ANALYSE COMPLEXE 1, PARCOURS SPÉCIAL L3
NOTES DE COURS

XAVIER BUFF (D'APRÈS PASCAL THOMAS)

Pré-requis : analyse élémentaire dans $\mathbb{R}$, convergence uniforme, séries entières, séries de Fourier, calcul différentiel dans le plan (matrice jacobienne, arcs paramétrés, intégrales de fonctions de deux variables réelles). Dérivation des intégrales dépendant d'un paramétre.

On écrira en général $z = x + iy$ où $x := \operatorname{Re} z$ et $y := \operatorname{Im} z$ sont réels. On assimilera le nombre complexe $x + iy$ avec le point (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$. Il faut avoir à l'esprit les règles de calcul pour les nombres complexes :

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

et

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Le *conjugué* d'un nombre complexe est $\bar{z} = x - iy$, son *module* est

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On écrit souvent z en coordonnées polaires, $z = |z|e^{i\theta}$, où θ est un angle choisi tel que $\cos\theta = x/|z|$, $\sin\theta = y/|z|$. On vérifie grâce aux règles sur le sinus et le cosinus d'une somme que $zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$, ce qui motive la notation exponentielle (il y a des raisons plus profondes que nous verrons plus loin).

1. Fonctions holomorphes ($\mathbb{C}$-différentiables).

1.1. Dérivée complexe.

Définition 1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est* $\mathbb{C}$-dérivable *en $a \in \Omega$ si et seulement si la limite suivante existe :*

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} =: f'(a) \in \mathbb{C},$$

où h est un nombre complexe qui tend vers 0 au sens de la topologie de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Une fonction f qui est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $a \in \Omega$ est dite holomorphe *sur Ω.*

Remarque : en général nous écrirons seulement $\lim\limits_{h\to 0}$ sans préciser que h est complexe.

Le nombre $f'(a)$ est parfois aussi noté $\dfrac{df}{\mathrm{d}z}(a)$.

Insistons ici sur le fait qu'il s'agit d'une limite en deux variables réelles, donc plus forte qu'une limite en une variable réelle. Souvenez-vous de fonctions comme $g : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ qui ont des limites le long de chaque droite passant par $(0, 0)$, mais pas de limite au sens de $\mathbb{R}^2$, puisque par exemple $\lim\limits_{x\to 0} g(x, 0) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{y\to 0} g(0, y)$.

La $\mathbb{C}$-dérivabilité en a est équivalente, puisque nous n'avons qu'une variable, au fait que f soit $\mathbb{C}$-différentiable au point a : il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, telle que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et une application $\mathbb{C}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + h\varepsilon(h).$$

En effet, il suffit de prendre $L(h) = f'(a)\cdot h$ et $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.

Si nous identifions la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à la fonction $F := (P,Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

alors la condition de $\mathbb{C}$-différentiabilité de f est plus forte que la condition de $\mathbb{R}$-différentiabilité de F. En effet, il faut que la différentielle de F ait une forme particulière puisqu'elle doit correspondre à la multiplication par le nombre complexe $f'(a) = \alpha + i\beta$, c'est-à-dire l'application

$$(x+iy) \mapsto (\alpha + i\beta)\cdot(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y).$$

La matrice jacobienne de F au point (x_0, y_0) avec $a = x_0 + iy_0$ vérifie donc

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Les termes diagonaux sont égaux et les termes hors de la diagonale sont opposés.

Proposition 2. *Une fonction $f : (x+iy) \mapsto P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe si et seulement si $F := (P,Q)$ est $\mathbb{R}$-différentiable et ses dérivées partielles vérifient les* équations de Cauchy-Riemann *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases}$$

1.2. **Propriétés.** Les sommes, produits, quotients et compositions de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables le sont aussi, avec les mêmes démonstrations et les mêmes formules que dans le cas réel (la seule différence est que la limite est prise sur des voisinages dans le plan complexe, de petits disques, qui sont plus grands que les petits intervalles utilisés sur $\mathbb{R}$).

Il est clair que la fonction identité $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, donc d'après ce qui précède, tout polynôme (en z) est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, et toute fraction rationnelle est holomorphe en-dehors des zéros de son dénominateur.

1.3. **Séries entières.** Nous rappelons la définition des séries entières.

Définition 3. *Une* série entière *est une série de fonctions de la forme $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$, avec $a_k \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.*

Théorème 4. *Il existe $R \in [0, +\infty]$, appelé* rayon de convergence, *tel que pour tout $r < R$, la série est normalement convergente sur $\overline{D}(0,r)$, et pour tout z tel que $|z| > R$, $(a_k z^k)$ est non bornée. De plus, R est donné par la formule d'Hadamard :*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}},$$

avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Le disque ouvert $D(0,R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.

C'est une conséquence des théorèmes sur les suites de fonctions dérivables qu'une série entière doit être indéfiniment différentiable ($\mathcal{C}^\infty$) à l'intérieur de son disque de convergence, en tant que fonction des deux variables réelles x et y.

Mais on a beaucoup mieux.

Théorème 5. *Soit $F := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,R)$ et :*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Démonstration. La série dérivée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence R que f. Nous devons montrer que pour tout $z_0 \in D(0,R)$:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Pour $z \in D(0,R) \setminus \{z_0\}$, on a :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$$

avec :

$$g_n(z) = a_n\big(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1}\big).$$

Choisissons r tel que $|z_0| < r < R$ et observons que pour tout $z \in D(0,r)$, on a :

$$\big|g_n(z)\big| \leq n|a_n| r^{n-1}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} g_n$ est donc normalement convergente sur $D(0,r)$. Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{C}$. La somme $G : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ est donc continue sur $D(0,r)$. En particulier, elle est continue en z_0. On a donc :

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} G(z) = G(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

□

Corollaire 6. *Soit $F := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ sa somme. Alors :*

(1) La fonction f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$. En particulier, f est holomorphe sur $D(0,R)$.

(2) Pour tout $k \geq 0$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

(3) Le développement en série entière de f en 0 est la série de Taylor en 0 :

$$\forall k \geq 0, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0).$$

Démonstration. Les points (1) et (2) se démontrent sans aucune difficulté par récurrence. Les détails sont laissés au lecteur. Pour le point (3), il suffit de remplacer z par 0 dans la formule de la dérivée $k^{\text{ème}}$. Le seul terme non nul est alors donné par $n = k$. □

C'est un fait important, et non-trivial, que toute fonction holomorphe est développable en série entière au voisinage de tout point de son domaine. La démonstration est nettement plus difficile. Nous verrons dans le chapitre suivant que c'est une conséquence de la Formule de Cauchy.

Exemple. La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par la série entière :

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Le rayon de convergence est infini. Le disque de convergence est égal à $\mathbb{C}$. La fonction exp est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Sa dérivée est :

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \exp(z).$$

2. Formule de Cauchy et conséquences

2.1. **Intégration sur les chemins.**

Définition 7. *Un* chemin *dans un ouvert Ω est une courbe continue, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$, qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une partition de $[a,b]$*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = b$$

telle que $\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ soit une fonction $\mathcal{C}^1$ jusqu'au bord pour $0 \leq j \leq N-1$.

On note $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, où γ_1, γ_2 sont à valeurs réelles.

Nous rappelons qu'une *forme différentielle* est une expression de la forme

$$\omega(x,y) = \alpha(x,y)\mathrm{d}x + \beta(x,y)\mathrm{d}y,$$

où α, β sont des fonctions continues (à valeurs complexes) qu'on appelle ses coefficients.

Exemple : $\mathrm{d}z := \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$.

Définition 8. *Étant donnés un chemin γ dans Ω et une forme différentielle ω à coefficients continus sur Ω, alors*

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \big(\alpha(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \beta(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Les dérivées de γ ne sont pas forcément définies aux points a_j de la subdivision ; il faut comprendre cette intégrale comme une sommes finie d'intégrales sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$.

Si on se souvient que $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$, on voit que si $\omega = \omega(z)\mathrm{d}z$, alors

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

C'est le plus souvent cette forme que nous utiliserons.

Exemple : $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2 = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0,1]$. Alors

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 (\alpha(\gamma(t))\operatorname{Re}(z_2 - z_1) + \beta(\gamma(t))\operatorname{Im}(z_2 - z_1))\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, si $\omega = \mathrm{d}z$, on trouve $\int_\gamma \mathrm{d}z = z_2 - z_1$, ce qui semble raisonnable !

Proposition 9. *Si $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma\circ\sigma} \omega$. On dit que l'intégrale ne dépend pas du paramétrage de la courbe.*

Si $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ (donc $\sigma(d) = a$, $\sigma(c) = b$) alors $\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma\circ\sigma} \omega$.

Démonstration. Notons $[a,b]$ un des intervalles de la subdivision, il suffit de démontrer la propriété pour un intervalle, puis de faire la somme. D'après la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\sigma} \omega &= \int_c^d \big(\alpha(\gamma(\sigma(t)))\gamma_1'(\sigma(t)) + \beta(\gamma(\sigma(t)))\gamma_2'(\sigma(t))\big)\sigma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \big(\alpha(\gamma(u))\gamma_1'(u) + \beta(\gamma(u))\gamma_2'(u)\big)du = \int_\gamma \omega,\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = \sigma(t)$, donc $du = \sigma'(t)\mathrm{d}t$.

Dans le cas où σ est décroissante, l'intégrale de c à d se transforme en intégrale de b à a, et quand on rétablit l'ordre des bornes on doit changer le signe. $\square$

Si φ est une fonction, on note $\mathrm{d}\varphi$ la forme différentielle

$$\mathrm{d}\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Nous allons généraliser l'exemple du segment donné ci-dessus.

Proposition 10. *Soit φ une fonction définie et $\mathbb{R}$-différentiable dans un voisinage de $\gamma([a,b])$. Alors*

$$\int_\gamma \mathrm{d}\varphi = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Démonstration. D'après la formule de dérivation des fonctions composées et les égalités ci-dessus,

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\big(\varphi(\gamma(t))\big) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t),$$

et on calcule donc aisément l'intégrale de $\mathrm{d}\varphi$ d'après le théorème fondamental du calcul différentiel. $\square$

Une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est *rectifiable*, c'est-à-dire qu'on peut calculer sa longueur et qu'elle est finie. En général, la longueur d'une courbe se définit comme une limite de longueurs de lignes brisées passant par une subdivision de points de la courbe de pas tendant vers 0, mais dans notre cas, il suffit de poser la définition suivante.

Définition 11. *La* longueur *d'une courbe γ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux est donnée par*

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

Comme avant, les dérivées sont définies sur chaque morceau, et on a en fait une somme finie d'intégrales.

Proposition 12. *Supposons que* ω *soit bornée sur* $\gamma([a,b])$, *alors*

$$\left|\int_\gamma \omega(z)\mathrm{d}z\right| \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} |\omega(\gamma(t))|\right) \cdot L(\gamma).$$

Démonstration. En chaque point t,

$$|\omega(\gamma(t))\,(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))| \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} |\omega(\gamma(t))|\right) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}.$$

□

2.2. **Rappel : Formule de Green-Riemann.**

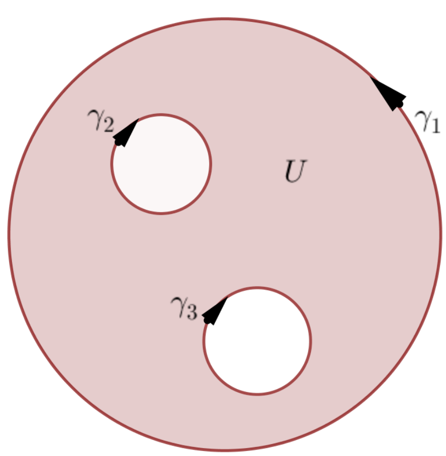
Définition 13. *Une courbe* γ *définie sur* $[a,b]$ *est dite* courbe de Jordan *si* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *et pour tous* t_1, t_2 *tels que* $t_1 < t_2$, *alors* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *implique* $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Intuitivement, il s'agit d'une courbe fermée qui ne se rencontre jamais elle-même. Par exemple, la courbe $t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ est une courbe de Jordan paramétrant le cercle unité.

Nous admettrons le (difficile) Théorème de Jordan, qui affirme le fait topologique que si γ est une courbe de Jordan dans le plan, alors $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ admet exactement deux composantes connexes, une bornée ("à l'intérieur" de γ, entourée par γ) et l'autre non-bornée.

Rappelons qu'un domaine de $\mathbb{C}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Définition 14. *On dit qu'un domaine* $U \subset \mathbb{C}$ *est un* domaine régulier *si*
- *U est borné ;*
- *le bord ∂U de U est constitué par un nombre fini de courbes de Jordan $\mathcal{C}^1$ par morceaux, deux à deux disjointes.*



Définition 15. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine régulier et soit ω une forme différentielle continue sur le bord ∂U de U. On pose*

$$\int_{\partial U} \omega := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \omega,$$

où γ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sont des courbes de Jordan $\mathcal{C}^1$ par morceaux paramétrant le bord de U, orientées de sorte qu'on laisse U à gauche.

Si $\omega = \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}y$ avec α et β et classe $\mathcal{C}^1$, on dit que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ et on note

$$\mathrm{d}\omega := \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Théorème 16 (Green-Riemann)**.** *Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit U un domaine régulier tel que $\overline{U} \subset \Omega$. Alors*

$$\int_{\partial U} \omega = \iint_U \mathrm{d}\omega.$$

Ce théorème a peut-être été mentionné dans votre cours de calcul différentiel de deuxième année dans le cas où ω est à valeurs réelles. Nous considérons sans problème le cas où α et β sont à valeurs complexes : pour obtenir la formule dans ce cadre, il suffit d'appliquer la version réelle aux parties réelle et imaginaire de chaque coefficient.

Notez un cas particulier important : si $\omega = \mathrm{d}\varphi$ avec φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors par le Théorème de Schwarz

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

On retrouve que sur une courbe fermée γ alors $\int_\gamma \mathrm{d}\varphi = 0$, ce qu'on sait d'après la Proposition 10.

2.3. **Théorème et formule de Cauchy.**

Théorème 17 (de Cauchy)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit U un domaine régulier tel que $\overline{U} \subset \Omega$. Alors*

$$\int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. Notons $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Alors, d'après les équations de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

On applique la formule de Green-Riemann à

$$\omega := f(z)\mathrm{d}z = f(x + iy)\mathrm{d}x + if(x + iy)\mathrm{d}y.$$

Étant donné que

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial if}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

l'intégrale est nulle. □

La formule de Cauchy est la plus importante de toute l'analyse complexe. Nous allons maintenant donner la formule de Cauchy dans le cas particulier mais déjà très important d'un disque.

Théorème 18. *Soit f une fonction holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-dérivable) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine U. Soient $a \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(a,r) \subset U$. Alors, en notant $C(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique,*

$$\forall z_0 \in D(a,r), \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

Démonstration. Tout d'abord, soit δ suffisamment petit pour que le disque fermé $\overline{D(z_0,\delta)}$ soit contenu dans le disque ouvert $D(a,r)$. Considérons le domaine régulier U compris entre les cercles $C(z_0,\delta)$ et $C(a,r)$. La fonction

$$g : z \mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$$

est holomorphe au voisinage de $\overline{U}$. D'après le théorème de Cauchy, on a donc

$$0 = \int_{\partial U} g(z)\mathrm{d}z = \int_{C(a,r)} g(z)\mathrm{d}z - \int_{C(z_0,\delta)} g(z)\mathrm{d}z.$$

Le signe $-$ devant la seconde intégrale vient du fait que le cercle $C(z_0,\delta)$ est orienté dans le sens inverse trigonométrique lorsqu'on laisse U à gauche. On a donc

$$\int_{C(z_0,\delta)} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

Considérons maintenant la limite de l'intégrale sur le cercle $C(z_0,\delta)$ quand $\delta \to 0$. Une paramétrisation de $C(z_0,\delta)$ est donnée par $\gamma_\delta(t) := z_0 + \delta e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ (il est facile de voir que changer le point de départ et d'arrivée sur le cercle ne changera pas l'intégrale).

Alors $\gamma_\delta(t) - z_0 = \delta e^{it}$ et $\gamma_\delta'(t) = i\delta e^{it}$, donc

$$\int_{C(z_0,\delta)} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\delta e^{it}) i\delta e^{it}}{\delta e^{it}}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(z_0+\delta e^{it}) i\mathrm{d}t,$$

et comme f est continue au point z_0, on a $\lim\limits_{\delta\to 0} f(z_0+\delta e^{it}) = f(z_0)$ uniformément en $t \in [0,2\pi]$. Donc

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{2\pi} f(z_0+\delta e^{it}) i\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(z_0) i\mathrm{d}t = 2\pi i f(z_0). \qquad \square$$

Corollaire 19. *(Formule de la Moyenne)*

Si f vérifie les mêmes hypothèses que dans la Formule de Cauchy, alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Si on applique la formule de Cauchy pour $z_0 = a$ et $z = a + re^{it}$, on a $\mathrm{d}z = ire^{it}\mathrm{d}t = i(z-a)\mathrm{d}t$, et le quotient se simplifie. $\square$

Le nom de la formule vient du fait qu'on obtient la valeur de f en un point en faisant la moyenne de ses valeurs sur un cercle autour du point. Comme $\mathrm{d}t$ est une mesure réelle, on voit que cette formule est aussi valable pour $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. C'est plus généralement une propriété des fonctions harmoniques (celles dont le Laplacien est nul).

2.4. **Conséquences de la formule de Cauchy.** Nous pouvons maintenant démontrer que les fonctions holomorphes de classe $\mathcal{C}^1$ sont la même chose que les fonctions analytiques, c'est-à-dire localement développables en série entière. (On peut démontrer que l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas indispensable, mais ce serait trop long à notre niveau).

Théorème 20. *Soit f une fonction holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-dérivable) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω. Alors f est développable en série entière autour de tout $a \in U$ avec un rayon de convergence supérieur ou égal au plus grand $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset U$ (qui est la distance de a au complémentaire de U).*

Remarque : ce théorème dit qu'une fonction est holomorphe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert si et seulement si elle est analytique sur cet ouvert. C'est donc une réciproque au corollaire 6. Mais il donne quelque chose de nouveau même pour une fonction déjà supposée analytique : on avait simplement supposé qu'une telle fonction est développable en série entière autour de chaque $a \in U$, mais avec un rayon de convergence de la série qui peut être beaucoup plus petit. Or comme une telle fonction est nécessairement holomorphe et de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Taylor en a devra converger sur le plus grand disque possible centré en a et contenu dans U.

Démonstration. Considérons comme ci-dessus $r = \operatorname{dist}(a, \mathbb{C} \setminus U)$ (éventuellement infini). Soit $r' < r$. On peut appliquer la formule de Cauchy dans le disque $\overline{D}(a,r')$. De plus, pour $r'' < r'$ et $z_0 \in \overline{D}(a,r'')$, $z \in C(a,r)$, $\frac{|z_0-a|}{|z-a|} \leq r''/r' < 1$. Alors

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_0-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_0-a}{z-a} \right)^k,$$

avec convergence normale pour $z \in C(a,r')$. On peut donc échanger l'intégration et la sommation dans la formule de Cauchy :

$$(1) \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r')} \frac{f(z)}{z-z_0} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{C(a,r')} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \mathrm{d}z \right) (z_0-a)^k.$$

On voit ainsi que cette série converge pour tout $z_0 \in \overline{D}(a,r'')$, mais comme r'' peut prendre toute valeur strictement inférieure à r, la série obtenue converge dans tout le disque $D(a,r)$ et admet un rayon de convergence supérieur ou égal à r. □

Corollaire 21. *(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\overline{D}(a,r) \subset U$,*

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \mathrm{d}z,$$

où $C(a,r)$ désigne le cercle de centre a et de rayon r, parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

(2) (Inégalités de Cauchy).

Sous les mêmes hypothèses,

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{C(a,r)} |f|.$$

Démonstration. Le premier énoncé provient de la relation entre dérivées successives et coefficients du développement en série de Taylor. Le deuxième en appliquant la majoration d'une intégrale par le maximum du module de l'intégrande multiplié par la longueur du chemin (ici égale à $2\pi r$). □

Théorème 22 (de Liouville)**.** *Si f est holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier, alors f est constante.*

Démonstration. On applique les inégalités de Cauchy pour $k = 1$ et un cercle de rayon R aussi grand qu'on veut :

$$\left|f'(a)\right| \leq \frac{1}{R} \max_{C(a,R)} |f| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La dérivée de f est identiquement nulle sur $\mathbb{C}$, donc f est constante. □

Corollaire 23 (Théorème Fondamental de l'Algèbre)**.** *Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. Soit P un polynôme. Si P n'admet aucune racine, alors $\mathrm{d}\frac{1}{P}$ est une fonction holomorphe et continue sur tout $\mathbb{C}$. Si le degré de P est supérieur ou égal à 1, alors $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$, donc $\dfrac{1}{P}$ est bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante d'après le théorème de Liouville : contradiction, donc en fait P devait être de degré 0. □

On déduit facilement de ce théorème que tout polynôme de degré n (exactement) se factorise en n facteurs de degré 1 et admet donc n racines complexes éventuellement confondues, et que les polynômes à coefficients réels se factorisent en facteurs irréductibles de degré inférieur ou égal à 2.

3. Formule des résidus et applications

3.1. Résidu en un pôle.

Définition 24. *Soit f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe) sur un disque pointé $D(a,r) \setminus \{a\}$, où $r > 0$. On appelle* résidu *de f au point a et on note $Res(f,a)$ le nombre complexe*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\varepsilon)} f(z)\mathrm{d}z,$$

où $C(a,\varepsilon)$ est le cercle de rayon ε centré en a, parcouru une fois dans le sens trigonométrique, et $\varepsilon \in \,]0,r[$.

Nous devons montrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire que le nombre ainsi défini ne dépend pas de ε. Soient $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < r$. Considérons le domaine régulier

$$U := \big\{z \ : \ \varepsilon_1 < |z| < \varepsilon_2\big\}.$$

La fonction f est holomorphe au voisinage de $\overline{U}$. D'après le théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C(0,\varepsilon_2)} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C(0,\varepsilon_1)} f(z)\mathrm{d}z$$

le signe $-$ devant la seconde intégrale venant du fait que le cercle est orienté dans le sens inverse trigonométrique lorsqu'on laisse U à gauche. On a donc

$$\int_{C(0,\varepsilon_2)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C(0,\varepsilon_1)} f(z)\mathrm{d}z$$

comme requis.

Remarquons également que si f est holomorphe sur tout le disque $D(a,r)$, alors Res $(f;a) = 0$ d'après le Théorème de Cauchy.

Définition 25. *On dit qu'une fonction holomorphe f, définie sur $D(a,r)\setminus\{a\}$, admet un* pôle d'ordre m *au point a si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et g holomorphe sur $D(a,r)$, avec $g(a) \neq 0$, tels que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \quad z \in D(a,r) \setminus \{a\}.$$

Proposition 26. *Si $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ avec g holomorphe sur $D(a,r)$, alors*

$$Res\ (f;a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

En particulier, si $m = 1$ (pôle simple) alors Res $(f;a) = g(a)$, si $m = 2$ (pôle double) alors Res $(f;a) = g'(a)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire 21 qui affirme que si $0 < \varepsilon < r$, alors pour tout $k \geq 0$, on a

$$\frac{g^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\varepsilon)} \frac{g(z)}{(z-a)^{k+1}} \mathrm{d}z$$

le cercle étant orienté dans le sens trigonométrique. □

Énonçons un résultat souvent utilisé dans la pratique.

Corollaire 27. *Supposons que $f = P/Q$ avec P et Q holomorphes au voisinage de a et*

$$P(a) \neq 0, \quad Q(a) = 0 \quad et \quad Q'(a) \neq 0.$$

Alors f a un pôle simple en $z = a$ et

$$Res\ (f;a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Démonstration. La fonction Q étant holomorphe au voisinage de a, elle y est développable en série entière :

$$Q(z) = \sum_{k \geq 0} q_k (z-a)^k \quad \text{avec} \quad q_k \in \mathbb{C}.$$

On a $q_0 = Q(a) = 0$ et $q_1 = Q'(a) \neq 0$. La fonction $R(z) = Q(z)/(z-a)$ est donc également développable en série entière :

$$R(z) = \sum_{k \geq 0} q_{k+1} (z-a)^k \quad \text{et} \quad R(a) = q_1 = Q'(a).$$

En particulier, la fonction $g(z) = P(z)/R(z)$ est holomorphe sur $D(a,r)$ et

$$g(a) = \frac{P(a)}{R(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)} \neq 0.$$

On a $f(z) = g(z)/(z-a)$ avec $g(a) \neq 0$. La fonction f a donc un pôle simple en $z = a$ et d'après la proposition précédente,

$$\text{Res } (f;a) = g(a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

□

3.2. **Théorème des résidus.**

Théorème 28. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, U un domaine régulier tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et $A \subset U$ un ensemble fini. Si f est une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus A$, alors*

$$\int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a\in A} Res\ (f;a).$$

Démonstration. Notons $a_1, \ldots, a_N$ les points de A. Fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les disques fermés $\overline{D(a_i,\varepsilon)}$ soient deux à deux disjoints et contenus dans U. Soit V le domaine régulier

$$V := U - \bigcup_{i=1}^{N} D(a_i,\varepsilon).$$

La fonction f est holomorphe sur V. D'après le Théorème de Cauchy, on a donc

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial V} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{N} \int_{C(a_i,\varepsilon)} f(z)\mathrm{d}z \\ &= \int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z - 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}\ (f;a_i). \quad \square \end{aligned}$$

3.3. **Application au calcul d'intégrales (premiers exemples).**

Un certain nombre d'intégrales définies peuvent se calculer en utilisant la formule des résidus, sans utiliser une primitive de la fonction sous le signe $\int$. Nous allons traiter plusieurs exemples et énoncer deux lemmes d'un usage fréquent dans ce genre de calcul.

Exemple 1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\sin t}$ avec $a > 1$.

On pose $z = e^{it}$; d'où $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$. On obtient

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{2}{z^2+2iaz-1}\mathrm{d}z.$$

D'après le théorème des résidus, $I/(2\pi i)$ est égal à la somme des résidus de la fonction $z \mapsto \dfrac{2}{z^2+2iaz-1}$ aux points singuliers contenus dans $D(0,1)$.

On vérifie simplement que le seul pôle inclus dans $D(0,1)$ est $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$. C'est un pôle simple. On obtient

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Lemme 29. *Si f est continue pour $|z| > R_0$ et si $zf(z) \to 0$ quand $|z| \to +\infty$, alors*

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \to 0 \quad \textit{quand} \quad R \to +\infty,$$

où γ_R est un arc de cercle $\big\{z \ :\ |z| = R,\ \theta_1 \le \arg(z) \le \theta_2\big\}$.

Lemme 30. *Si f est continue dans $D(z_0,R_0)$ et si $(z-z_0)f(z) \to 0$ quand $z \to z_0$, alors*

$$\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \to 0 \quad \textit{quand} \quad r \to 0,$$

où γ_r est un arc de cercle $\{z \ :\ |z-z_0| = r,\ \theta_1 \leq \arg(z-z_0) \leq \theta_2\}$.

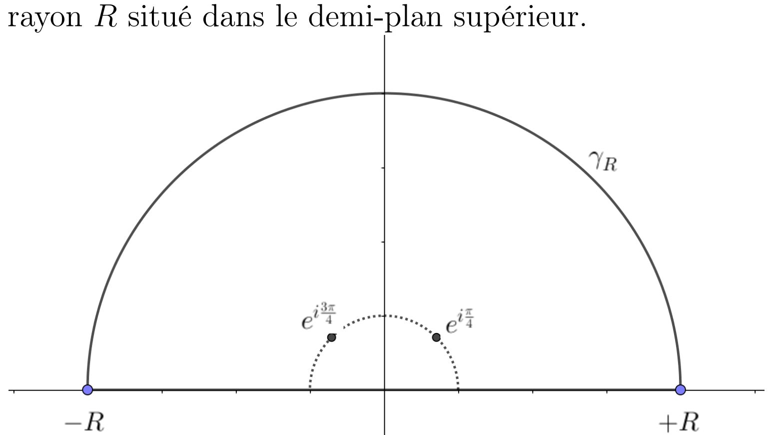
Démonstration. Pour ces deux lemmes, il suffit d'utiliser l'inégalité

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \max_\gamma |f| \times L(\gamma).$$ □

Exemple 2. Calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

Remarquons d'abord que cette intégrale est convergente car en $\pm\infty$ la fonction à intégrer est équivalente à $1/x^2$.

Considérons la fonctions définie par $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des points $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$. Ces points z_k sont des pôles simples de f. Considérons, pour $R > 1$, le domaine délimité par le circuit $\Gamma = [-R,+R] \cup \gamma_R$ (orienté en laissant l'aire intérieur à Γ à gauche), γ_R désignant le demi-cercle de centre 0 et de rayon R situé dans le demi-plan supérieur.



On a, d'après le théorème des résidus :

$$\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f; e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathrm{Res}(f; e^{i\frac{3\pi}{4}})\right).$$

On obtient donc, en faisant tendre R vers $+\infty$ et en utilisant le lemme 29 :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f; e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathrm{Res}(f; e^{i\frac{3\pi}{4}})\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3.4. **Application au calcul d'intégrales (autres exemples).** Les exemples suivants interviennent dans des calculs de transformées de Fourier.

Cas 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix\xi}\mathrm{d}x$, où P et Q sont des polynômes tels que $\deg Q \geq \deg P + 2$ et $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On applique la formule des résidus à $f(z) = e^{iz\xi}\frac{P(z)}{Q(z)}$. La condition sur les degrés assure qu'on a une intégrale absolument convergente sur la droite réelle (le module de l'exponentielle est 1 quand $x \in \mathbb{R}$).

On utilise le contour (courbe fermée) constitué du segment de droite de $-R$ à R, puis un arc de cercle centré en 0 qui va de R à $-R$, et on fait $R \to +\infty$. Les pôles sont les zéros de Q.

Si $\xi \neq 0$, il faut choisir le demi cercle dans le demi plan où le terme exponentiel sera de module borné par 1.

Cas 2. $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{ix\xi}$, où $\xi\neq 0$ et P et Q sont des polynômes tels que $\deg Q=\deg P+1$ et $Q(x)\neq 0$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Attention, l'intégrale que l'on calcule n'est pas absolument convergente.

On utilise un contour rectangulaire choisi de la même manière que ci-dessus. La contribution de la partie située en dehors de l'axe réel tendra vers 0 à cause du Lemme de Jordan :

Proposition 31. *Soit R une fraction rationnelle sans pôles sur l'axe réel telle que $\lim_{x\to\pm\infty}R(x)=0$ et $\alpha>0$. Soient $X_1,X_2,Y>0$ vérifiant $Y\geq X_1+X_2$, et γ le contour donné par le segment $\gamma_0:=[-X_2,X_1]$ orienté dans le sens des x croissants, le segment $\gamma_1:=[X_1,X_1+iY]$ orienté dans le sens des y croissants, le segment $\gamma_2:=[-X_2+iY,X_1+iY]$ orienté dans le sens des x décroissants, et le segment $\gamma_3:=[-X_2,-X_2+iY]$ orienté dans le sens des y décroissants. On pose Γ pour le chemin constitué des trois segments γ_1, γ_2, et γ_3. Alors*

$$\lim_{\min(X_1,X_2)\to+\infty}\int_\gamma R(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z=0.$$

Démonstration. La fraction rationnelle $R=P/Q$ doit vérifier $\deg Q\geq\deg P+1$, donc $\lim_{|z|\to\infty}R(z)=0$. Donc il existe r_1 tel que si $|z|\geq r_1$, alors $|R(z)|\leq\varepsilon$, et en particulier si $Y\geq\min(X_1,X_2)\geq r_1$, on aura $|R(z)|\leq\varepsilon$ pour tout z dans l'image de γ_1, γ_2, ou γ_3.

D'autre part, si $z=x+iy$, $|e^{i\alpha z}|=e^{-\alpha y}$. On en déduit, toujours pour $Y\geq\min(X_1,X_2)\geq r_1$,

$$\left|\int_{\gamma_1}R(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|,\left|\int_{\gamma_3}R(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|\leq\int_0^Y\varepsilon e^{-\alpha y}\leq\frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

D'autre part,

$$\left|\int_{\gamma_2}R(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|\leq\varepsilon(X_1+X_2)e^{-\alpha Y}\leq\varepsilon Ye^{-\alpha Y}\leq\varepsilon,$$

pour Y suffisamment grand. Finalement l'intégrale sur tout Γ est majorée par 3ε. □

Cas 3. On peut traiter des cas où Q a des zéros simples sur l'axe réel, mais ces intégrales doivent s'interpréter en "valeur principale" : il faut prendre la limite de l'intégrale calculée sur l'axe réel privé d'un petit intervalle symétrique autour du pôle. Cela nécessite d'ajouter au contour un petit demi-cercle autour de chaque pôle réel.

Cas 4. Pour calculer les intégrales de la forme $\int_0^{+\infty}x^\alpha\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $0<\alpha<1$, $\deg Q\geq\deg P+2$, et Q admet au plus un zéro simple à l'origine, et aucun autre zéro sur $]0,+\infty[$, on utilise le chemin $\Gamma_{\varepsilon,r,R}$, avec $\varepsilon<r<R$, donné par la concaténation des chemin suivants :

$$\gamma_1(t):=t+i\varepsilon,\quad (r^2-\varepsilon^2)^{1/2}\leq t\leq(R^2-\varepsilon^2)^{1/2};$$
$$\gamma_2(t):=Re^{it},\quad \arcsin\frac{\varepsilon}{R}\leq t\leq 2\pi-\arcsin\frac{\varepsilon}{R};$$
$$\gamma_3(t):=(R^2-\varepsilon^2)^{1/2}-t-i\varepsilon,\quad 0\leq t\leq(R^2-\varepsilon^2)^{1/2}-(r^2-\varepsilon^2)^{1/2};$$
$$\gamma_4(t):=re^{-it},\quad -2\pi+\arcsin\frac{\varepsilon}{r}\leq t\leq-\arcsin\frac{\varepsilon}{r}.$$

On prend pour fonction $f(z) := z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, avec l'argument de z choisi dans $]0, 2\pi[$. On fait d'abord tendre ε vers 0 (et on remarque que sur γ_3, l'argument de z^α tend vers $2\pi\alpha$), puis $r \to 0$, puis $R \to \infty$. Les termes correspondant aux arcs de cercle tendront vers 0. Il faut calculer les résidus de la fonction aux zéros de Q.

4. L'exponentielle complexe

Nous savons déjà que les polynômes (en z) sont analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier, et les fractions rationnelles sont analytiques en dehors des racines de leur dénominateur. Il est intéressant de connaître quelques autres fonctions analytiques explicites. La plus importante est l'exponentielle (et ses cousines, les fonctions trigonométriques et hyperboliques).

Définition 32. *On définit l'exponentielle complexe par* $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Proposition 33. *L'exponentielle complexe est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$. On a les relations suivantes :*
- $\exp'(z) = \exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *;*
- $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *;*
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et tout* $w \in \mathbb{C}$ *;*
- $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *;*
- $\big|\exp(i\theta)\big| = 1$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Le rayon de convergence de la série définissant exp est infini. L'exponentielle complexe est donc définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. La fonction dérivée est la somme de la série des dérivées :

$$\exp'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{k!} \underset{n=k-1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Étant donné que $\bar{z}^k = \overline{z^k}$, on a

$$\forall n \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}$$

et donc $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ par passage à la limite quand n tend vers l'infini. Fixons $w \in \mathbb{C}$ et considérons la fonction $f : z \mapsto \exp(z+w) \times \exp(-z)$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme composée et produit de fonctions holomorphes. De plus, en utilisant $\exp' = \exp$, on a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp'(z+w) \times \exp(-z) + \exp'(z+w) \times \exp(-z) \times (-1) \\ &= \exp(z+w) \times \exp(-z) - \exp(z+w) \times \exp(-z) = 0. \end{aligned}$$

La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est donc constante et cette constante vaut

$$f(0) = \exp(w) \times \exp(-0) = \exp(w).$$

En appliquant ce résultat pour $w = 0$, on obtient $\exp(z) \times \exp(-z) = 1$. En particulier, la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $w \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z+w)\exp(-z) = \exp(w) \quad \text{d'où} \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \left|\exp(z)\right|^2 &= \exp(z)\overline{\exp(z)} \\ &= \exp(z)\exp(\bar z) = \exp(z+\bar z) \\ &= \exp\left(2\frac{z+\bar z}{2}\right) = \big(\exp(\mathrm{Re}(z))\big)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\, z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En prenant $z = i\theta$, on en déduit également que $\left|\exp(i\theta)\right| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. □

On pose $\exp(z) = e^z$ où $e := \exp(1)$ et on définit

$$\cos z := \mathrm{Re}(e^{iz}) = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) \quad \text{et} \quad \sin z := \mathrm{Im}(e^{iz}) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right).$$

On a donc

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right) = \frac{4}{4} = 1. \tag{2}$$

Ceci montre que quand $z \in \mathbb{R}$, les valeurs $(\cos z, \sin z)$ sont les coordonnées d'un point sur le cercle unité.

Les fonctions cos et sin sont holomorphes avec

$$\cos' z = -\sin z \quad \text{et} \quad \sin' z = \cos z$$

(exercice facile !). Cela permet de calculer la longueur d'un arc de cercle, et on trouve que la longueur de l'arc du cercle unité de 1 jusqu'à $\cos\theta + i\sin\theta$ est exactement θ, ce qui permet de retrouver la définition des angles (mesurés en radians).

Proposition 34. *Il existe un plus petit nombre strictement positif T tel que $e^{iT} = 1$. La fonction* exp *est périodique de période iT. Les fonctions* cos *et* sin *sont périodiques de période T.*

Définition 35. *On définit $\pi := T/2$.*

Démonstration de la Proposition 34. Un calcul immédiat montre que

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Les propriétés des séries alternées impliquent que pour $t \neq 0$,

$$1-\frac{t^2}{2} < \cos t < 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}.$$

On a donc $\cos(0) = 1$ et $\cos(\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{8} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel t tel que $\cos(t) = 0$. La fonction cos étant continue, l'ensemble des t tels que $\cos(t) = 0$ est un fermé non vide. On note $T_0 > 0$ son plus petit élément positif.

La fonction sin (dont la dérivée est la fonction cos) est donc strictement croissante sur $[0, T_0]$ et comme $\sin^2(T_0) = \cos^2(T_0) + \sin^2(T_0) = 1$, on a forcément $\sin(T_0) = 1$ et

$e^{iT_0} = i$. Par conséquent, $e^{i4T_0} = i^4 = 1$. De plus, pour $t \in]0, T_0[$ on a $0 < \cos(t) < 1$ et donc

$$\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 < 1.$$

Donc $e^{it} \neq 1$ pour $t \in]0, 4T_0[$. Cela montre que $T = 4T_0$ est le plus petit réel strictement positif tel que $e^{iT} = 1$. Le reste de la proposition suit facilement. □

5. La fonction Log

Proposition 36. *Si* $\exp z_1 = \exp z_2$*, alors* $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$*. Pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, il existe un unique* $\theta \in]-\pi, \pi]$ *tel que* $e^w = z$ *avec* $w = \operatorname{Log} z := \log|z| + i\theta$*.*

Définition 37. *On appelle* θ *l'*argument *de* z *et* Log *la* détermination principale du logarithme complexe.

Démonstration de la proposition 36. D'après la Proposition 33, $|\exp z_1| = |\exp z_2|$ implique $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ (l'exponentielle est croissante donc bijective sur $\mathbb{R}$). Donc $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$. L'étude des variations de sin et cos sur une période montre que $y \mapsto e^{iy}$ ne prend qu'une fois chaque valeur sur un intervalle du type $[a, a + 2\pi[$. □

Remarque importante : la fonction Log n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et il n'existe pas de choix continu de l'argument sur ce domaine.

Proposition 38. *Toute fonction inverse de la fonction exponentielle définie et continue sur un ouvert connexe sera holomorphe, et sa dérivée égale à* $1/z$*.*

Réciproquement, toute fonction F *définie sur un ouvert connexe telle que* $F'(z) = 1/z$ *sera égale à un inverse de l'exponentielle, à une constante additive près.*

Démonstration. Mise à part la valeur précise de la dérivée de l'exponentielle, la démonstration pourrait s'appliquer à tout inverse de fonction.

Soit V un ouvert connexe assez petit pour que l'exponentielle soit bijective de V sur $U := \exp(V)$. Soit F un inverse continu de exp, $F : U \longrightarrow V$. Alors si $z \in U$ et $r > 0$ est assez petit pour que $D(z, r) \subset U$, considérons $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r$. Il existe des complexes uniques $w, w' \in V$ tels que $\exp w = z$, $\exp w' = z + h$. Posons $k := w' - w$. Comme F est continue, $k \to 0$ quand $h \to 0$. Alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{w' - w}{\exp w' - \exp w} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\exp(w+k) - \exp w} = \frac{1}{\exp w} = \frac{1}{z}.$$

Par conséquent, sur un ouvert connexe deux inverses continus, ayant la même dérivée, diffèrent par une constante.

Réciproquement, si $F'(z) = 1/z$, dans un ouvert connexe qui ne contient pas 0, alors

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{F(z)}}{z}\right) = \frac{zF'(z)e^{F(z)} - e^{F(z)}}{z^2} = 0,$$

donc $\frac{e^{F(z)}}{z} = c$ (par connexité) et si on choisit un nombre b tel que $e^b = c$, $z \mapsto F(z) - b$ donne un inverse de l'exponentielle. □

Remarque : s'il est toujours vrai que $\exp(a + b) = (\exp a)(\exp b)$, **on n'a pas toujours** $\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$. Le problème est que si $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, le domaine de la détermination principale du logarithme, on n'a pas toujours $\arg a + \arg b \in]-\pi, +\pi[$.

Exemple : $a = b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $ab = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\operatorname{Log}(ab) = -i\frac{2\pi}{3}$. Mais $\operatorname{Log} a = \operatorname{Log} b = i\frac{2\pi}{3}$, donc $\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b = i\frac{4\pi}{3}$. Bien entendu, $\exp(\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b) = \exp(\operatorname{Log} ab)$, et on observe que la différence entre les deux résultats est $2\pi i$.

Sur tout ouvert où on peut définir un logarithme complexe log (un inverse continu de l'exponentielle), on peut définir des puissances complexes par $z^a := \exp(a \log z)$. Attention, cette définition dépend du choix du logarithme !

Les puissances non-entières doivent être manipulées avec précaution. On vérifie que $z^{a+b} = z^a z^b$, donc $(z^{1/m})^m = z$ quand $m \in \mathbb{N}^*$, mais en général on n'a pas toujours $(zw)^a = z^a w^a$, pour les mêmes raisons que ci-dessus.

6. Prolongement analytique

6.1. Théorème des zéros isolés.

Théorème 39. *Soit f analytique au voisinage de z_0, avec $f(z_0) = 0$. Alors soit il existe $r > 0$ tel que pour tout z tel que $0 < |z - z_0| < r$, $f(z) \neq 0$, soit il existe $r > 0$ tel que pour tout z tel que $|z - z_0| < r$, $f(z) = 0$.*

Dans le premier cas, il existe $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(z) \sim a(z-z_0)^m$ au voisinage de z_0. On appelle m l'ordre *du zéro de f en z_0. f admet un zéro d'ordre m en un point z_0 si et seulement si $f^{(k)}(z_0) = 0$, $1 \leq k \leq m-1$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

Démonstration. Il existe $r_0 > 0$ tel que pour $z \in D(z_0, r_0)$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. L'hypothèse nous dit que $a_0 = 0$.

Considérons $A := \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$.

— Cas 1 : $A = \emptyset$. Alors le développement en série donne $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, r_0)$, et on peut prendre $r = r_0$ et on a la première conclusion.

— Cas 2 : $A \neq \emptyset$. Soit $k_0 := \min A \geq 1$. On peut écrire, pour $z \in D(z_0, r_0)$,

$$f(z) = a_{k_0}(z - z_0)^{k_0} \left(1 + (z - z_0) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_k}{a_{k_0}} (z - z_0)^{k-k_0-1} \right).$$

Le facteur hors parenthèse est non-nul quand $0 < |z - z_0|$. Le deuxième terme dans la parenthèse tend vers 0 quand z tend vers z_0, donc $f(z) \sim a_{k_0}(z - z_0)^{k_0}$; et il existe $r_1 \leq r_0$ tel que la parenthèse soit non-nulle pour $|z - z_0| < r_1$. On peut prendre $r = r_1$.

La dernière partie du théorème se déduit du fait que $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$.

□

On rappelle qu'étant donné un ensemble $A \subset \Omega$, un point $a \in \Omega$ est un *point d'accumulation* de A si pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ tel que $0 < |a - x| < r$; et que c'est un *point isolé* de A si $a \in A$ et qu'il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \cap A = \{a\}$. Le théorème 39 dit donc que les zéros de f sont soit isolés, soit dans l'intérieur de l'ensemble des zéros.

6.2. Théorème du Prolongement analytique.

Définition 40. *Soit Ω un sous ensemble d'un espace topologique. On dit que Ω est* connexe *si pour tout couple d'ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $U_1 \cup U_2 \supset \Omega$ alors soit $U_1 \cap \Omega = \emptyset$, soit $U_2 \cap \Omega = \emptyset$.*

On dit que Ω est connexe par arcs *si pour tous $x, y \in \Omega$, il existe une courbe continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.*

Fait : la deuxième propriété implique toujours la première. Pour des ouverts de $\mathbb{C}$ (ou même d'un espace vectoriel normé), elles sont équivalentes. Dans le cadre de ce cours, nous ne considérerons que la propriété de connexité par arcs.

Théorème 41. *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, que f et g sont analytiques sur Ω, et que l'ensemble $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ possède un point d'accumulation dans Ω, alors $f = g$.*

Autrement dit, sur un ouvert "d'un seul morceau", deux fonctions analytiques doivent, soit coïncider partout, soit être égales seulement en des points isolés.

Corollaire : si f est analytique sur un ouvert Ω, non identiquement nulle, et K compact dans Ω, alors $f^{-1}\{0\} \cap K$ est un ensemble fini.

Autre application : si deux fonctions sont analytiques sur un ouvert connexe qui intersecte la droite réelle, toute relation algébrique entre ces fonctions valide pour cette portion de la droite réelle demeurera valide sur tout l'ouvert. On étend ainsi les identités trigonométriques habituelles, par exemple.

Démonstration. La fonction $f - g$ est analytique sur Ω, donc il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $g = 0$.

De plus, $f^{-1}\{0\}$ n'admet pas de point d'accumulation sauf si f est localement identiquement nulle : en effet, si $a \in \Omega$ est limite de points de $f^{-1}\{0\} \setminus \{a\}$, alors comme f est continue, $f(a) = 0$, et d'après le théorème 39, il existe $r > 0$ tel que f s'annule sur $D(a, r)$.

Soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) \neq 0$.

Supposons qu'il existe $b \in A$ et $r_0 > 0$ tels que $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(b, r_0)$.

Considérons une courbe γ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On considère l'ensemble de tous les paramètres t tels que f soit nulle dans tout un disque autour du point $\gamma(t)$:

$$E := \{t \in [0, 1] : \exists r > 0 : \forall z \in D(\gamma(t), r), f(z) = 0\}.$$

Nous venons de voir que $0 \notin E$ et $1 \in E$. Donc $E \neq \emptyset$.

On pose $T := \inf E \in]0, 1[$. Si $T \notin E$, alors si $f(\gamma(T)) \neq 0$, par continuité, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $z \in D(\gamma(T), r_0)$, $f(z) \neq 0$; et si $f(\gamma(T)) = 0$, d'après le théorème des zéros isolés, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $z \in D(\gamma(T), r_0) \setminus \{\gamma(T)\}$, nous avons $f(z) \neq 0$. Par continuité de γ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $T < t < T + \varepsilon$, $\gamma(t) \in D(\gamma(T), r_0)$, et donc $t \notin E$. Mais alors $\inf E \geq T + \varepsilon$, contradiction.

Mais si $T \in E$, alors f s'annule sur un disque $D(\gamma(T), r_1)$ et par continuité de γ, il existe $\varepsilon \in]0, T[$ tel que pour $T - \varepsilon < t < T$, $\gamma(t) \in D(\gamma(T), r_1)$. Alors f s'annule sur un disque de rayon $r_1 - |\gamma(t) - \gamma(T)|$ autour de $\gamma(t)$, et donc $t \in E$, $t < T$, ce qui contredit le fait que $T = \inf E$. Donc il ne peut pas exister de tel point b, et tous les (éventuels) zéros de f sont isolés. □

6.3. **Exemple d'application : un logarithme complexe.**

Proposition 42. *La détermination principale du logarithme complexe admet le développement en série suivant sur le disque $D(1, 1)$: pour $|h| < 1$,*

$$\mathrm{Log}\,(1 + h) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{h^k}{k}.$$

Démonstration. On pourrait le faire par un calcul explicite, assez laborieux. Nous allons le faire à l'aide du théorème du Prolongement Analytique, en admettant que notre inverse local est effectivement analytique (ce que nous avons admis en Section 1).

Les deux côtés de l'égalité définissent des fonctions analytiques sur $D(1,1)$, qui est connexe. Pour $x \in]-1,+1[$, les théorèmes sur la dérivation des fonctions inverses et fonctions composées nous donnent

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,$$

pour toute fonction log qui vérifie $e^{\log x} = x$, $x > 0$.

Le théorème sur la primitive de la limite d'une suite de fonctions qui converge uniformément, et le choix qui a été fait de poser $\operatorname{Log} 1 = 0$, montrent que

$$\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Comme les points de $]0,2[$ sont non-isolés, l'identité sera vraie sur tout $D(1,1)$. □

Exercice (facile) : trouver un développement en série entière autour de -1 d'un logarithme complexe. Quel sera son rayon de convergence ? Plus généralement, pouvez-vous le faire autour d'un $z_0 \neq 0$? Et quel rayon de convergence obtiendrez-vous ? Indication : $\exp(\operatorname{Log} z_0 + \operatorname{Log}(z/z_0)) = z$.

Plus difficile : quand ces développements coïncideront-ils sur l'intersection de leurs disques de convergence ?

7. Principe du module maximum

Théorème 43. *Soit Ω un ouvert connexe, f analytique sur Ω, alors si $|f|$ admet un maximum local, la fonction f est constante.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ un maximum local de $|f|$, c'est-à-dire qu'il existe r_0 tel que pour tout $z \in D(a, r_0)$, $|f(a)| \geq |f(z)|$. Alors $f(a) = |f(a)|e^{i\theta_0}$ et si on considère la fonction $g(z) := e^{-i\theta_0}f(z)$, on a pour tout z, $|g(z)| = |f(z)|$, et $g(a) = \operatorname{Re} g(a) = |g(a)|$.

Mais la fonction g vérifie la formule de la moyenne : $g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+re^{i\theta})d\theta$, pour tout $r \in [0, r_0[$. Donc en prenant la partie réelle des deux côtés,

$$\operatorname{Re} g(a) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+re^{i\theta})d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(a+re^{i\theta})d\theta,$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{Re} g(a) - \operatorname{Re} g(a+re^{i\theta})\right) d\theta = 0.$$

Or d'après la propriété de maximum local, $\operatorname{Re} g(a) = |g(a)| \geq \left|g(a+re^{i\theta})\right| \geq \operatorname{Re} g(a+re^{i\theta})$, donc l'intégrande est toujours positive, et comme l'intégrale est nulle, l'intégrande doit être identiquement nulle. Finalement, $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} g(a)$ pour tout $z \in D(a, r_0)$. Mais alors $g - g(a)$ est analytique et imaginaire pure, donc constante sur $D(a, r_0)$, donc nulle sur ce disque ; d'après le Théorème du Prolongement analytique, comme Ω est connexe, elle doit être identiquement nulle sur Ω, donc g est constante, donc f est constante. □

Remarque : on a démontré au passage que la même propriété est vérifiée par $\operatorname{Re} f$.

Corollaire 44. *Si Ω est un ouvert connexe borné, que f est analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors il existe $z_0 \in \partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |f|$.*

En effet, comme $\overline{\Omega}$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$, la fonction continue $|f|$ atteint son maximum dessus. Si ce maximum est atteint en un point a qui n'est pas sur $\partial\Omega$, alors c'est un maximum local (parce qu'il y a un disque $D(a, r) \subset \Omega$) et on peut appliquer le théorème, mais alors f est constante et son maximum est atteint partout, donc sur la frontière. Donc dans tous les cas il est atteint sur la frontière.