental

Proposition 1. Soit $f\ :\ ]a,b[\ \to\ ]\alpha,\beta[$ (a,b,α,β finis ou non) une fonction continue et strictement croissante telle que $\alpha = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Alors,

1. f est une bijection de $]a,b[$ sur $]\alpha,\beta[$ et $f^{-1}\ :\ ]\alpha,\beta[\ \to\ ]a,b[$ est continue et strictement croissante ;
2. $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f^{-1}(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\beta^-} f^{-1}(x) = b$;
3. en repère orthonormal, le graphe de f^{-1} et le graphe de f sont symétrique par rapport à la première bissectrice ;
4. si f est dérivable sur $]a,b[$ et si f' ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors f^{-1} est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque. On a un résultat analogue pour une fonction strictement décroissante.

II. La fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$

La fonction sin : $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ admet une fonction réciproque
$$\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$
continue et strictement croissante. La fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut
$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

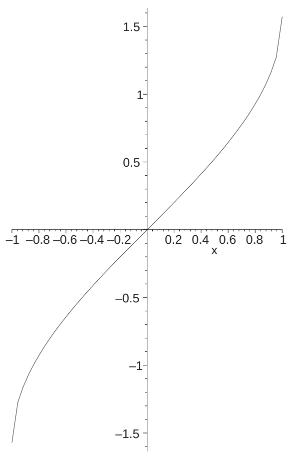


FIGURE 1. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$.

III. La fonction $x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$

La fonction cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ admet une fonction réciproque

$$\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

continue et strictement décroissante. La fonction $x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$\mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

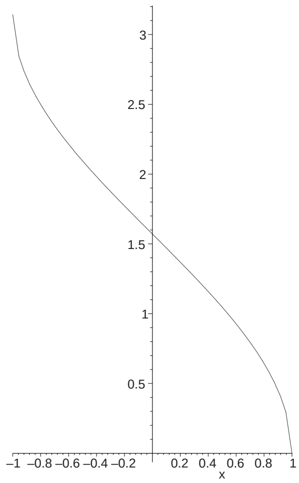


FIGURE 2. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$.

IV. La fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$

La fonction tan : $]-\pi/2, \pi/2[\to]-\infty, +\infty[$ admet une fonction réciproque

$$\mathrm{Arctan} :]-\infty, +\infty[\to]-\pi/2, \pi/2[$$

continue, strictement croissante et dérivable. Sa dérivée vaut

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

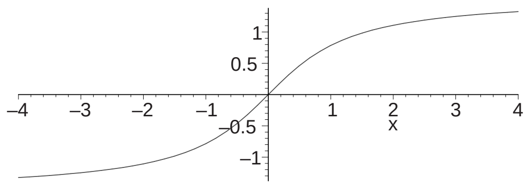


FIGURE 3. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$.

V. Fonctions hyperboliques

Définition 1.

$$\mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Proposition 2.

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

VI. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{Argsh}(x)$

La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

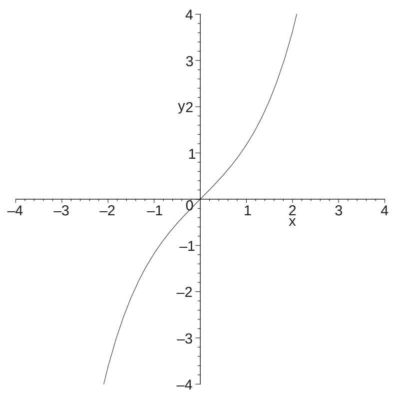


Figure 4. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

La fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

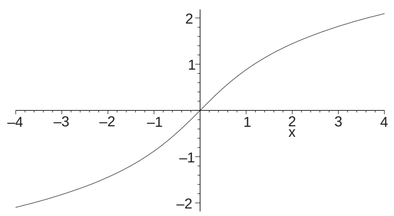


Figure 5. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Argsh}(x)$.

VII. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$

La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est
$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x).$$
La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

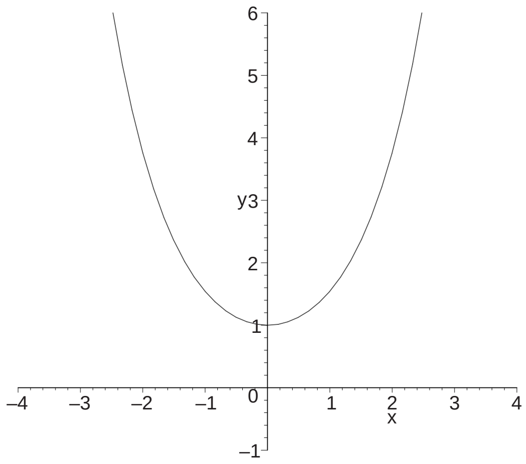


FIGURE 6. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

La fonction $\mathrm{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ admet une fonction réciproque
$$\mathrm{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$
continue et strictement croissante. La fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$. Sa dérivée vaut
$$\mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

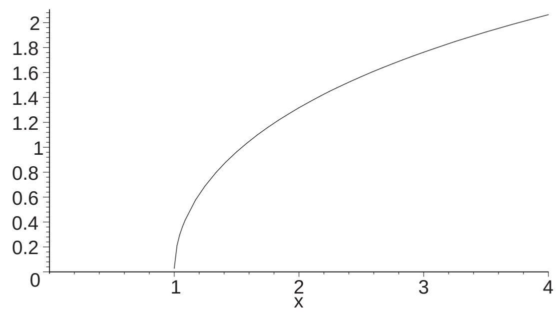


FIGURE 7. Le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$.

VIII. Les fonctions $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{Argth}(x)$

La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est

$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

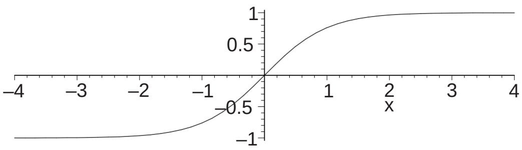


FIGURE 8. Le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$.

La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ admet une fonction réciproque $\operatorname{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et dérivable sur $]-1,1[$. Sa dérivée vaut

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

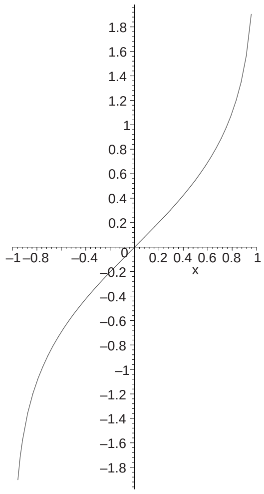


FIGURE 9. Le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Argth}(x)$.

IX. Expression de $\operatorname{Argsh}(x)$, $\operatorname{Argch}(x)$ et $\operatorname{Argth}(x)$ en fonction de $\ln(x)$

$$\operatorname{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right), \quad \operatorname{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

et

$$\operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Exercices

Exercice 1. Soit $f(x) = e^{x^3-3x+1}$. Déterminer le plus grand intervalle contenant 0, sur lequel f admet une fonction réciproque g dérivable. Préciser le domaine de définition de g et son ensemble image. Calculer $g'(e)$.

Exercice 2. Justifier l'existence d'une fonction réciproque et l'expliciter pour les fonctions suivantes:

1. $f : [-3, +\infty[\to R$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.
2. $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$.

Exercice 3 (*). On pose $f(x) = 2x + x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]-1/2, 3/2[$.
3. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

1. $f_a(x) = \dfrac{1}{a + \mathrm{ch}x}$, $a \in \mathbb{R}$
2. $g(x) = \sqrt{2\mathrm{th}^2 x - 5\mathrm{th}x - 3}$.

Exercice 5 (*). Soient les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin x)$ et $g : x \mapsto \sin(\mathrm{Arcsin}x)$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Exercice 6. Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\mathrm{Arccos}x), \quad \cos(\mathrm{Arcsin}x).$$

Exercice 7. Vérifier que

$$\mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arccos}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{Arctan}x + \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 (*). Simplifier l'expression suivante :

$$\mathrm{Arctan}(\tan x) \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}).$$

Exercice 9 (*). Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \mathrm{Arcsin}\frac{1-x^2}{1+x^2} + \mathrm{Arccos}\frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 10. Calculer :

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^x(\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} (x - \ln(\mathrm{ch}x)).$$

Exercice 11 (*). Calculer $\mathrm{ch}3x$ et $\mathrm{sh}3x$ en fonctions de $\mathrm{ch}x$ et $\mathrm{sh}x$. En déduire $\mathrm{th}3x$ en fonction de $\mathrm{th}x$.

Exercice 12 (*). Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arcsin}(4x^3 - 3x)$.

1. Justifier la définition de f et montrer sa continuité sur $[-1, 1]$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1, 1[\setminus\{-1/2, 1/2\}$.
3. (a) Vérifier que sur $[-1/2, 1/2]$, $f(x) = -3\text{Arcsin}(x)$.
   (b) En déduire que la restriction de f sur cet intervalle est une bijection de $[-1/2, 1/2]$ sur un intervalle à déterminer.
   (c) Donner l'expression de la réciproque.
   (d) Déduire de (3a) la valeur de la dérivée à gauche de f au point $1/2$.
4. (a) Montrer que sur $[1/2, 1]$, $f(x) = 3\text{Arcsin}(x) - \pi$.
   (b) La fonction f est-elle dérivable au point $1/2$?

Exercice 13. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}x.$$

a) Justifier la définition de f et montrer sa continuité sur $[-1, 1]$.
b) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.
c) Simplifier l'expression de f.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 2\text{argch}\sqrt{\frac{1 + \text{ch}(x)}{2}}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Calculer la dérivée de f pour $x > 0$. Calculer la dérivée de f pour $x < 0$.
4. Simplifier l'expression de f.

Exercice 15. Soit $f : [\pi, 3\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -3\sin^2(x) + 5$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera les domaines de définition et de dérivabilité.
2. Calculer g'.

CHAPITRE 3

THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS, FORMULE DE TAYLOR, FORMULE DE LEIBNIZ

Activité d'approche

Activité 1.

1. Tracer le graphe d'une fonction f continue non constante sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$. La fonction f semble-t-elle atteindre son maximum sur $]a, b[$? La fonction f semble-t-elle atteindre son minimum sur $]a, b[$?
2. Montrer que si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $c \in]a, b[$ est tel que $f(c)$ est un extremum (c'est-à-dire un minimum ou un maximum), alors $f'(c) = 0$. Montrer que la réciproque est fausse.
3. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$?
4. Est-ce vrai si on ne suppose pas $f(a) = f(b)$?
5. Tracer le graphe d'une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) \neq f(b)$. Montrer (graphiquement) qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe en $(c, f(c))$ soit parallèle à la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$?
6. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$?

Feuille bilan

I. Théorème de Rolle

Lemme 1 (*). Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a, b[$ et admet un extremum en $c \in]a, b[$, alors $f'(c) = 0$.

Proposition 2 (*). Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

II. Théorème des accroissements finis

Proposition 3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

III. Formule de Taylor

Proposition 4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable n fois sur $[a, b]$ et si $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

IV. Formule de Leibniz

Proposition 5. Si u et v sont des fonctions n fois dérivables, alors $u \cdot v$ est n fois dérivable et

$$(u \cdot v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots + C_n^{n-1} u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n)}.$$

Quelques fonctions dont on connaît les dérivées n-ièmes :

- $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- $\left(\dfrac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$.
- $\left(\dfrac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(a+x)^{n+1}}$.

Exercices

Exercice 1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ s'annule au moins une fois sur chaque intervalle de la forme $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Démontrer le théorème des accroissements finis pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ en appliquant le théorème de Rolle à la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Exercice 4. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que $g(a) \neq g(b)$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$F(x) = (f(a) - f(b))g(x) - (g(a) - g(b))f(x),$$

montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

Exercice 5 (*). Soit p et q deux nombres réels et n un entier naturel non nul. Montrer que le polynôme

$$P_n(x) = x^n + px + q$$

admet au plus deux racines réelles si n est pair et au plus trois racines réelles si n est impair

Exercice 6. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction Arctan, établir que pour tout $t > 0$, $\mathrm{Arctan} t > \dfrac{t}{1 + t^2}$.

Exercice 7 (*). Soit $f(x) = e^{1/x}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in [x, x + 1]$ tel que

$$f(x) - f(x + 1) = \frac{1}{c^2} e^{1/c}.$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \to]0, \infty[$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[\frac{f'(c)}{f(c)}(b - a) \right].$$

Indication: on pourra utiliser la fonction $g = \ln f$.

Exercice 9 (*). Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ réels vérifiant l'égalité
$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$
Montrer que le polynôme $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ possède au moins une racine dans l'intervalle $]0,1[$.

Indication: considérer une primitive de P.

Exercice 10 (*).
1. Montrer à l'aide du T.A.F. que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
2. En déduire que les fonctions f et g définies par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ sont monotones sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\frac{x+1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (x+1)\ln\frac{x+1}{x}.$$
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g$.

Exercice 11 (*). En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée n-ième de f pour
1. $f(x) = x^2 \ln(x)$.
2. $f(x) = x^{n+1} \ln(x)$.

Exercice 12.
1. Soit $f(x) = \mathrm{Arctan} x$. Trouver $c \in [0,1]$ tel que
$$f(1) = f(0) + f'(c).$$
2. Soit $g(x) = \ln(x)$, $a = 1$ et $b = 3$. Trouver $c \in [a,b]$ tel que
$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} g''(c).$$
Remarque: $2/(2 - \ln 3) = 2.21888\ldots$.

Exercice 13.
1. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions
$$f : x \mapsto e^x, \quad g : x \mapsto 1, \quad h : x \mapsto 1 + x \quad \text{et} \quad k : x \mapsto 1 + x + x^2/2.$$
2. Donner un encadrement de $e^x - (1+x)$ sur $[0, 1/2]$.

Exercice 14 (*). Calculer $\sin(10^{-1})$ à 10^{-12} près en utilisant la formule de Taylor à un ordre bien choisi.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}.$$
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

CHAPITRE 4

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Activité d'approche

Activité 1. 1. Montrer que si f est une fonction définie et C^∞ au voisinage de 0, alors

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2. Application dans le cas $n = 5$ pour les fonctions suivantes :
   (a) $f_1 : x \mapsto e^x$,
   (b) $f_2 : x \mapsto \sin x$,
   (c) $f_3 : x \mapsto \cos x$,
   (d) $f_4 : x \mapsto (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f_5 : x \mapsto (1+x)^{-1}$, $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
   (e) $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ puis $f_8 : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$.

Feuille bilan

I. Définition et premières propriétés

Définition 1 (Développement limité à l'ordre n en x_0). Soit f définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Le terme $(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ s'appelle le terme complémentaire. Le polynôme $a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n$ s'appelle la partie régulière du développement limité. Il s'agit d'un polynôme de degré $\leq n$.

Proposition 1 (Unicité). Il y a au plus un développement limité d'ordre n en x_0.

Proposition 2 (Parité et DL en 0). Si f est paire, la partie régulière d'un développement limité en 0 ne contient que des exposants pairs. Si f est impaire, la partie régulière d'un développement limité en 0 ne contient que des exposants impairs.

II. Théorème fondamental

Définition 2. On dit qu'une fonction est C^∞ au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage de x_0 où toutes les dérivées f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$,... de f sont définies.

Proposition 3 (DL de Taylor *). Soit f une fonction C^∞ au voisinage de x_0. Alors pour tout $n \geq 0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

III. Opérations sur les DL

N.B. Ne pas oublier que pour les fonctions C^∞ (cas usuel), on peut toujours utiliser le théorème fondamental (Proposition 3).

Proposition 4. Supposons que f et g admettent un DL d'ordre n en 0. Alors, $f + g$ admet un DL d'ordre n en 0. On obtient la partie régulière du DL de $f + g$ en ajoutant la partie régulière du DL de f et celle du DL de g.

Proposition 5. Supposons que f et g admettent un DL d'ordre n en 0. Alors, $f \cdot g$ admet un DL d'ordre n en 0. On obtient la partie régulière du DL de $f \cdot g$ en multipliant les parties régulières des DL de f et de g et en ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

Proposition 6. Supposons que f et g admettent un DL d'ordre n en 0. Si $g(0) \neq 0$, alors, f/g admet un DL d'ordre n en 0. On obtient la partie régulière du DL de f/g en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n la partie régulière du DL de f par la partie régulière du DL de g.

IV. Composée de deux fonctions

Proposition 7. Supposons que f et g admettent un DL d'ordre n en 0 et que $f(0) = 0$. Alors, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0. On obtient la partie régulière du DL de $g \circ f$ de la manière suivante :

- dans la partie régulière de g on remplace x par la partie régulière de f
- on ne conserve que les termes de degré $\leq n$.

V. Dérivation et intégration d'un DL

Proposition 8. Si on connaît un DL de f en 0 à l'ordre n, on obtient un DL de f' en 0 à l'ordre $n-1$ en dérivant terme à terme la partie régulière du DL de f.

Proposition 9. Si on connaît un DL de f' en 0 à l'ordre n, on obtient un DL de f en 0 à l'ordre $n+1$ en intégrant terme à terme la partie régulière du DL de f' et en rajoutant $f(0)$.

VI. Formulaire de développements limités en 0

Trois formules fondamentales :

1. DL de Taylor
2. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$
3. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}^{n \text{ termes}}}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$.

A l'aide de (1) :

$$\begin{array}{rcl}
e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\cos(x) & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\sin(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\mathrm{ch}(x) & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\mathrm{sh}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)
\end{array}$$

En dérivant et à l'aide de (2) :

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
\mathrm{Arctan}(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\mathrm{Argth}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)
\end{array}$$

En dérivant et à l'aide de (3) :

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{\overbrace{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n \text{ termes}}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x)$$

$$\mathrm{Argsh}(x) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{\overbrace{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}_{n \text{ termes}}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

Pour mieux mémoriser : le " clan" des huit fonctions impaires

Tous les DL commencent pas x. Le coefficient du terme en x^3 change de signe quand on passe de f à f^{-1}.

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$
$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$
$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$	$\mathrm{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$

Exercices

Exercice 1. Déterminer le D.L. à l'ordre 3 en 0 de deux façons (développement de Taylor en calculant les dérivées successives en 0, puis à l'aide d'opérations sur les D.L.) pour les fonctions suivantes:

1. $f_1(x) = \sin(2x) - e^{3x}$
2. $f_2(x) = e^x \cos x$
3. $f_3(x) = (7x^8 - 5x^6 + 3x^2 - 1) \cdot \mathrm{sh}(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin x}{1-x^2}$.

Exercice 2. Donner le D.L. à l'ordre 3 en 1 pour les fonctions suivantes:

1. $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$
2. $f_2(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

Exercice 3. Déterminer le D.L. à l'ordre 5 en 0 de:

1. $f_1(x) = e^{\mathrm{sh} x}$
2. $f_2(x) = e^{\cos x}$.

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x\sin(x^5) - \cos(x^3)$, ordre 15;
2. $f_2(x) = \ln(1 + x\cos x)$, ordre 4;
3. (*) $f_3(x) = \ln(2 + \cos x)$, ordre 3;
4. (*) $f_4(x) = \sin^2 x$, ordre 10.

Exercice 5 (*). On pose $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour n entier positif (en utilisant le D.L. de f en 0).

Exercice 6. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de

$$f(x) = e^{\mathrm{th}(x)}.$$

Exercice 7. Trouver un développement limité à l'ordre 5 en 0 de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \mathrm{sh}(x) \cdot \mathrm{Arctan}(x)$.
2. $g(x) = \mathrm{Argth}(\sin(x))$.

Exercice 8. Trouver un développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.
2. $g(x) = \ln(1 + \sin(x))$.

CHAPITRE 5

EQUIVALENTS

Activité d'approche

Activité 1. 1. Déterminer le premier terme non nul du développement limité en 0 des fonctions suivantes :

$$\sin(x) - x \ ; \quad 1 - \cos(x) \ ; \quad \tan(x) - x.$$

2. En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3} \ ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x} \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) - x}.$$

Feuille bilan

I. Définitions

Définition 1. Soient f et g deux fonctions définies et non nulles dans un ensemble $J \in \dot{\mathcal{I}}(x_0)$. On dit que $\underline{f \text{ et } g \text{ sont équivalentes en } x_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f \sim_{x_0} g$ (ou plus simplement $f \sim g$).

Définition 2. Si f et g sont définies et non nulles dans un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, on dit que $\underline{f \text{ et } g \text{ sont équivalentes en } +\infty}$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Définition 3. Si f et g sont définies et non nulles dans un intervalle de la forme $]-\infty, -A[$, on dit que $\underline{f \text{ et } g \text{ sont équivalentes en } -\infty}$ si et seulement si

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

II. Premières propriétés

Proposition 1. Si $f \sim_{x_0} g$, alors $g \sim_{x_0} f$. Si $f \sim_{+\infty} g$, alors $g \sim_{+\infty} f$. Si $f \sim_{-\infty} g$, alors $g \sim_{-\infty} f$.

Proposition 2 (Théorème fondamental). Si f et g sont équivalentes en x_0 (respectivement $+\infty$ ou $-\infty$), soit elles ont toutes deux la même limite (finie ou infinie) en x_0 (respectivement $+\infty$ ou $-\infty$), soit aucune d'elles n'a de limite en x_0 (respectivement $+\infty$ ou $-\infty$).

Proposition 3 (*). Une fonction est équivalente en x_0 au premier terme non nul de son D.L. en x_0.

III. Opérations sur les équivalents

Dans les énoncés suivants a peut prendre la valeur x_0, $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 4. Si $f_1 \sim_a g_1$ et si $f_2 \sim_a g_2$, alors $f_1 \cdot f_2 \sim_a g_1 \cdot g_2$.

Proposition 5. Si $f_1 \sim_a g_1$ et si $f_2 \sim_a g_2$, alors $f_1/f_2 \sim_a g_1/g_2$.

Proposition 6. Si $f \sim_a g$, alors $|f| \sim_a |g|$.

Proposition 7. Si $f \sim_a g$, alors pour x suffisamment proche de a, $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe, c'est-à-dire :

- si $a = x_0$, alors $(\exists \varepsilon > 0)$ tel que $|x - x_0| \leq \varepsilon \Longrightarrow f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe;
- si $a = +\infty$, alors $(\exists A \in \mathbb{R})$ tel que $x \geq A \Longrightarrow f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe;
- si $a = -\infty$, alors $(\exists A \in \mathbb{R})$ tel que $x \leq A \Longrightarrow f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents.

En effet, même si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, il se peut que $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ ne soient pas équivalentes en a. Par exemple,

$$\sin(x) \sim_0 x,\ -x \sim_0 -x \quad \text{mais} \quad \sin(x) - x \sim_0 -\frac{x^3}{6} \not\sim_0 x - x = 0.$$

Attention lorsque l'on veut composer des équivalents :

$$\frac{1}{x} + 1 \sim_0 \frac{1}{x} \quad \text{mais} \quad e^{1+1/x} = e \cdot e^{1/x} \not\sim_0 e^{1/x}.$$

Exercices

Exercice 1. Etudier les limites éventuelles des fonctions suivantes en 0:

$$f_1(x) = \frac{\sin^2 x}{\mathrm{ch} x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}, \quad f_3(x) = \frac{(\sin x)^2}{\cos x - 1}, \quad f_4(x) = |\sin x|^{\tan x}.$$

Exercice 2. Etudier les limites éventuelles des fonctions suivantes en 1:

$$f_1(x) = \frac{\cos(2\pi(x + x^2))}{x^2 - 1}, \quad f_2(x) = \frac{\cos(\pi x/2)}{x^2 - 1}.$$

Exercice 3. Etudier la limite éventuelle de la fonction suivante en $+\infty$:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

Exercice 4. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes:

$$u_n = (e^{1/n} - 1) \cdot \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1}, \quad v_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+1}, \quad w_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{1/n},$$

$$(*) \quad z_n = (n + 3)^2 \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n^2} - 1\right).$$

Exercice 5 (*). Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n \sim v_n$. A-t-on automatiquement $e^{u_n} \sim e^{v_n}$? A-t-on automatiquement $\ln u_n \sim \ln v_n$?

Exercice 6 (*). Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\mathrm{sh} x) - \mathrm{sh}(\sin x)}{(\cos(x) - 1)^3}.$$

Exercice 7. Etudier la limite en 0 des fonctions définies de la manière suivante :

1. $f_1(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sin^2(x)}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x - \mathrm{Argsh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}$
4. $f_4(x) = \mathrm{Argth}(x) \cdot \dfrac{x}{\ln(1 + x) - x}$

Exercice 8. Etudier la limite des suites suivantes :

$$a)\ u_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right) \cdot (n^2 + 1) \qquad b)\ u_n = \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot n$$

$$c)\ u_n = \frac{n\cos(1/n)}{2\mathrm{sh}(1/n)} \qquad d)\ u_n = \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)\right] \cdot \left[n^2 \tan\frac{1}{n}\right]$$

Exercice 9 (*). Déterminer deux réels a et b tels que si f est la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x} + b$$

alors $\lim\limits_{0} f = 0$.

Exercice 10. 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2).$$

2. Etudier la position du graphe de f par rapport à sa tangente en $x = 0$.

Exercice 11. Soit $f(x) = (\cos(x))^{1/x}$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$.

1. Montrer que $\ln(x) \sim (x-1)$ quand x tend vers 1.
2. Trouver un équivalent en 0 de $\dfrac{1}{x}\ln(\cos x)$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 12 (*). Etudier la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \left(\frac{1+\ln x}{\ln x}\right)^{x \ln x}.$$

Exercice 13. 1. Etudier la limite en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 - \text{ch}(x)}{\sin(x) - x}.$$

2. Etudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = n^2 \left(\text{sh}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\text{Arctan}\frac{2}{n^2}\right).$$

Exercice 14. 1. (a) Indiquer un équivalent en 0 de $\cos(x) - 1$ puis de $(\cos(x)-1)^2$.

(b) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 \cdot \left(n^4 + n + 1\right).$$

2. (a) Indiquer un équivalent en 0 de

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

(b) Etudier la limite en 0 de la suite (v_n) définie par

$$v_n = \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3}\right) \cdot n^4.$$

3. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes ?

Exercice 15. 1. (a) Indiquer un équivalent en 0 de $\sin(x) - x$ puis de $(\sin(x) - x)^2$.

(b) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(n^6 + n^3 + 1\right).$$

2. (a) Indiquer un équivalent en 0 de

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

(b) Etudier la limite en 0 de la suite (v_n) définie par

$$v_n = \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \cdot n^3.$$

3. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes ?

CHAPITRE 6

CALCUL DE PRIMITIVES

Activité d'approche

Activité 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant bien le domaine de définition.

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. Indication : trouver a et b tels que
$$f_3(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$
4. $f_4(x) = \dfrac{5x^2+1}{(x-1)(x^2+1)}$. Indication : trouver a, b, c tels que
$$f_4(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Feuille bilan

I. Décomposition en éléments simples

N.B. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des fractions rationnelles à coefficients réels.

A. Quelques résultats préliminaires sur les polynômes

Proposition 1. Soit $P(x)$ un polynôme et α un réel. Alors

$$\alpha \text{ est racine de } P(x) \quad \Longleftrightarrow \quad P(x) = (x-\alpha)Q(x) \text{ avec } Q(x) \text{ polynôme.}$$

Proposition 2. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels et $\alpha = a + ib$ une racine complexe de $P(x)$. Alors, $\overline{\alpha} = a - ib$ est racine de $P(x)$. De plus,

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})Q(x) = (x^2-2ax+a^2+b^2)Q(x) \text{ avec } Q(x) \text{ polynôme à coefficients réels.}$$

Proposition 3. Tout polynôme est produit de termes de la forme $(x-\alpha)^j$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$ ou de termes de la forme $(ax^2 + bx + c)^k$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

B. Décomposition en éléments simples

Proposition 4 (Théorème fondamental). Soit $f(x) = P(x)/Q(x)$ une fraction rationnelle. Supposons qu'elle soit écrite sous forme irréductible. Le dénominateur est alors un produit de termes de la forme $(x-\alpha)^j$ ou $(ax^2+bx+c)^k$ avec $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$. La fraction rationnelle $f(x)$ peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & \underbrace{E(x)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}}_{\text{éléments simples de première espèce}} + \ldots \\ & + \underbrace{\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}}_{\text{éléments simples de deuxième espèce}} + \ldots, \end{aligned}$$

les coefficients A_i, B_i et C_i étant des réels.

Remarque. Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $E(x) = 0$. Sinon, on peut déterminer $E(x)$ en faisant la division de P par Q suivant les puissances décroissantes.

Exemple.

$$\begin{aligned}\frac{x^3+2x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} \\ &\quad +\frac{Dx+E}{x^2+x+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Hx+I}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Comme $\deg(P) = 3 < 9 = \deg(Q)$, il n'y a pas de partie entière $E(x)$. Les polynômes x^2+x+1 et x^2+1 n'ont pas de racines réelles.

C. Détermination des coefficients

On peut toujours calculer les coefficients en réduisant au même dénominateur et en identifiant les expressions. Ceci conduit à un système d'équations linéaires qui admet toujours une solution unique d'aprés le théorème fondamental.

Autre méthode plus rapide

Illustrons ceci sur deux exemples.

Exemple. La décomposition en éléments simple de la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

est de la forme

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}.$$

Pour déterminer le coefficient A, on multiplie à gauche et à droite par $x-1$:

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A+\frac{B(x-1)}{x+2}+\frac{C(x-1)}{x+3}.$$

Puis on remplace x par 1 et on obtient

$$\frac{1}{(1+2)\cdot(1+3)} = A+0+0.$$

On trouve donc directement $A = 1/12$. On procède de manière similaire pour calculer B : on multiplie à gauche et à droite par $x+2$ et on remplace x par -2, ce qui donne

$$\frac{1}{(-2-1)(-2+3)} = 0+B+0,$$

c'est-à-dire $B = -1/3$. Enfin, pour calculer C on multiplie par $x+3$ et on remplace x par -3 :

$$\frac{1}{(-3-1)(-3+2)} = 0+0+C,$$

c'est-à-dire, $C = 1/4$. Au final, on trouve avec trés peu de calcul :

$$f(x) = \frac{1/12}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}+\frac{1/4}{x+3}.$$

Exemple. Considérons maintenant la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x}{(x+3)^2(x^2+1)}.$$

La décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{x}{(x+3)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+d}{x^2+1}.$$

En multipliant à gauche et à droite par $(x+3)^2$ et en remplaçant x par -3, on trouve

$$\frac{-3}{9+1} = A + 0 + 0,$$

c'est-à-dire $A = -3/10$. Il peut également être utile de multiplier à gauche et à droite par x et de faire tendre x vers l'infini. On trouve ici

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+3)^2(x^2+1)} = 0 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{Ax}{(x+3)^2} + \frac{Bx}{x+3} + \frac{x(Cx+d)}{x^2+1} \right) = B + C.$$

On a donc $B = -C$. Pour déterminer les coefficients C et D, il est possible d'utiliser les nombre complexes. Les racines (complexes) du polynôme x^2+1 sont i et $-i$. Si on multiplie à gauche et à droite par x^2+1 et si on remplace x par i, on trouve

$$\frac{i}{(i+3)^2} = 0 + 0 + Ci + D.$$

On peut alors identifier la partie réelle et la partie imaginaire :

$$D + iC = \frac{i(3-i)^2}{(3+i)^2(3-i)^2} = \frac{i(8-6i)}{10^2} = \frac{6}{100} + i\frac{8}{100}.$$

On a donc

$$D = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} \quad \text{et} \quad C = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}.$$

Au final, on obtient

$$\frac{x}{(x+3)^2(x^2+1)} = \frac{-3/10}{(x+3)^2} + \frac{-2/25}{x+3} + \frac{\frac{2}{25}x + \frac{3}{50}}{x^2+1}.$$

II. Calcul de primitives

Si f est continue sur un intervalle I, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désignera une primitive quelconque de f sur I (définie à une constante additive prés).

Proposition 5. 1. $\displaystyle\int (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$

A. Primitives usuelles

domaine de définition	fonction	primitive
$\mathbb{R}$	$x^m,\ m \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\begin{cases} \ln\lvert x\rvert + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln\lvert x\rvert + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$	$\dfrac{1}{x-\alpha}$	$\begin{cases} \ln\lvert x-\alpha\rvert + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln\lvert x-\alpha\rvert + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x + C$
$]-\pi/2, \pi/2[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C = \dfrac{\sin x}{\cos x} + C$
$]0, \pi[$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{\cos x}{\sin x} + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}x + C = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} + C$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{Arctan}x + C$
$\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \mathrm{Argth}x + C_1 = \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C_1 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C_2 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C_3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}x + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{Argsh}x + C$
$]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \mathrm{Argch}x + C_1 & \text{si } x > 1 \\ -\mathrm{Argch}(-x) + C_2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

B. Introduction d'une fonction auxilliaire

Proposition 6. Si une fonction f continue sur I peut s'écrire sous la forme
$$f(x) = g(\phi(x))\phi'(x),$$
alors on a
$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = G(\phi(x)) \quad \text{avec} \quad G(x) = \int g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Applications :

domaine de définition	fonction	primitive
$]-\pi/2, \pi/2[$	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}x$	$\ln\lvert\mathrm{ch}x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	e^{ax}	$\dfrac{1}{a}e^{ax} + C$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$

C. Primitive d'une fraction rationnelle

Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle, il suffit de calculer la primitive de chaque terme de la décomposition en éléments simples.

La partie entière est un polynôme. On sait donc calculer ses primitives.

La primitive des éléments simples de première espèce est relativement simple :
$$\int \frac{A}{x-\alpha}\ \mathrm{d}x = A\ln|x-\alpha| + C \quad \text{et pour } j \geq 2 \quad \int \frac{A}{(x-\alpha)^j}\ \mathrm{d}x = \frac{-A}{(j-1)(x-\alpha)^{j-1}} + C.$$

La primitive des éléments simples de seconde espèce est plus délicate. Explicitons la sur un exemple dans le cas où il n'y a pas d'exposant.
$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

De plus,
$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3/4}}\mathrm{Arctan}\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}.$$

Le cas d'un exposant ≥ 2 sera traité sur un exemple dans la partie sur le changement de variables.

D. *Intégration par parties*

Proposition 7. Si f et g sont C^1 sur I, alors

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Applications :

domaine de définition	fonction	primitive
$]0, +\infty[$	$\ln x = 1 \cdot \ln x$	$x\ln(x) - x + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{Arctan}x = 1 \cdot \mathrm{Arctan}x$	$x\mathrm{Arctan}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$]-1, 1[$	$\mathrm{Arcsin}x = 1 \cdot \mathrm{Arcsin}x$	$x\mathrm{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$

E. *Changement de variable*

Proposition 8. Si f est continue sur un intervalle I et si $\phi : J \to I$ est une bijection continue et dérivable de J sur I, alors pour calculer $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, on peut procéder de la manière suivante.

1. On pose $x = \phi(t)$ et $\mathrm{d}x = \phi'(t)\ \mathrm{d}t$.
2. On calcule $\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\ \mathrm{d}t$. On obtient une fonction $F(t)$.
3. On remplace t par $\phi^{-1}(x)$.

Application aux éléments simples de deuxième espèce.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{((x+1/2)^2+3/4)^2}\ \mathrm{d}x \\
&\underset{u=x+1/2,\, a=\sqrt{3/4}}{=} \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2}\ \mathrm{d}u \\
&\underset{u=a\tan(t),\ \mathrm{d}u=\frac{a\ \mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{=} \int \frac{1}{\left(a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+a^2\right)^2}\frac{a\ \mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\
&= \int \frac{1}{a^3}\cos^2 t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^3}\int \frac{\cos(2t)+1}{2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^3}\left(\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a^3}\,(t+\sin t\cos t)\\ &= \frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{\tan t}{1+\tan^2 t}\right)\\ &= \frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{Arctan}\frac{u}{a}+\frac{u/a}{1+(u/a)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2a^3}\mathrm{Arctan}\frac{u}{a}+\frac{1}{2a^2}\frac{u}{u^2+a^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{3}}{9}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

F. Intégrales avec bornes

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors, l'intégrale de f entre a et b est le nombre

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Si pour calculer une intégrale on a effectué un changement de variable, on peut calculer l'intégrale directement en changeant les bornes. Plus précisément, si on fait le changement de variable $x=\phi(t)$, et si $g(t)=f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercices

Exercice 1 (Révisions de terminale). Déterminer les primitives suivantes en précisant l'intervalle de définition:

1.
$$\int e^x \sin(e^x)dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x}dx.$$

2. **linéarisation**
$$\int \cos^3(x)dx \quad ; \quad \int \sin^2(x)\sin(2x)dx \quad ; \quad \int \mathrm{sh}^3(x)dx.$$

3. **intégration par parties**
$$\int \ln(x)dx \quad ; \quad \int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^2}dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx \quad ; \quad \int \mathrm{Arctan}(x)dx.$$

4. (*) **Calculer par récurrence :**
$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 2 (Fractions rationnelles). Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples; en calculer les primitives en précisant l'intervalle de définition.

1. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$
2. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$
3. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$
4. $\dfrac{1}{x^3+1}$
5. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$
6. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$
7. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$
8. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}.$

Exercice 3 (Changement de variable). A l'aide d'un changement de variable, calculer les primitives suivantes:

$$\int (\text{Arcsin}x)^2 dx \quad (u = \text{Arcsin}x) \quad ; \quad \int x^2\sqrt{1+x^3}dx \quad (v = \sqrt{1+x^3}).$$

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx.$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Résultat: $I = 2 - \pi/2$.

Exercice 4. 1. Calculer $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+t+1}$ et en déduire (en posant $t = \tan(x/2)$) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

2. (a) Décomposer la fraction rationnelle $\displaystyle\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ en éléments simples.

   (b) Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

Exercice 5. 1. Décomposer la fraction rationnelle $\displaystyle\frac{t+1}{t(t-2)^2}$ en éléments simples.

2. Calculer $\displaystyle\int \frac{t+1}{t(t-2)^2}dt$.

3. En posant $t = \sin(x)$, en déduire $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+1}{\tan(x)(\sin(x)-2)^2}dx$.

CHAPITRE 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Activité d'approche

Activité 1. Considérons l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions de l'équation de la forme $f(t) = \mathrm{e}^{rt}$.
2. Montrer que l'ensemble des solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
3. En déduire que l'équation différentielle admet une infinité de solutions.

Activité 2. On considère l'équation differentielle

$$y'' - 3y + 2 = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions de l'équation de la forme $f(t) = \mathrm{e}^{rt}$.
2. Montrer que l'ensemble des solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
3. En déduire que l'équation différentielle admet une infinité de solutions.

Activité 3. On considère les équations différentielles

$$\text{(E.D.)} \qquad ay'' + by' + cy = d(t)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et

$$\text{(E.D.)}_0 \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

On suppose qu'on connait une solution particulière $f_0 : I \to \mathbb{R}$ de l'équation (E.D.).

1. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une solution quelconque de l'équation différentielle (E.D), alors $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle (E.D.)_0.
2. Montrer que si $g : I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (E.D.)_0, alors $f = g + f_0$ est solution de l'équation différentielle (E.D.).
3. En déduire que les solutions $f : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E.D) sont exactement les fonctions de la forme $f(t) = g(t) + f_0(t)$ avec g solution de l'équation différentielle (E.D.)_0.

Feuille bilan

I. Définitions et résultats fondamentaux

A. Définitions

Définitions 1.

- Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre est une équation différentielle du type
$$ay' + by = c(t)$$
avec $a \neq 0$. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est l'équation
$$ay' + by = 0.$$
- Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre est une équation différentielle du type
$$ay'' + by' + cy = d(t)$$
avec $a \neq 0$. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est l'équation
$$ay'' + by' + cy = 0.$$

B. Solutions générales

Proposition 1. Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme

$f(t) =$ [solution de l'équation homogène] + [solution particulière de l'équation complète].

Proposition 2. Les solutions de l'équation homogène $ay' + by = 0$ sont
$$f(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3. Pour trouver les solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$, on commence par chercher les racines de l'équation caractéristique
$$ar^2 + br + c = 0.$$

- S'il y a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions sont de la forme
$$f(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
- S'il y a une seule racine r, les solutions sont de la forme
$$f(t) = C_1\mathrm{e}^{rt} + C_2 t\mathrm{e}^{rt}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
- S'il y a deux racines complexes conjuguées distinctes $r + is$ et $r - is$, les solutions sont de la forme
$$f(t) = e^{rt}\left(C_1\cos(st) + C_2\sin(st)\right), \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

C. Recherche d'une solution particulière

Proposition 4. Pour trouver une solution particulière $f_0(t)$ de l'équation avec second membre, on la cherche sous la forme suivante.

– dans le cas où le second membre est un polynôme $Q(t)$: on cherche $f_0(t) = P(t)$ avec P polynôme;
– dans le cas où le second membre est de la forme $c \cdot \cos(\omega t)$: on cherhce
  - $f_0(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ si $\cos(\omega t)$ n'est pas solution de l'équation homogène;
  - $f_0(t) = At\cos(\omega t) + Bt\sin(\omega t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ si $\cos(\omega t)$ est solution de l'équation homogène;

– dans le cas où le second membre est de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$, on cherche $f_0(t) = P(t)e^{\alpha t}$ avec P polynôme de degré
  - $\deg(P) = \deg(Q)$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique;
  - $\deg(P) = \deg(Q) + 1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique;
  - $\deg(P) = \deg(Q) + 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique.

Proposition 5. Si $f_0(t)$ est une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ et si $f_1(t)$ est une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$, alors $f_0(t) + f_1(t)$ est une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t) + e(t)$.

N.B.: Dans le cas général, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, que nous verrons plus tard dans le cours de mathématiques.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = t^2e^t + 2\cos(t)$. L'équation homogène associée est $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a 1 pour racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $f(t) = C_1e^t + C_2te^t$.

Le second membre est de la forme $a(t) + b(t)$ avec $a(t) = t^2e^t$ et $b(t) = 2\cos(t)$. On va chercher une solution particulière $f_0(t)$ de $y'' - 2y' + y = t^2e^t$ sous la forme $P(t)e^t$. On va chercher une solution particulière $f_1(t)$ de $y'' - 2y' + y = 2\cos(t)$ sous la forme $A\cos(t) + B\sin(t)$. En ajoutant ces deux solutions particulières, on trouve une solution particulière de l'équation complète.

D'abord

$$f_0'(t) = \big(P'(t) + P(t)\big)e^t \quad \text{et} \quad f_0''(t) = \big(P''(t) + 2P'(t) + P(t)\big)e^t.$$

Par conséquent,

$$f_0''(t) - 2f_0'(t) + f_0(t) = P''(t)e^t = t^2e^t.$$

On a donc $P''(t) = t^2$, et on peut choisir $P(t) = t^4/12$, c'est-à-dire

$$f_0(t) = \frac{t^4}{12}e^t.$$

Ensuite,

$$f_1'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t) \quad \text{et} \quad f_1''(t) = -A\cos(t) - B\sin(t).$$

On a donc

$$f_1''(t) - 2f_1'(t) + f_1(t) = -2B\cos(t) + 2A\sin(t) = 2\cos(t).$$

On a donc $A = 0$ et $B = -1$, c'est-à-dire

$$f_1(t) = -\sin(t).$$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = t^2e^t + 2\cos(t)$ sont donc les fonctions

$$f(t) = \frac{t^4}{12}e^t - \sin(t) + C_1e^t + C_2te^t \quad \text{avec} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II. Compléments

A. Espace vectoriel des solutions d'une équation homogène

Proposition 6. – Dans le cas d'une équation homogène du premier ordre, l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.

– Dans le cas d'une équation homogène du second ordre, l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Méthode. Dans le cas d'une équation homogène du premier ordre, si on connait une solution $f_1(t)$ non nulle, les solutions sont les fonctions de la forme $C \cdot f_1(t)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Dans le cas d'une équation homogène du second ordre, si on connait deux solutions linéairement indépendantes $f_1(t)$ et $f_2(t)$, les solutions sont les fonctions de la forme $C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

B. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Proposition 7. – Étant donnée une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t_0) = y_0$.

– Étant donnée une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

Remarque. Autrement dit, dans le cas d'une équation d'ordre 1, la constante C est déterminée de manière unique par la condition $f(t_0) = y_0$. Dans le cas d'une équation d'ordre 2, les constantes C_1 et C_2 sont déterminées de manière unique par les conditions $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

C. *Solutions à valeurs complexes*

On peut aussi chercher les solutions qui prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 8. – Les solutions à valeurs complexes de l'équation homogène $ay'+by=0$ sont les fonctions de la forme

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{C}.$$

– Les solutions de l'équation homogène $ay''+by'+cy=0$ sont de la forme :

- si l'équation caractéristique a 2 racines distinctes r_1 et r_2 (réelles ou complexes)

$$f(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{C};$$

- si l'équation caractéristique a une racine double r

$$f(t) = C_1\mathrm{e}^{rt} + C_2 t\mathrm{e}^{rt}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Dans le cas des solutions à valeurs complexes d'une équation d'ordre 2, on ne distingue pas le cas où il y a 2 racines réelles distinctes du cas ou il y a 2 racines complexes conjuguées.

Nous allons voir maintenant comment on peut retrouver facilement les solutions à valeurs réelles à partir des solutions à valeurs complexes.

Proposition 9 (*). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution à valeurs complexes d'une équation différentielle homogène $ay''+by'+cy=0$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$, alors la partie réelle et la partie imaginaire de f sont des solutions à valeurs réelles de l'equation différentielle.

Si l'équation caractéristique $ax^2+bx+c=0$ a une racines complexes conjuguées $r+is$ (et donc la racine complexe conjuguée $r-is$), la fonction suivante est solution de l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$:

$$f(t) = \mathrm{e}^{(r+is)t}.$$

Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont donc des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$:

$$\mathrm{Re}\big(f(t)\big) = e^{rt}\cos(st) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\big(f(t)\big) = e^{rt}\sin(st).$$

Ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Puisque l'espace des solutions à valeurs réelles et un espace vectoriel de dimension 2, les solutions sont donc les combinaisons linéaires :

$$C_1 e^{rt}\cos(st) + C_2 e^{rt}\sin(st), \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles

1.
2. $-5y' + 15y = 3$
3. $y' + y = 7/2$
4. $4y' - 3y = e^x$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $-y' + 2y = xe^{-x}$.

Exercice 3. 1. Résoudre l'équation différentielle $7y' - 14y = x^2e^{2x}$.
2. Trouver la solution f telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$.
Indication : trouver une solution de cette équation différentielle sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)e^x$.
Indication : trouver une solution de cette équation différentielle sous la forme $(ax + b)e^x$.

Exercice 6 (*). Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 4x + 4$.

Exercice 7. 1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $y''+4y'+3y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad y'' + 4y' + 3y = 2e^x(4x^2 + 6x + 5).$$
   (a) Trouver les nombres a, b, c tels que la fonction $x \mapsto e^x(ax^2+bx+c)$ soit solution de (E_1).
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E_1).
3. On considère l'équation différentielle
$$(E_2) \qquad y'' + 4y' + 3y = -6(\cos(3x) + 2\sin(3x)).$$
   (a) Trouver les nombres a, b tels que la fonction $x \mapsto a\cos(3x) + b\sin(3x)$ soit solution de (E_2).
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E_2).
4. On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad y'' + 4y' + 3y = 2e^x(4x^2 + 6x + 5) - 6(\cos(3x) + 2\sin(3x)).$$
   (a) Trouver toutes les solutions de (E).
   (b) Trouver la solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 8 (*). On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$
1. (a) Quel doit être le degré du polynôme P pour que $x \mapsto e^xP(x)$ soit solution de (E) ?
   (b) Déterminer P pour que $x \mapsto e^xP(x)$ soit solution de (E).
2. Trouver toutes les solutions de (E).

Exercice 9. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.
2. (a) $P(x)$ désigne un polynôme. Démontrer que $P(x)e^x$ est une solution de (E) équivaut à dire que $P''(x) = (x^2 + 1)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (c) Trouver la solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
3. Soient x_0, a et b trois réels fixés. Démontrer que l'équation différentielle (E) admet une solution unique h telle que $h(x_0) = a$ et $h'(x_0) = b$.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)e^x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2. (a) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $(ax + b)e^x$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (c) Trouver la solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

PARTIE III

QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES POUR LES AUTRES DISCIPLINES

1. Produit scalaire, base vectorielle orthonormée

Définitions 2.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan ou de l'espace, le produit scalaire $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$ est le réel
$$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).$$
- Dans le plan, une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est orthonormée si et seulement si
  1. $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et
  2. $\langle\vec{e}_1|\vec{e}_2\rangle = 0$.
- Dans l'espace, une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée si et seulement si
  1. $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et
  2. $\langle\vec{e}_1|\vec{e}_2\rangle = \langle\vec{e}_2|\vec{e}_3\rangle = \langle\vec{e}_1|\vec{e}_3\rangle = 0$.

Proposition 10.

- $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}|\vec{u}\rangle$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = 0$.
- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base **orthonormée** du plan et si $\vec{u}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ sont deux vecteurs du plan, alors
$$\langle\vec{u}_1|\vec{u}_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$
- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base **orthonormée** de l'espace et si $\vec{u}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$ et $\vec{u}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$ sont deux vecteurs de l'espace, alors
$$\langle\vec{u}_1|\vec{u}_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

2. Produit vectoriel

Définition 3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Sinon, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur de l'espace tel que

1. $\vec{w}$ est orthogonal au plan $(\vec{u}, \vec{v})$,
2. $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et
3. la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orientée dans le sens direct, c'est-à-dire, si on place le pouce de la main droite le long de $\vec{u}$ et l'index le long de $\vec{v}$, alors $\vec{w}$ est dans le même sens que le majeur.

Proposition 11. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de l'espace et si $\vec{u}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$ et $\vec{u}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$ sont deux vecteurs de l'espace, alors
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{e}_1 - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{e}_3.$$

3. Projection d'un vecteur sur un axe

Définition 4. Une droite vectorielle Δ dans le plan (ou dans l'espace) est un ensemble de la forme $\Delta = \{\lambda\vec{u}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ où $\vec{u}$ est un vecteur du plan (ou de l'espace).

Proposition 12. Si $\vec{v}$ est un vecteur du plan (ou de l'espace), si Δ est une droite vectorielle et si $\vec{u} \in \Delta$ alors le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur Δ est le vecteur

$$\vec{w} = \frac{\langle \vec{v} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}.$$

Cas particulier : si $\|\vec{u}\| = 1$, alors $\vec{w} = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle \cdot \vec{u}$.

4. Dérivée d'un vecteur

Définition 5. On dit que la fonction vectorielle $t \mapsto \vec{v}(t)$ (où $\vec{v}(t)$ est un vecteur du plan ou de l'espace) est dérivable en t_0 si et seulement si la limite $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}$ existe. On note la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

Proposition 13.

- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base fixe du plan et si $\vec{v}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$ alors $\vec{v}$ est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables en t_0. On a alors
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t_0) = x'(t_0)\vec{e}_1 + y'(t_0)\vec{e}_2.$$
- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base fixe de l'espace et si $\vec{v}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$ alors $\vec{v}$ est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont dérivables en t_0. On a alors
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t_0) = x'(t_0)\vec{e}_1 + y'(t_0)\vec{e}_2 + z'(t_0)\vec{e}_3.$$

5. Trigonométrie de base

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\sin(\pi/2 + x) = \cos x, \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Cas particulier :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{1}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

En inversant (1) :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

6. Matrices

Voir chapitre 1 : révisions d'algèbre linéaire.

7. Système d'équations

Voir chapitre 1 : révisions d'algèbre linéaire. Résolution d'un système avec la méthode du pivot de Gauss.

Un système d'équations linéaires à plusieurs inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut s'écrire sous forme matricielle

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Définition 6. Dans le cas d'un système de $\underline{n}$ équations à $\underline{n}$ inconnues,
le <u>déterminant du système</u> est le déterminant de la matrice A.

Proposition 14.
- Un système d'équations linéaires admet une solution unique si et seulement si le déterminant du système est $\neq 0$.
- Si le déterminant du système est nul, le système admet aucune ou une infinité de solutions.

8. Equations différentielles

Voir chapitre 7 : équations différentielles linéaires à coefficients constants.

9. Nombres complexes

En physique, le nombre complexe "i" est noté "j" afin de ne pas le confondre avec l'intensité. On a donc

$$j^2 = -1.$$

Proposition 15.

- Tout nombre complexe $z = a + jb$ (a est la partie réelle de z et b sa partie imaginaire) peut s'écrire sous forme trigonométrique, $z = \rho e^{j\theta}$ où $\rho = |z| \geq 0$ est le module de z et où $\theta = \arg(z)$ est l'argument de z (modulo 2π).
- On a alors les relations suivantes :

$$a = \rho \cos\theta, \quad b = \rho \sin\theta, \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}.$$

PARTIE IV

ANNALES

CHAPITRE 1

ANNÉE 2003-2004

UE02, SDI-PC.
Contrôle continu n°1.
Lundi 8 mars 2004. Durée 1 heure.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Question de cours: 3 pts; Exercice 1: 10 pts; Exercice 2: 7 pts.

Question de cours.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donner la définition de $\lim_{+\infty} f = \ell$.
2. Soit A et B deux matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\det(A) = \det(B)$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 4y + 17z, 10z, 5z).$$

Soient v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad v_3 = (3, 2, 1).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. f est-elle inversible ? Quel est le rang de f?
3. Montrer que $\mathcal{E}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_2 et que $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_3.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = |x^3 + 2| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1, 2]$.
3. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$.
4. Montrer que f est continue en 0.

UE02, SDI-PC.
Contrôle continu n°2.
Lundi 29 mars 2004. Durée 1 heure.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Question de cours. On suppose que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

Exercice 1. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}x.$$

1. Justifier la définition de f et montrer sa continuité sur $[-1,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.
3. Simplifier l'expression de f.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 2\mathrm{argch}\sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Calculer la dérivée de f pour $x > 0$. Calculer la dérivée de f pour $x < 0$.
4. Simplifier l'expression de f.

Exercice 3. Soit $f : [\pi, 3\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -3\sin^2(x) + 5$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera les domaines de définition et de dérivabilité.
2. Calculer g'.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}.$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$.

UE02, SDI-PC.
Contrôle continu n°3.
Lundi 3 mai 2004. Durée 1 heure.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Question de cours. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\text{dét}(f - \lambda \text{Id}) = 0$.

Exercice 1.

1. Etudier la limite en 0 de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1 - \text{ch}(x)}{\sin(x) - x}.$$
2. Etudier la limite de la suite de terme général
$$u_n = n^2 \left(\text{sh} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(\text{Arctan} \frac{2}{n^2} \right).$$

Exercice 2. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = e^{\text{th}(x)}$.

Exercice 3. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. (a) Trouver les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé. On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2).
4. (a) Pour $n \geq 1$, calculer $(A')^n$.
   (b) Pour $n \geq 1$, en déduire A^n.
5. (a) Trouver une matrice C telle que $C^2 = A'$.
   (b) En déduire une matrice D telle que $D^2 = A$.

UE02, SDI-PC.
Examen.
Lundi 14 juin 2004. Durée 3 heures.

N.B. Les exercices sont indépendants
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Exercice 1: 3pts; Exercice 2: 3pts; Exercice 3: 3pts; Exercice 4: 3pts; Exercice 5: 8pts;

Exercice 1.

1. (a) Indiquer un équivalent en 0 de $\cos(x) - 1$ puis de $(\cos(x) - 1)^2$.
   (b) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 \cdot \left(n^4 + n + 1\right).$$
2. (a) Indiquer un équivalent en 0 de
$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$
   (b) Etudier la limite en 0 de la suite (v_n) définie par
$$v_n = \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3}\right) \cdot n^4.$$
3. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. Trouver un développement limité à l'ordre 5 en 0 de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \mathrm{sh}(x) \cdot \mathrm{Arctan}(x)$.
2. $g(x) = \mathrm{Argth}(\sin(x))$.

Exercice 3.

1. Calculer $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$ et en déduire (en posant $t = \tan(x/2)$) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \sin x}$.
2. (a) Décomposer la fraction rationnelle $\displaystyle\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ en éléments simples.
   (b) Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.
2. (a) $P(x)$ désigne un polynôme. Démontrer que $P(x)e^x$ est une solution de (E) équivaut à dire que $P''(x) = (x^2+1)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (c) Trouver la solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
3. Soient x_0, a et b trois réels fixés. Démontrer que l'équation différentielle (E) admet une solution unique h telle que $h(x_0) = a$ et $h'(x_0) = b$.

Exercice 5. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = (-11x + 10y, -30x + 24y).$$

On pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

1. Vérifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} -11 & 10 \\ -30 & 24 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune d'elles, les vecteurs propres associés.
   On choisira dans la suite les vecteurs propres $v_1 = (2,3)$ et $v_2 = (1,2)$.
3. On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2). Déterminer P et P^{-1}.
4. Déterminer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
5. On note D la matrice de f dans la base (v_1, v_2).
   (a) Trouver une matrice d telle que $d^2 = D$.
   (b) En déduire que $(PdP^{-1})^2 = A$.
6. (a) Démontrer que les matrices D' telles que $D'D = DD'$ sont de la forme $D' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels quelconques.
   (b) En déduire que les matrices M telles que $MA = AM$ sont de la forme $M = \begin{pmatrix} 4a-3b & -2a+2b \\ 6a-6b & -3a+4b \end{pmatrix}$.
7. (a) Quelle est la matrice M dans chacun des cas particuliers suivants:
   $a = 1$ et $b = 1$;
   $a = 4$ et $b = 9$.
   (b) Dans ces deux cas particuliers, pouvait-on prévoir simplement que la matrice M est telle que $MA = AM$? Expliquer.

UE02, SDI-PC.
Examen.
Vendredi 3 septembre 2004. Durée 3 heures.

N.B. Les cinq exercices sont indépendants
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Exercice 1: 4pts; Exercice 2: 3pts; Exercice 3: 3pts; Exercice 4: 4pts; Exercice 5: 6pts.

Exercice 1.

1. (a) Indiquer un équivalent en 0 de $\sin(x) - x$ puis de $(\sin(x) - x)^2$.
   (b) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(n^6 + n^3 + 1\right).$$

2. (a) Indiquer un équivalent en 0 de

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

   (b) Etudier la limite en 0 de la suite (v_n) définie par

$$v_n = \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \cdot n^3.$$

3. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. Trouver un développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.
2. $g(x) = \ln(1 + \sin(x))$.

Exercice 3.

1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{t+1}{t(t-2)^2}$ en éléments simples.
2. Calculer $\displaystyle\int \frac{t+1}{t(t-2)^2}dt$.
3. En posant $t = \sin(x)$, en déduire $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+1}{\tan(x)(\sin(x)-2)^2}dx$.

T.S.V.P...

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2. (a) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $(ax+b)e^x$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (c) Trouver la solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 5. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f(x,y) = (5x - y, -x + 5y).$$

On pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

1. Vérifier que la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune d'elles, les vecteurs propres associés.
   On choisira dans la suite les vecteurs propres $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$.
5. On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2). Déterminer P et P^{-1}.
6. Déterminer A^n pour tout entier $n \geq 1$.

CHAPITRE 2

ANNÉE 2004-2005

UE02, SDI-PC.
Contrôle continu n°1.
Lundi 7 février 2005. Durée 1 heure.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Questions de cours: 6 pts; Exercice 1: 9 pts; Exercice 2: 5 pts.

Questions de cours.

1. Etant donné une application linéaire $f : E \to F$, montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.
2. Montrer que si f est bornée et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$.
3. Enoncer la formule de changement de base pour un endomorphisme.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (2x - 4y, -4x + 8y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2).
3. Montrer que f n'est pas injective. Est-elle surjective ?
4. Soient $e'_1 = (2, 3)$ et $e'_2 = (5, 7)$. Montrer que (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
5. Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (e'_1, e'_2).
6. Trouver la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction f admet-elle une limite à droite en 0 ? Une limite à gauche en 0 ?
3. f est-elle continue en 0 ?

UE02, SDI-PC.
Contrôle continu n°2.
Lundi 7 mars 2005. Durée 1 heure.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif : Questions de cours : 6 pts ; Exercice 1 : 3 pts ; Exercice 2 : 2 pts ; Exercice 3 : 5 pts ; Exercice 4 : 4 pts.

Questions de cours.

1. Tracer dans un même repère la courbe représentative des fonctions sin et Arcsin. Préciser l'ensemble de définition et de dérivabilité de Arcsin et donner sans démonstration $\text{Arcsin}'(x)$.
2. Montrer que si A est une matrice carrée inversible alors $\text{dét}(A) \neq 0$ et $\text{dét}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{dét}(A)}$.
3. Montrer que si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$ et admet un maximum en $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.

Exercice 1. Calculer la dérivée 10ème de $\dfrac{x}{1-x}$.

Exercice 2. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 entre 0 et x pour la fonction $\text{sh}(x)$.

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}(2x^2 - 1) - 2\text{Arcsin}(x).$$

1. Justifier la définition de f et la continuité de f sur $[0,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
3. Simplifier l'expression de f.

Exercice 4.

1. Calculer le déterminant de la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 & 5 \\ 12 & 10 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
2. L'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par
$$f(x,y,z,t) = (11x + 3y + 5t\ ,\ 12x + 10y + z + 9t\ ,\ 6y + 8t\ ,\ 7y)$$
est-il bijectif ?

UE02, SDI-PC.
Contrôle continu n°3.
Lundi 2 mai 2005. Durée 1 heure.

N.B. Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif: Questions de cours: 5 pts; Exercice 1: 6 pts; Exercice 2: 3 pts; Exercice 3: 6 pts.

Questions de cours.

1. Donner sans démonstration le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\text{dét}(f - \lambda \text{Id}) = 0$.

Exercice 1.

1. Etudier la limite en 0 de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{e^x - 1 - x}.$$
2. Donner un équivalent en 0 de $1 - \text{ch}(x)$ et de $\ln(1+x)$. Puis, étudier la limite de la suite de terme général
$$u_n = n^2 \cdot \left(1 - \text{ch}\frac{2}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de
$$f(x) = \cos(x) \cdot \text{argth}(x).$$

Exercice 3. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (2y, -3x+5y)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base (e_1, e_2).
2. (a) Trouver les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé. On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2).
4. (a) Pour $n \geq 1$, calculer $(A')^n$.
   (b) Pour $n \geq 1$, en déduire A^n.

UE02, SDI-PC.
Programme de l'examen final, mai 2005.

Questions de cours d'algèbre

1. Démonstration de la propriété: si A est un s.e.v. de E et si $\dim A = \dim E$, alors $A = E$.
2. Démonstration de la propriété: si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$ et $f(-x) = -f(x)$.
3. Démonstration de la propriété: l'application linéaire $f : E \to F$ est injective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
4. Enoncé de la formule de changement de base pour un endomorphisme $f : E \to E$.
5. Démonstration des propriétés:

$$\text{dét}(C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3, C_2, C_3) = \text{dét}(C_1, C_2, C_3) \quad \text{et} \quad \text{dét}(C_1, C_2, C_3) = -\text{dét}(C_2, C_1, C_3).$$

6. Démonstration de la propriété: si A est inversible alors

$$\text{dét}(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{dét}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{dét}(A)}.$$

7. Démonstration de la propriété: si $f : E \to E$ est un endomorphisme, si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$ et si A' est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}'$, alors $\text{dét}(A) = \text{dét}(A')$.
8. Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
9. Démonstration de la propriété: si f un endomorphisme de E, alors

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \text{dét}(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0.$$

10. Démonstration de la propriété: deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

<u>Questions de cours d'analyse</u>

1. Démonstration de la propriété: $\Big(f(x) \geq 0 \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\Big) \quad \Longrightarrow \quad \ell \geq 0$.
2. Démonstration de la propriété: si f est bornée et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = 0$.
3. Enoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
4. Fonctions élémentaires et réciproques: domaine de définition, continuité, dérivabilité, graphe, expression de la dérivée (sans démonstration).
5. Démonstration de la propriété: si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[$ et admet un extremum en $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.
6. Enoncé et démonstration du théorème de Rolle, en admettant le théorème ci-dessus (question 5).
7. Enoncé de la formule de Taylor à l'ordre n en x_0 pour une fonction C^∞.
8. Démonstration de la formule du DL à l'ordre n en 0 d'une fonction C^∞ à partir de la formule de Taylor.
9. Formulaire de DL en 0.
10. Démonstration de la propriété: si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$) alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.
11. Démonstration de la propriété: une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL en 0.
12. Démonstration de la propriété: si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et si $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors
$$f_1\cdot f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1\cdot g_2 \quad \text{et} \quad \frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}.$$

Exercices type

Les exercices suivants ont été traités en cours ou en TD. Si vous souhaitez avoir des précisions sur les corrigés de ces exercices, contacter votre enseignant de TD.

Feuille 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 4y + 17z, 10z, 5z).$$

Soient v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad v_3 = (3, 2, 1).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. f est-elle inversible ? Quel est le rang de f?
3. Montrer que $\mathcal{E}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_2 et que $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par v_1 et v_3.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(P) = (P(0), P'(0))$.

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que les polynômes P_1, P_2 et P_3 définis par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$ et $P_3(X) = 1 + X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (2, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer la matrice de f dans les bases $\{P_1, P_2, P_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$.

Exercice 3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(\ (1, 1, 1); (0, 1, 1)\ )$, $G = \mathrm{Vect}(\ (1, 0, 1)\ )$. Montrer que $E = F \oplus G$; exprimer les projecteurs associés.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$. Montrer que f est surjectif mais n'est pas injectif.

Feuille 2

Exercice 5. En utilisant les suites $\left(x_n = \dfrac{1}{2n\pi}\right)$ et $\left(y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right)$, montrer que $x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) &= x^3 - 4x + 2 \quad \text{si } x \geq 0 \\ f(x) &= |x^3 + 2| \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1, 2]$.
3. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$.
4. Montrer que f est continue en 0.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ f(x) = x^3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 8. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré impair. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Feuille 3

Exercice 9. Justifier l'existence d'une fonction réciproque et l'expliciter pour $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$.

Exercice 10. Soient les fonctions $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ et $g : x \mapsto \sin(\text{Arcsin}x)$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g.

Exercice 11. Calculer :

$$\lim_{x \to \infty} (x - \ln(\text{ch}x)).$$

Exercice 12. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}x.$$

1. Justifier la définition de f et montrer sa continuité sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.
3. Simplifier l'expression de f.

Feuille 4

Exercice 13. Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
$v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 2, 0)$, $v_3 = (1, 3, 5)$.

Exercice 14. Aprés l'avoir transformé (et sans le développer), montrer que le déterminant suivant est nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 15. Sachant que les nombres 546, 273 et 169 sont divisibles par 13, montrer, sans le calculer, que 13 divise le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Indication: remplacer la troisième colonne par $100C_1 + 10C_2 + C_3$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, z).$$

Que vaut le déterminant de f?

Exercice 17. La matrice suivante est-elle inversible? Si oui, déterminer son inverse. Sinon, donner son rang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Feuille 5

Exercice 18. Démontrer le théorème des accroissements finis pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ en appliquant le théorème de Rolle à la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Exercice 19. En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée n-ième de $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}.$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Feuille 6

Exercice 21. Déterminer le D.L. à l'ordre 3 en 0 de deux façons (développement de Taylor en calculant les dérivées successives en 0, puis à l'aide d'opérations sur les D.L.) pour les fonctions suivantes:

1. $f_1(x) = \sin(2x) - e^{3x}$
2. $f_2(x) = e^x \cos x$
3. $f_3(x) = (7x^8 - 5x^6 + 3x^2 - 1) \cdot \mathrm{sh}(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin x}{1 - x^2}$.
6. $f_6(x) = \tan(x)$;

Exercice 22. Déterminer le D.L. à l'ordre 5 en 0 de:

1. $f_1(x) = e^{\mathrm{sh} x}$.
2. $f_2(x) = e^{\cos x}$.
3. $f_3(x) = \ln(1 + \sin(x))$.

Feuille 7

Exercice 23. Etudier la limite en 0 des fonctions définies de la manière suivante :

$$a)\ f(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sin^2(x)} \qquad b)\ f(x) = \mathrm{argth}(x) \cdot \frac{x}{\ln(1+x)-x}.$$

Exercice 24. Etudier la limite des suites suivantes :

$$a)\ u_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)\cdot(n^2+1) \qquad b)\ u_n = \frac{n\cos(1/n)}{2\mathrm{sh}(1/n)}.$$

Exercice 25. 1. (a) Indiquer un équivalent en 0 de $\cos(x)-1$ puis de $(\cos(x)-1)^2$.

(b) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)^2 \cdot \left(n^4+n+1\right).$$

2. (a) Indiquer un équivalent en 0 de

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

(b) Etudier la limite en 0 de la suite (v_n) définie par

$$v_n = \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3}\right)\cdot n^4.$$

3. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes ?

Feuille 8

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = (2x, x-y).$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale? Si oui, écrivez la matrice de f dans cette base.
3. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f^n (c'est-à-dire $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$) dans cette base?
4. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f^n dans la base canonique?

Exercice 27. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x+y, x+3y)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. (a) Trouver les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé. On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2).
4. (a) Pour $n \geq 1$, calculer $(A')^n$.
   (b) Pour $n \geq 1$, en déduire A^n.
5. (a) Trouver une matrice C telle que $C^2 = A'$.

(b) En déduire une matrice D telle que $D^2 = A$.

Feuille 9

Exercice 28. Déterminer les primitives suivantes en précisant l'intervalle de définition:

1.
$$\int e^x \sin(e^x)dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x}dx.$$

2.
$$\int \cos^3(x)dx.$$

3.
$$\int \ln(x)dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx \quad ; \quad \int \mathrm{Arctan}(x)dx.$$

Exercice 29. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples; en calculer les primitives en précisant l'intervalle de définition.

$$a)\ \frac{x^3}{x^2-4} \qquad b)\ \frac{1}{x^3+1}.$$

Exercice 30. 1. Calculer $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+t+1}$ et en déduire (en posant $t = \tan(x/2)$) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

2.a. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ en éléments simples.

b. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

Exercice 31. 1. Résoudre l'équation différentielle $7y' - 14y = x^2e^{2x}$.
Indication: chercher une solution particulière sous la forme
$x \mapsto (ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}$.

2. Trouver la solution f telle que $f(0) = 0$.

Exercice 32. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.
2. (a) $P(x)$ désigne un polynôme. Démontrer que $P(x)e^x$ est une solution de (E) équivaut à dire que $P''(x) = (x^2+1)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (c) Trouver la solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
3. Soient x_0, a et b trois réels fixés. Démontrer que l'équation différentielle (E) admet une solution unique h telle que $h(x_0) = a$ et $h'(x_0) = b$.

UE02, SDI-PC.
Examen.
Mercredi 25 mai 2005. Durée 3 heures.

N.B. Les exercices sont indépendants
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif:
Questions de cours: 2,5 pts; Exercice 1: 3 pts; Exercice 2: 4 pts; Exercice 3: 2 pts; Exercice 4: 2,5 pts; Exercice 5: 2 pts; Exercice 6: 1 pt; Exercice 7: 3 pts.

Questions de cours.

1. Démonstration de la propriété: si $f : E \to E$ est un endomorphisme, si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}$ et si A' est la matrice de f dans une base $\mathcal{E}'$, alors $\text{dét}(A) = \text{dét}(A')$.
2. Enoncé de la formule de Taylor à l'ordre n en x_0 pour une fonction C^∞.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 4y + 17z, 10z, 5z).$$

Soient v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad v_3 = (3, 2, 1).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. f est-elle inversible ? Quel est le rang de f?
3. Montrer que $\mathcal{E}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice
   $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. (a) Trouver les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.
   On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2).
4. (a) Pour $n \geq 1$, calculer $(A')^n$.
   (b) Pour $n \geq 1$, en déduire A^n.

Exercice 3. 1. Indiquer un équivalent en 0 de $\cos(x) - 1$ puis de $(\cos(x) - 1)^2$.
2. Etudier la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 \cdot \left(n^4 + n + 1\right).$$

Exercice 4. 1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ en éléments simples.
2. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

Exercice 5. 1. Résoudre l'équation différentielle $7y' - 14y = x^2 e^{2x}$.
Indication: chercher une solution particulière sous la forme
$x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}$.
2. Trouver la solution f telle que $f(0) = 0$.

Exercice 6. Déterminer le D.L. à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = e^{\operatorname{sh} x}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \sin x.$$

1. Montrer que la dérivée de f s'annule sur l'intervalle $]0, \pi[$.
2. Calculer la dérivée 10ème $f^{(10)}$ de f.

UE02, SDI-PC.
Examen.
Samedi 3 septembre 2005. Durée 3 heures.

N.B. Les exercices sont indépendants
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Barême indicatif:
Questions de cours: 3,5 pts; Exercice 1: 2 pts; Exercice 2: 2 pts; Exercice 3: 2 pts; Exercice 4: 2 pts; Exercice 5: 3,5 pts; Exercice 6: 5 pts.

Questions de cours.

1. Indiquer sans démonstration l'ensemble de définition et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
$$f(x) = \mathrm{Arcsin}(x), \quad g(x) = \mathrm{Arccos}(x) \quad et \quad h(x) = \mathrm{Arctan}(x).$$
2. Démonstration de la propriété :
l'application linéaire $f : E \to F$ est injective $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$. Montrer que f est surjectif mais n'est pas injectif.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par
$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, z).$$
1. Donner la matrice de f dans la base canonique.
2. Que vaut le déterminant de f?

Exercice 3. 1. Indiquer un équivalent en 0 de
$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$
2. Etudier la limite de la suite (v_n) définie par
$$v_n = \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3}\right) \cdot n^4.$$

Exercice 4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \ln(1+\sin(x))$.

Exercice 5. On considère la fraction rationnelle
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$
1. Déterminer la partie entière de $f(x)$ dans sa décomposition en éléments simples.
2. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
3. Déterminer les primitives de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, 2[$ et $]2, +\infty[$.

Exercice 6. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (2x+5y, 5x+2y)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliquer pourquoi la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (a) Trouver les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer un vecteur propre associé.
   On notera v_1 et v_2 les deux vecteurs propres ainsi choisis.
3. (a) Ecrire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2).
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base (e_1, e_2) à la base (v_1, v_2).
4. (a) Pour $n \geq 1$, calculer $(A')^n$.
   (b) Pour $n \geq 1$, en déduire A^n.