LES REPRÉSENTATIONS DE WEIL

MARC REVERSAT

Résumé. Nous donnons la construction des représentations de Weil.

Table des matières

1. La transformée de Fourier d'un caractère du second ordre. 4
1.1. Une relation remarquable. 7
1.2. Sur les automorphismes de $\mathbb{A}(V)$. 9
1.3. La transformée de Fourier. 12
2. Calculs de $\gamma(f)$. 13
2.1. une interprétation de $\gamma(f)$. 13
2.2. Les mesures duales et les fonctions Θ. 15
2.3. L'espace des fonctions Θ. 16
2.4. Construction de formes automorphes. 17
2.5. Quelques situations où $\gamma(f) = 1$. 18
2.6. Des exemples de calculs de $\gamma(f)$. 19
3. Des représentations de SL(2) et GL(2). 23
3.1. Représentation de G_+, lorsque K est une extension quadratique séparable de F ou bien lorsque $K = F \oplus F$. 27
3.2. Représentation de $\mathrm{GL}(2, F)$. 31
4. Appendice : La théorie du corps de classe local. 34
4.1. 34
4.2. 35
4.3. 36
Références 37

Soit F un corps local, désignons par (K, ι) l'un des couples suivant, où K est une F-algèbre et ι une involution de K,

– $K = F \oplus F$ et $(x, y)^\iota = (y, x)$,
– K est un extension séparable quadratique de F et ι est son F-endomorphisme non trivial,
– K est l'unique algèbre de quaternion sur F, c'est à dire que K est une algèbre centrale simple de centre F, et ι est la conjugaison,

Date: 17 octobre 2012.

– $K = M_2(F)$ et si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $x^\iota = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Il faut noter les propriétés suivantes de l'involution, pour tous x et y dans K

– $(x+y)^\iota = x^\iota + y^\iota$ et $(xy)^\iota = y^\iota x^\iota$,

– si $x \in F$ alors $x = x^\iota$,

– soient $\tau(x) = x + x^\iota$ et $\nu(x) = xx^\iota$, alors $\tau(x)$ et $\nu(x)$ sont dans F.

Soit $\psi = \psi_F$ un caractère non trivial de F et posons $\psi_K = \psi_F \circ \tau$, ce dernier est un caractère additif de K. L'accouplement $(x,y) \mapsto < x, y > := \psi_K(xy)$ permet d'identifier K et son dual.

l'application $f = \psi_F \circ \nu$ est un caractère du second degré de K (cf André Weil [8], ceci sera détaillé dans le paragraphe suivant) puisque l'on a pour tous x et y dans K

$$f(x+y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} =< x, y^\iota > \ .$$

Soit $\mathcal{S}(K)$ l'espace de Schwartz de K, muni de son unique mesure de Haar telle que pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(K)$ la transformée de Fourier $\hat{\Phi}(x) = \int_K \Phi(y)\psi_K(xy)dy$ vérifie

$$\Phi(0) = \int_K \hat{\Phi}(x)dx \ . \tag{1}$$

Expliquons cette assertion. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour toute partie C compacte de Ω, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour toute fonction f $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, à valeurs dans un espace vectoriel complexe de dimension finie fixé, soit

$$\rho_{\alpha,C}(f) = \max_{x \in C} ||D^\alpha f(x)|| \ ,$$

ceci définit une semi norme sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ de ces fonctions à supports compacts ; la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ est donnée par l'ensemble de ces semi-normes, c'est à dire que qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers f si et seulement si $\rho_{\alpha,C}(f_n - f)$ tend vers 0, pour tous α et C. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est complet. Une distribution sur Ω est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel), leur espace est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, il est muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications "biduales" qui, pour $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ fixé, à $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ associent $T(f)$; on peut montrer que cette topologie est celle de la convergence simple, que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est complet, non métrisable, et que le dual topologique de $\mathcal{D}'(\Omega)$ s'identifie à $\mathcal{D}(\Omega)$ (qui est donc réflexif). L'espace de Schwartz $S(\Omega)$ est formés des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à décroissances lentes à l'infini, c'est à dire des fonctions f définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, à valeurs dans un espace vectoriel complexe fixé de dimension finie, vérifiant : pour tous polynôme P sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\rho_{\alpha,C}(f) = \sup_{x \in \Omega} ||P(x)D^\alpha f(x)|| < \infty \ .$$

La topologie de $S(\Omega)$ est définie par l'ensemble de ces semi-normes, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $S(\Omega)$, lui-même l'est dans $L^1(\Omega)$ et dans $L^2(\Omega)$.

Les éléments du dual topologique $S'(\Omega)$ de $S(\Omega)$ s'appellent les distributions tempérées sur Ω.

Si maintenant Ω est un ouvert de F^n, où F est un corps local non archimédien, un espace vectoriel **complexe** de dimension finie étant fixé, les fonctions f à valeurs dans cet espace vectoriel, définies sur Ω, à supports compacts et localement constantes (c'est à dire en fait continues : le support de f est recouvert par une famille finie d'ouverts compacts sur chacun desquels f est constante) forment l'espace de Schwartz $S(\Omega)$.

Montrons (1) dans le cas archimédien. On peut supposer $\Omega = \mathbb{R}^d = \oplus_{1\leq j\leq d}\mathbb{R}e_j$, la dernière relation exprimant un choix de coordonnées $x_1, \cdots, x_d$. Montrons d'abord que les distributions T sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant $x_jT = 0$ pour tout j sont les multiples scalaires de la distribution δ de Dirac en zéro. Il est clair que $x_i\delta = 0$. Inversement, soit T une distribution vérifiant l'hypothèse. Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $g(0) = 1$, soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $f - f(0)g \in \sum_{1\leq j\leq d} x_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, donc $f - f(0)g = \sum_{1\leq j\leq d} x_jf_j$ avec $f_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$< T, f >=< T, (f-f(0)g)+f(0)g >=< T, \sum_{1\leq j\leq d} x_jf_j > +f(0) < T, g >$$

$$= \sum_{1\leq j\leq d} < x_jT, f_j > + < T, g > \delta(f) =< T, g > \delta(f)\ .$$

Étudions maintenant la distribution constante 1. On a pour tout j $\frac{\partial 1}{\partial x_j} = 0$. En effet, pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$< \frac{\partial 1}{\partial x_j}, f >= - < 1, \frac{\partial f}{\partial x_j} >= \int \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_d)dx_1 \cdots dx_d = 0\ .$$

On en déduit que $\widehat{1} = \lambda\delta$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En effet, pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$< \widehat{(\frac{\partial 1}{\partial x_j})}, f >=< \frac{\partial 1}{\partial x_j}, \widehat{f} >= - < 1, (\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}) = c < 1, \widehat{(x_jf)} >$$

où c est une constante non nulle ; finalement

$$0 = c < \widehat{1}, x_jf >= c < x_j\widehat{1}, f >\ .$$

Donc $\widehat{1} = \lambda\delta$, ensuite, prenant une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convenable, telle que $g(0) = 1$, des calculs précédents montrent que $\lambda =< \widehat{1}, g >$ est un réel non nul positif. On a pour $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\lambda\Phi(0) =< \widehat{1}, \Phi >=< 1, \widehat{\Phi} >\ ,$$

d'où le choix de la mesure de Haar.

Le cas non archimédien : A VENIR.

1. La transformée de Fourier d'un caractère du second ordre.

Ce paragraphe est entièrement dû à A. Weil ([8]). Dans ce qui suit V a le sens de K au dessus, il peut être aussi plus généralement un espace de dimension finie $V = V_F$ sur un corps F qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou encore un corps localement compact valué non discrètement ; il peut-être aussi de la forme $V = V_F \otimes_F \mathbb{A}_F$ où cette fois F est un corps global de toute caractéristique, V_F un espace vectoriel sur F de dimension finie et $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F. On désignera les espaces du type de V sous le terme de groupe abélien localement compact, on n'utilisera en effet que leurs structures de groupes additifs. On désigne par $\mathbb{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1, un caractère de V est un morphisme continu $\psi : K \to \mathbb{T}$. Une application continue $f : K \to \mathbb{T}$ est appelée un *caractère du second degré de* V si l'application

$$(x, y) \mapsto f(x+y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$$

est un bicaractère, c'est à dire si fixant une variable elle est toujours pour l'autre un caractère de K. On désigne par V^* le dual de V, son opération étant elle aussi notée additivement. On identifie V et son bidual de telle sorte que pour tous $x \in V$ et $x^* \in V^*$ l'on ait $< x, x^* >=< x^*, x >$. Pour tout caractère du second degré f de V il existe un morphisme $\rho = \rho(f) : V \to V^*$ tel que

$$f(x+y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} =< x, \rho(y) >$$

et il est clair que le morphisme ρ est symétrique, c'est à dire égal à son dual. On s'intéressera au cas où ρ est un isomorphisme, auquel cas on dit que le caractère du second degré est non dégénéré.

Une mesure de Haar étant choisie sur V, étant donnée une fonction $\Phi : V \to \mathbb{C}$, par exemple continue à support compact, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{\phi} : V^* \to \mathbb{C}$ par

$$\widehat{\phi}(x^*) = \int_V \Phi(x) < x, x^* > dx \ ,$$

définition que l'on étendra à des classes plus vastes de fonctions chaque fois que cela sera possible. Il y a sur V^* une mesure de Haar et une seule telle que l'inverse de la transformation de Fourier soit donné par

$$\Phi(x) = \int_{V^*} \widehat{\phi}(x^*) < x, -x^* > dx^* \ ,$$

cette mesure vérifie en particulier $\Phi(0) = \int_{V^*} \widehat{\phi}(x^*)dx^*$, ce qui nous ramène aux considérations précédant ce paragraphe.

Soient V et U deux groupes abéliens localement compacts munis de mesures de Haar, soit α un isomorphisme de V sur U, la formule $F \mapsto \int_V F(\alpha(x))dx$, pour tout $F \in L^1(U)$, définit une mesure de Haar sur U, d'où l'existence d'une constante, notée $|\alpha|$, telle que

$$\int_U F(y)dy = |\alpha| \int_V F(\alpha(x))dx \ . \tag{2}$$

Si V^* et U^* sont munis des mesures de Haar duales, alors $|\alpha| = |\alpha^*|$ (ceci vient du fait que la mesure duale de $|\alpha|dy$ est $|\alpha|^{-1}dy^*$). Si $V = U$ et si $dx = dy$ alors $|\alpha|$ ne dépend pas du choix de la mesure de Haar dx.

Soit σ un automorphisme de $V \times V^*$, on écrit $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ de telle manière que l'image de $z = (x, x^*)$ soit

$$(x, x^*) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^* \end{pmatrix} = (\alpha(x) + \gamma(x^*), \beta(x) + \delta(x^*)) \ ,$$

où α, β, γ et δ désignent respectivement des morphismes de V dans lui-même, de V dans V^*, de V^* dans V et de V^* dans lui-même. On peut remarquer que l'on a la formule

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

Soit $\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, posons $\check{\sigma} = \eta\sigma^*\eta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^* & -\gamma^* \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$; $\sigma \mapsto \check{\sigma}$ est un anti-automorphisme involutif du groupe des automorphismes de $V \times V^*$ qui vérifie $|\sigma| = |\check{\sigma}|$. On dit qu'un automorphisme σ de $V \times V^*$ est symplectique si $\sigma\check{\sigma} = 1$

Soit F le bicaractère de $(V \times V^*) \times (V \times V^*)$ ainsi défini : pour tous $w_1 = (u_1, u_1^*)$ et $w_2 = (u_2, u_2^*)$, $F(w_1, w_2) =< u_1, u_2^* >$.

Pour tout $w = (u, u^*) \in V \times V^*$ soit $U(w)$ l'endomorphisme de $L^2(V)$ défini par la formule, $\Phi \in L^2(V)$,

$$U(w)\phi(x) = \Phi(x + u) < x, u^* > \ ,$$

les $U(w)$ sont unitaires et l'on a pour tous w_1, w_2 dans $V \times V^*$

$$U(w_1)U(w_2) = F(w_1, w_2)U(w_1 + w_2) \ ,$$

donc les $tU(w)$, $t \in \mathbb{T}$ et $w \in V \times V^*$ forment un groupe d'automorphismes de $L^2(V)$, topologique pour la topologie forte, noté $\mathbb{A}(V)$. Ce groupe est isomorphe au groupe $A(V)$ dont l'ensemble sous-jacent est $V \times V^* \times \mathbb{T}$ et la loi suit la formule

$$(w_1, t_1)(w_2, t_2) = (w_1 + w_2, F(w_1, w_2)t_1t_2)$$

(il s'agit donc du produit fibré $(V \times V^*) \propto \mathbb{T}$ pour le morphisme $V \times V^* \to \mathrm{Aut}\mathbb{T}$ qui à (w_1, w_2) associe la multiplication par $F(w_1, w_2)$). Cet isomorphisme est topologique lorsque l'on munit $A(V)$ de la topologie produit.

Soit $B(V)$ le groupe des automorphismes de $A(V)$; un automorphisme de $\mathbb{T}$ est l'identité ou bien la conjugaison, ceci autorise à définir

$B_0(V)$, le sous-groupe de $B(V)$ de ses éléments qui sont l'identité sur $\mathbb{T}$. Soit $s \in B_0(V)$, on écrit pour tout $(w,t) \in A(V)$

$$s(w,t) = (\sigma(w), f(w)t)$$

et l'on constate que σ est un automorphisme de $V \times V^*$, que les $f(w)$ sont dans $\mathbb{T}$ et vérifient la relation suivante

$$(3) \qquad f(w_1 + w_2)f(w_1)^{-1}f(w_2)^{-1} = F(\sigma(w_1), \sigma(w_2))F(w_1, w_2)^{-1} \ ,$$

cette dernière relation étant nécessaire et suffisante pour que σ et f définissent un élément de $B_0(V)$ selon la formule donnée au dessus. On voit que f est un caractère du second degré de $V \times V^*$, de plus, à cause de la symétrie entre w_1 et w_2 dans la formule précédente, on voit que σ est symplectique. Pour tout élément s de $B_0(V)$ on écrira suivant les considérations précédentes $s = (\sigma, f)$, la loi de groupe de $B_0(V)$ est alors donnée par

$$(\sigma_1, f_1)(\sigma_2, f_2) = (\sigma_1\sigma_2, f_3) \text{ avec } f_3 \text{ défini par } f_3(w) = f_1(\sigma_2(w))f_2(w) \, .$$

L'application $s \mapsto \sigma$ est un homomorphisme de $A(V)$ dans le groupe de automorphismes symplectique de V, son noyau est l'ensemble des $(1, f)$ où f est un bicaractère sur $V \times V^*$, donc de la forme

$$f(u, u^*) =< u, a^* >< a, u^* >$$

pour certains éléments a et a^* de V et V^* respectivement. Un calcul montre que cet automorphisme $(1, f)$ de $A(V)$ est en fait l'automorphisme intérieur associé à $((a, -a^*), 1)$ (rappelons que l'automorphisme intérieur attaché à (w_0, t_0) est $(w,t) \mapsto (w_0,t_0)(w,t)(w_0,t_0)^{-1}$, que $(w_0,t_0)^{-1} = (-w_0, F(w_0, -w_0)t_0^{-1})$). Le noyau de $s \mapsto \sigma$ est donc formé par les automorphismes intérieurs de $A(V)$, comme le centre de $A(V)$ est $\{0\} \times \mathbb{T}$, ce noyau est isomorphe à $A(V)/(\{0\} \times \mathbb{T}) \simeq V \times V^*$.

1.0.1. *Le plongement de $Sp(V)$.* Précisons la formule (3). Considérons l'application σ sous sa forme matricielle $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, et posons

$$f'(u, u^*) = f(u, u^*) < \gamma u^*, -\beta u > \ ,$$

alors la formule (3) devient (ne pas oublier que σ est symplectique)

$$f'(u_1 + u_2, u_1^* + u_2^*) = f'(u_1, u_1^*)f'(u_2, u_2^*) < u_1, \alpha^*\beta u_2 >< \delta^*\gamma u_1^*, u_2^* > \ .$$

Soient $g(u) = f'(u, 0)$ et $h(u^*) = f'(0, u^*)$, en faisant $u_2 = 0$ et $u_1^* = 0$ dans la formule précédente on voit que $f'(u, u^*) = g(u)h(u^*)$ et que g et h sont des caractères du second degré de V et V^* respectivement, plus précisément

$$g(u_1 + u_2) = g(u_1)g(u_2) < u_1, \alpha^*\beta u_2 > \ , \ h(u_1^* + u_2^*) = h(u_1^*)h(u_2^*) < \delta^*\gamma u_1^*, u_2^* > \ .$$

On a

$$f(u, u^*) = g(u)h(u^*) < \gamma u^*, \beta u > \ .$$

Lorsque $x \mapsto 2X$ est un automorphisme de V il est facile de montrer qu'étant donné un morphisme symétrique $\rho : V \to V^*$, il est associé au caractère du second degré $f_\rho(x) =< x, 2^{-1}\rho(x) >$, par suite tout automorphisme symplectique σ donne un élément (σ, f) de $B_0(V)$ en choisissant

$$g(u) =< u, 2^{-1}\alpha^*\beta u > \quad , \quad h(u^*) =< 2^{-1}\delta^*\gamma u^*, u^* > ,$$

donc

$$f(u, u^*) =< u, 2^{-1}\alpha^*\beta u >< 2^{-1}\delta^*\gamma u^*, u^* >< \gamma u^*, \beta u > \quad . \tag{4}$$

Ainsi, toujours lorsque $x \mapsto 2X$ est un automorphisme de V, ces dernières formules définissent un morphisme injectif du groupe $Sp(V)$ des automorphismes symplectiques de $V \times V^*$ dans $B_0(V)$; ce dernier est le produit semi-direct de l'image de $Sp(V)$ et du groupe des automorphismes intérieurs de $A(V)$; $B_0(V)$ est donc isomorphe à un produit semi-direct de $Sp(V)$ par $V \times V^*$.

1.1. **Une relation remarquable.** Soit $s = (\sigma, f) \in B_0(V)$ et écrivons σ sous forme matricielle, $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$.

Supposons $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. Comme σ est symplectique on a alors $\delta = \alpha^{*-1}$ et l'on voit que $(\sigma, 1)$ est dans $B_0(V)$. Pour tout automorphisme α de V soit

$$d_0(\alpha) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}, 1 \right) \in B_0(V) \ .$$

Soient maintenant $\alpha = 0$ et $\delta = 0$, comme précédemment on voit que β et γ sont des isomorphismes, que l'on a $\beta = -\gamma^{*-1}$ et que l'on peut choisir f vérifiant $f(u, u^*) =< u, -u^* >$. On pose, pour tout isomorphisme γ de V^* sur V

$$d_0'(\gamma) = \left(\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{*-1} & 0 \end{pmatrix}, < u, -u^* > \right) \in B_0(V) \ .$$

Si l'on suppose que $\alpha = 1$, $\delta = 1$ et $\gamma = 0$, alors on a $\beta = \beta^*$ et l'on voit que l'on peut prendre pour f un caractère du second degré associé à β (c'est à dire que $f(u, u^*) = f(u)$ est un caractère du second degré de V). Ainsi on pose chaque fois que f est un caractère du second degré de V associé au morphisme ρ symétrique

$$t_0(f) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, f \right) \in B_0(V) \ .$$

De même si f' est un caractère du second degré de V^* associé au morphisme symétrique ρ' de V^* dans V, on écrit

$$t_0'(f') = \left(\begin{pmatrix} 1 & \rho' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f' \right) \in B_0(V) \ .$$

Il faut remarquer, qu'avec les notations et hypothèses précédentes, on a les formules

$$d_0(\alpha)^{-1}t_0(f)d_0(\alpha) = t_0(f\alpha) \ , \ d_0(\alpha)t'_0(f')d_0(\alpha)^{-1} = t_0(f'\alpha^*) \ ,$$

$$d'_0(\alpha\gamma) = d_0(\alpha)d'_0(\gamma) \ , \ d'_0(\gamma\alpha^{*-1}) = d'_0(\gamma)d_0(\alpha) \ .$$

Si $s = (\sigma, f) \in B_0(V)$ avec $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ posons $\gamma(s) = \gamma$ et désignons par $\Omega_0(V)$ l'ensemble des éléments s de $B_0(V)$ tels que $\gamma(s)$ soit un isomorphisme de V^* sur V (il peut se faire que ceci soit vide).

Proposition 1.1. *Tout élément s de $\Omega_0(V)$ s'écrit de manière unique*

$$s = t_0(f_1)d'_0(\gamma)t_0(f_2)$$

où γ est un isomorphisme de V^* sur V, où f_1 et f_2 sont des caractères du second degré de V.

Démonstration. Si s est donné par la formule de la proposition on voit que $\gamma = \gamma(s)$. Si $s = (\sigma, f)$ est dans $\Omega(V)$ on vérifie que l'on a la décomposition voulue pour $f_1(u) = f(0, \gamma^{-1}(u))$ et $f_2(u) = f(u, -\rho_2(u))$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} \gamma\rho_2 & \gamma \\ \rho_1\gamma\rho_2 - \gamma^{*-1} & \rho_1\gamma \end{pmatrix} \ .$$

On vérifie que f_1 et f_2 donnés par les formules précédentes sont des caractères du second degré de V associés respectivement à $\rho_1$et ρ_2. On vérifie aussi que si $\left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, f\right)$ est un élément de $B_0(V)$, alors β est déterminé par les autres données. □

Soit f un caractère du second degré de G non dégénéré, c'est à dire que le morphisme ρ associé est un isomorphisme de V sur V^*, alors $f'(u^*) := f(-\rho^{-1}(u^*))$ définit un caractère du second degré f' de V^*, associé au morphisme ρ^{-1} de V^* sur V et la proposition 1.1 appliquée à $t'_0(f')$ donne, où $f^-(u) = f(-u)$

$$t'_0(f') = t_0(f^-)d'_0(\rho^{-1})t_0(f) \ ,$$

combiné avec les relations issues de calculs simples (ne pas oublier que $f(-u) = f(u)^{-1} < u, \rho(u) >$ et en plus ici que $\rho^* = \rho$)

$$t'_0(f') = d'_0(-\rho^{-1})t_0(f^{-1})d'_0(\rho^{-1}) \text{ et } d'_0(\rho^{-1})^2 = d_0(-1)$$

il vient

$$t_0(f^-)d'_0(\rho^{-1})t_0(f)d'_0(-\rho^{-1}) = d'_0(-\rho^{-1})t_0(f^{-1}) \ , \tag{5}$$

qui est la relation attendue.

1.2. **Sur les automorphismes de $\mathbb{A}(V)$.** Pour toute fonction Φ sur $V \times V^*$ continue et à support compact (ou encore quand c'est possible, de Schwartz, ou dans $L^2(V)$...) on pose

$$(U(\varphi)\Phi)(x) = \int_{V\times V^*} (U(w)\Phi)(x)\varphi(w)dw = \int_{V\times V^*} \Phi(x+u) < x, u^* > \varphi(u, u^*)dudu^* ,$$

ou φ est une fonction définie sur $V \times V^*$ convenable, par exemple elle aussi continue et à support compact ; ceci définit l'opérateur $U(\varphi) = \int U(w)\varphi(w)dw$, qui agit sur l'espace des fonctions Φ. On peut écrire aussi

$$U(\varphi)\Phi(x) = \int K(x, y)\Phi(y)dy$$

avec

$$K(x, y) = K(\varphi)(x, y) = \int \varphi(y - x, u^*) < x, u^* > du^*$$

ou encore

$$K(x, x + u) = \int \varphi(u, u^*) < x, u^* > du^* ;$$

regardant $\varphi(u, u^*)$ pour u fixé comme une fonction de u^* et appliquant la transformée de Fourier inverse on obtient dans le domaine de validité de cette dernière

$$\varphi(u, u^*) = \int K(x, x + u) < x, -u^* > dx$$

avec, suivant la formule de Plancherel

$$\int |K(x, y)|^2 dxdy = \int |\varphi(u, u^*)|^2 dudu^* ,$$

ainsi la correspondance entre les fonction φ sur $V \times V^*$ et les fonctions K définies sur $V \times V$ se prolonge par continuité en un isomorphisme W de $L^2(V \times V^*)$ sur $L^2(V \times V)$.

Lorsque la fonction K est de la forme $K(x, y) = P(x)Q(y)$, on écrit $K = P \otimes Q$ et si P et Q sont dans $L^2(G)$ on définit

$$(P, Q) = \int P(x)\overline{Q(x)}dx$$

et l'on voit immédiatement que l'on a la relation

$$W^{-1}(P \otimes \overline{Q})(w) = (P, U(w)Q) .$$

Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions sur $V \times V^*$ par exemple continues et à supports compacts, on voit que si l'on écrit $U(\varphi_1)U(\varphi_2) = U(\varphi_3)$, on a

$$\varphi_3(w) = \int \varphi_1(w - w_1)\varphi_2(w_1)F(w - w_1, w_1)dw_1 ,$$

ou encore, si l'on pose $K_i = K(\varphi_i)$, on a

$$K_3(x, y) = \int K_1(x, z)K_2(z, y)dz ,$$

que l'on écrira $K_3 = K_1 \times K_2$. Ces formules se prolongent par continuité aux espaces L^2.

Lemme 1.2. *Soit $K \in L^2(V \times V)$, pour que K soit de la forme $K = P \otimes Q$ avec P et Q dans $L^2(V)$ il faut et il suffit pour tout $K' \in L^2(V \times V)$ l'on ait $K \times K' \times K \in \mathbb{C}K$. Soient $K = P \otimes Q$ et $K' = P' \otimes Q'$ avec P, Q, P' et Q' dans $L^2(V)$, pour que P et P' (resp. Q et Q') soient égaux à une constante multiplicative près il faut et il suffit que pour tout $K'' = P'' \otimes Q''$ avec P'' et Q'' dans $L^2(V)$, $K \times K''$ et $K' \times K''$ (resp. $K'' \times K$ et $K'' \times K'$) soient égaux à une constante multiplicative près.*

Démonstration. La condition énoncée dans la première partie du lemme est clairement nécessaire, on voit qu'elle est suffisante en l'appliquant à $K' = P' \otimes Q'$. La formule

$$(P \otimes Q) \times (P' \otimes Q')(x,y) = (\int Q(z)P'(z)dz)(P \otimes Q')(x,y)$$

permet de tout montrer. □

Lemme 1.3. *Soit $K \mapsto K^s$ un automorphisme de l'espace hilbertien $L^2(V \times V)$, respectant la loi $(K_1, K_2) \mapsto K_1 \times K_2$, alors il existe un automorphisme $(\ )^t$ de $L^2(V)$ tel que pour tous P et Q dans $L^2(V)$ l'on ait $(P \otimes Q)^s = P^t \otimes Q^{\bar{t}}$ où l'application $(\ )^{\bar{t}}$ est définie par $\overline{Q}^{\bar{t}} = \overline{Q^t}$.*

Démonstration. Avec le lemme 1.2 on voit que $(P \otimes Q)^s$ est de la forme $P' \otimes Q'$. Soit $P_0 \in L^2(V)$ tel que $||P_0|| = 1$, on peut écrire $(P_0 \otimes \overline{P_0})^s = P'_0 \otimes Q'_0$ avec, puisque $(\ )^s$ conserve la norme, $||P'_0|| = ||Q'_0|| = 1$. La deuxième partie du lemme 1.2 montre alors que $(P \otimes \overline{P_0})^s$ et $(P_0 \otimes Q)^s$ se mettent de manière unique respectivement sous les formes $P' \otimes Q'_0$ et $P'_0 \otimes Q'$. On pose $P' = P^t$, $Q' = Q^u$ et l'on voit que $(\ )^t$ et $(\ )^u$ sont des applications linéaires de $L^2(V)$ dans lui-même telles que $P'_0 = P_0^t$, $Q'_0 = \overline{P}^u$, donc, puisque $(\ )^s$ conserve la norme de $L^2(V \times V)$, il en est de même de $(\ )^t$ et $(\ )^u$ dans $L^2(V)$.

De la formule $P \otimes Q = (P \otimes \overline{P_0}) \times (P_0 \otimes Q)$il suit $(P \otimes Q)^s = (P'_0, \overline{Q'_0}) P^t \otimes Q^u$; pour $P = P_0$ et $Q = Q_0$ il vient $(P'_0, \overline{Q'_0}) = 1$.

Donc $(P \otimes Q)^S = P^t \otimes Q^u$ pour tous P et Q. La formule $(P \otimes Q) \times (P \otimes Q) = (P, \overline{Q})(P \otimes Q)$ à laquelle on applique $(\ )^s$ et aussi utilisée pour P^t et Q^u, donne $(P, \overline{Q}) = (P^t, \overline{Q^u})$, d'où $u = \bar{t}$. Enfin, puisque s est inversible, on voit que $(\ )^t$ est inversible. □

Soit $s = (\sigma, f)$ un automorphisme de $A(V)$ dans $B_0(V)$, vu comme un automorphisme de $\mathbb{A}(V)$, la transformée de $U(w)$ par s est donc $U(w)^s = f(w)U(\sigma(w))$, d'où le morphisme de l'algèbre des opérateurs $U(\varphi)$

$$U(\varphi) \mapsto U(\varphi)^s = \int U(\sigma(w)) f(w) \varphi(w) dw \ ,$$

qui peut aussi s'écrire $U(\varphi)^s = U(\varphi^s)$ avec $\varphi^s(w) = f(\sigma^{-1}(w))\varphi(\sigma^{-1}(w))$ (ici il faut se souvenir que σ est symplectique, donc en particulier que $|\sigma| = 1$), et $\varphi \mapsto \varphi^s$ est un opérateur unitaire de $L^2(V \times V^*)$ respectant la loi de composition $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_3$.

Pour $K = W(\varphi)$ posons $K^s = W(\varphi^s)$, ceci définit une application de $L^2(V \times V)$ dans lui-même définie par la formule

$$W^{-1}(K^s) = (W^{-1}(K))^s$$

et vérifiant les hypothèses du lemme 1.3, par conséquent dont il suit l'existence d'un automorphisme $(\ )^t$ de $L^2(V)$ tel que $(P \otimes Q)^s = P^t \otimes Q^{\bar{t}}$. On écrit $P \mapsto \underline{s}^{-1}(P)$ au lieu de $P \mapsto P^t$. On a donc

$$(P, U(w)Q)^s = (W^{-1}(P \otimes \overline{Q}))^s(w) =$$

$$W^{-1}(\underline{s}^{-1}(P) \otimes \underline{s}^{-1}(\overline{Q})(w) = (\underline{s}^{-1}(P), U(w)\underline{s}^{-1}(Q)) \ ,$$

donc

$$(P, U(w)Q)^s = (\underline{s}^{-1}(P), U(w)\underline{s}^{-1}(Q)) = (P, \underline{s}U(w)\underline{s}^{-1}(Q)) \ ,$$

la dernière relation résulte du fait que $\underline{s}$ est unitaire. Par définition on a $\varphi(w) = (P, U(w)P) = W^{-1}(P \otimes Q)(w)$ donc

$$\varphi^s(w) = f(\sigma^{-1}(w))(P, U(\sigma^{-1}(w))Q)$$

dont il vient, en utilisant l'antilinéarité à droite de $(\ ,\ )$

$$(P, U(w)Q)^s = (P, f(\sigma^{-1}(w))^{-1}U(\sigma^{-1}(w))Q) \ .$$

Ces deux raisonnements conduisent à la formule

$$(P, \underline{s}U(w)\underline{s}^{-1}(Q)) = (P, f(\sigma^{-1}(w))^{-1}U(\sigma^{-1}(w))Q)$$

pour tous P et Q dans $L^2(V)$, donc $\underline{s}U(w)\underline{s}^{-1} = f(\sigma^{-1}(w))^{-1}U(\sigma^{-1}(w))$, qui donne pour $\sigma(w)$

$$\underline{s}^{-1}U(w)\underline{s} = f(w)U(\sigma(w)) \ , \tag{6}$$

c'est à dire que l'automorphisme intérieur déterminé par $\underline{s}$ dans le groupe unitaire induit $(\ )^s$ sur $A(V)$. Réciproquement, $(\ )^s$ étant donné, la relation précédente détermine $\underline{s}$ modulo un élément du centralisateur de $\mathbb{A}(V)$.

Déterminons ce centralisateur. Un opérateur linéaire permutable avec les $U(w)$ l'est avec tous les $U(\varphi)$, donc avec les opérateurs de la forme

$$\Phi \mapsto (x \mapsto \int K(x,y)\Phi(y)dy)$$

quel que soit $K \in L^2(V \times V)$, en particulier si $K = P \otimes \overline{Q}$, auquel cas on est avec l'opérateur $\Phi \mapsto (\Phi, Q)P$, qui donc est permutable avec $(\ )^t$, c'est à dire que l'on a $(\Phi, Q)P^t = (\Phi^t, Q)P$ pour tous Φ, P et Q dans $L^2(V)$; on voit que $(\ )^t$ est la multiplication par un scalaire, de $\mathbb{T}$ puisque cet opérateur est unitaire.Le centralisateur de $\mathbb{A}(V)$ est donc $\mathbb{T}$, dont les éléments sont vus comme les opérateurs "multiplications par des scalaires". On remarque aussi que l'application $\underline{s} \mapsto (s, f)$ juste mise en évidence, de $\mathbb{B}_0(V)$ sur $B_0(V)$, est un morphisme de groupes pour $B_0(V)$ muni de la loi symétrique $(s_1, s_2) \mapsto s_2 s_1$; on désigne par $B_0(V)^\circ$ ce dernier groupe. On a prouvé

Théorème 1.4. *Le centralisateur de $\mathbb{A}(V)$ dans le le groupe $\mathbb{U}$ des automorphismes de $L^2(V)$ est le centre $\mathbb{T}$ de ces deux groupes. Si $\mathbb{B}_0(V)$ désigne le normalisateur de $\mathbb{A}(V)$ dans $\mathbb{U}$, tout automorphisme de $\mathbb{A}(V)$ induisant l'identité sur $\mathbb{T}$ provient d'un automorphisme intérieur déterminé par un élément de $\mathbb{B}_0(V)$ et $\mathbb{B}_0(V)/\mathbb{T} \simeq B_0(V)^\circ$.*

1.3. **La transformée de Fourier.** Soit $\pi_0 : \mathbb{B}_0(V) \to B_0(V)^\circ$ le morphisme $\underline{s} \mapsto (s, f)$. Soient α un automorphisme de V, f un caractère du second degré de V, γ un isomorphisme de V^* sur V, on pose pour toute fonction Φ, définie sur V et au moins continue et à support compact, souvent dans $L^2(V)$,

$$\underline{d}_0(\alpha)\Phi(x) = \mid \alpha \mid^{1/2} \Phi(\alpha(x)) \ , \ \underline{t}_0(f)\Phi(x) = \Phi(x)f(x) \ ,$$

$$\underline{d'}_0(\gamma)\Phi(x) = \mid \gamma \mid^{-1/2} \widehat{\Phi}(-\gamma^{*-1}(x)) \ ,$$

ce sont des relèvements à $\mathbb{B}_0(V)$ des éléments $d_0(\alpha)$, $t_0(f)$ et $d'_0(\gamma)$ de $B_0(V)$ (cf formule 6). On voit directement par le calcul que

$$\underline{d}_0(\alpha)^{-1}\underline{t}_0(f)\underline{d}_0(\alpha) = \underline{t}_0(f\alpha^{-1}) \ , \ \underline{d'}_0(\alpha\gamma) = \underline{d'}_0(\gamma)\underline{d}_0(\alpha) \ ,$$

$$\underline{d'}_0(\gamma\alpha^{*-1}) = \underline{d}_0(\alpha)\underline{d'}_0(\gamma) \ .$$

Soit $s \in \Omega_0(V)$, on sait que s s'écrit de manière unique $s = t_0(f_1)d'_0(\gamma)t_0(f_2)$. On pose $r_0(s) = \underline{t_0}(f_2)\underline{d'_0}(\gamma)\underline{t_0}(f_1)$, qui donc relève s à $\mathbb{B}_0(V)^\circ$; en écrivant $s = (\sigma, f)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, on voit que

$$r_0(s)\Phi(x) = \mid \gamma \mid^{1/2} \int \Phi(\alpha(x) + \gamma(x^*))f(x, x^*)dx^* \ , \tag{7}$$

qui est valable pour tout x si $\Phi \in \mathcal{S}(V)$.

Maintenant on relève à $\mathbb{B}_0(V)$ les termes de la formule (5). Désignons par $\underline{s}$ et $\underline{s'}$ respectivement les membres de gauche et de droite de cette formule auxquels on a substitué $\underline{d}_0$, $\underline{d'}_0$ et $\underline{t}_0$ à la place de d_0, d'_0 et t_0. On a donc

$$\underline{s} = \underline{d}'_0(-\rho^{-1})\underline{t}_0(f)\underline{d}'_0(\rho^{-1})\underline{t}_0(f^-) \ \text{ et } \ \underline{s'} = \underline{t}_0(f^{-1})\underline{d}'_0(-\rho^{-1}) \ ,$$

par suite pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(V)$

$$\underline{s}\Phi(x) = \mid \rho \mid \widehat{(\Phi * f)}(\rho(x)) \ , \ \underline{s'}\Phi(x) = \mid \rho \mid^{1/2} \widehat{\Phi}(\rho(x))f(x)^{-1} \ ,$$

où ρ est associé au caractère du second degré f de V non dégénéré, les deux opérateurs sur $L^2(V)$ donnés par ces dernières formules étant unitaires. Comme $\pi_0(\underline{s}) = \pi_0(\underline{s'})$ (c'est la formule (5)), $\underline{s}$ et $\underline{s'}$ ne différent que d'une constante multiplicative dans $\mathbb{T}$. On pose donc

$$\underline{s} = \gamma(f)\underline{s'}$$

où $\gamma(f)$ est un nombre complexe de module 1. Par substitution de $\rho^{-1}(x^*)$ à x il vient alors

$$\widehat{(\Phi * f)} = \gamma(f) \mid \rho \mid^{-1/2} \widehat{\Phi}g$$

où g est le caractère du second degré de V^* associé à $-\rho^{-1}$, qui est donc défini par $g(x^*) = f(\rho^{-1}(x^*))^{-1}$. Cette dernière formule s'exprime en disant que $\gamma(f) \mid \rho \mid^{-1/2} g$ est la transformée de Fourier du caractère du second degré f.

Théorème 1.5. *Soient f un caractère non dégénéré du second degré de V et $\rho : V \xrightarrow{\sim} V^*$ associé. Alors f possède une transformée de Fourier donnée par la formule*

$$\widehat{f}(x^*) = \gamma(f) \mid \rho \mid^{-1/2} f(\rho^{-1}(x^*))^{-1}$$

où $\gamma(f) \in \mathbb{T}$.

Précisons que cette assertion a le sens suivant : l'application $\Phi \mapsto \Phi * f$, définie à priori sur l'espace des fonctions continues à supports compacts, se prolonge à tout $L^2(V)$, on a $\widehat{(\Phi * f)} = \widehat{\Phi}\widehat{f}$. Par transport de structure, dû à l'isomorphisme $\rho : V \xrightarrow{\sim} V^*$, on a la "formule inverse" $\widehat{(\Phi f)} = \widehat{\Phi} * \widehat{f}$ et cette dernière égalité est entre fonctions continues, donc elle a lieu partout (i.e. pas seulement dans L^2), par conséquent la formule précédente aussi (toujours par transport de structure). On a prouvé

Corollaire 1.6. *Les hypothèses et notations sont celles du théorème, soit $\phi \in \mathcal{S}(V)$, on a pour tout $x^* \in V^*$*

$$\int (\Phi * f)(x) < x, x^* > dx = \gamma(f) \mid \rho \mid^{-1/2} \widehat{\Phi}(x^*) f(\rho^{-1}(x^*))^{-1} \ .$$

2. Calculs de $\gamma(f)$.

2.1. **une interprétation de $\gamma(f)$.** Rappelons le relèvement $r_0 : \Omega_0(V) \to \mathbb{B}(V)$ défini par

$$r_0(s) = r_0(t_0(f_1)d_0'(\gamma)t_0(f_2)) = \underline{t_0}(f_2)\underline{d_0'}(\gamma)\underline{t_0}(f_1) \ ,$$

cf proposition 1.1. Soient trois éléments s, s' et $s'' = ss'$ de $\Omega_0(V)$, alors $r_0(s')r_0(s)$ et $r_0(s'')$ ont la même image dans $B_0(V)$, donc diffèrent d'un facteur multiplicatif $\lambda(s, s')$ de $\mathbb{T}$

$$r_0(s')r_0(s) = \lambda(s, s')r_0(s'') \ .$$

Le théorème suivant précise ces constantes $\lambda(s, s')$.

Théorème 2.1. *Soient $s = (\sigma, f)$, $s' = (\sigma', f')$ et $s'' = (\sigma'', f'')$ trois éléments de $B_0(V)$ tels que $s'' = ss'$ et, si l'on écrit*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \ , \ \sigma' = \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix} \ \text{et} \ \ \sigma'' = \begin{pmatrix} \alpha'' & \gamma'' \\ \beta'' & \delta'' \end{pmatrix} \ ,$$

que γ, γ' et γ'' soient des isomorphismes de V^* sur V. Alors la relation

$$f_0(u) = f(u, -\gamma^{-1}\alpha(u))f'(0, \gamma'^{-1}(u))$$

définit un caractère du second degré non dégénéré de V, dont l'isomorphisme symétrique $\rho_0 : V \to V^*$ est $\rho_0 = \gamma'^{-1}\gamma''\gamma^{-1}$ et l'on a

$$r_0(s')r_0(s) = \gamma(f_0)r_0(s'')$$

(cf théorème 1.5).

Démonstration. Ainsi l'on a

$$\underline{t_0}(f_2')\underline{d_0'}(\gamma')\underline{t_0}(f_1')\underline{t_0}(f_2)\underline{d_0'}(\gamma)\underline{t_0}(f_1) = \lambda(s,s')\underline{t_0}(f_2'')\underline{d_0'}(\gamma'')\underline{t_0}(f_1'') \ ;$$

on pose

$$f_0 = f_1'f_2 \ , \ f_3 = f_1''f_1^{-1} \ , \ f_4 = f_1'^{-1}f_2'' \ ,$$

la formule précédente s'écrit alors

$$\underline{d_0'}(\gamma')\underline{t_0}(f_0)\underline{d_0'}(\gamma) = \lambda(s,s')\underline{t_0}(f_4)\underline{d_0'}(\gamma'')\underline{t_0}(f_3) \ .$$

On applique les deux membres de cette égalité aux applications Φ continues et à supports compacts, il vient les fonctions $X_g\Phi$ et $X_d\Phi$ pour le membre de gauche et celui de droite. On a

$$X_g\Phi(x) = \mid \gamma \mid^{-\frac{1}{2}} \underline{d_0'}(\gamma')\Big(\widehat{\Phi}(-\gamma^{*-1}(x))f_0(x)\Big) \ ;$$

soient

$$\Psi(x) = \widehat{\Phi}(-\gamma^{*-1}(x)) \text{ et } \Psi_1(x)\widehat{\Phi}(-\gamma^{*-1}(x))f_0(x) \ ,$$

alors on peut écrire

$$X_g\Phi(x) = \mid \gamma \mid^{-\frac{1}{2}} \mid \gamma' \mid^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Psi_1}(-\gamma'^{*-1}(x)) \ ,$$

mais f_0 est un caractère du second degré de V associé au morphisme symétrique

$$\rho_0 := \rho_1' + \rho_2 = \delta'\gamma'^{-1} + \gamma^{-1}\alpha = \gamma^{-1}\gamma''\gamma'^{-1}$$

(cf proposition 1.1), c'est à dire que f_0 est un caractère du second degré non dégénéré, qui admet une transformée de Fourier donnée par le théorème 1.5. De $\widehat{\Psi_1} = \widehat{\Psi} * \widehat{f_0}$ il suit alors

$$\begin{aligned} X_g\Phi(x) &= \mid \gamma \mid^{-\frac{1}{2}} \mid \gamma' \mid^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Psi} * \widehat{f_0}(-\gamma'^{*-1}(x)) \\ &= \mid \gamma \mid^{-\frac{1}{2}} \mid \gamma' \mid^{-\frac{1}{2}} \int \widehat{\Psi}(u^*)\widehat{f_0}(-\gamma'^{*-1}(x) - u^*)du^* \ , \end{aligned}$$

mais $\widehat{\Psi}(u^*) = \int \widehat{\Phi}(-\gamma^{*-1}(x)) < x, u^* > dx$, qui avec le changement de variable $-\gamma^{*-1}(x) = v^*$ donne

$$\widehat{\Psi}(u^*) = \mid \gamma \mid \int \widehat{\Phi}(v^*) < \gamma(u^*), -v^* > dv^* = \mid \gamma \mid \Phi(\gamma(u^*)) \ ,$$

ainsi, avec le théorème 1.5, l'expression précédente de $X_g\Phi(x)$ devient

$$X_g\Phi(x) = \mid \gamma \mid^{\frac{1}{2}} \mid \gamma' \mid^{-\frac{1}{2}} \mid \rho_0 \mid \gamma(f_0) \int \Phi(\gamma(u^*))f_0(\rho_0^{-1}(-\gamma'^{-1}(x) - u^*))^{-1}du^*,$$

et l'expression donnée plus haut de ρ_0 avec le fait que ce morphisme soit symétrique (i.e. $\rho_0 = \rho_0^*$) conduit à la formule

$$X_g\Phi(x) = \mid \gamma \mid\mid \gamma'' \mid^{-\frac{1}{2}} \gamma(f_0) \int \Phi(\gamma(u^*))f_0(-\gamma^*\gamma''^{-1}(x) - \gamma'\gamma''^{-1}\gamma(u^*))^{-1}du^*$$

$$=\mid \gamma'' \mid^{-\frac{1}{2}} \gamma(f_0) \int \Phi(u) f_0(-\gamma^* \gamma''^{-1}(x) - \gamma' \gamma''^{-1}(u))^{-1} du \ .$$

On a aussi

$$X_d \Phi(x) = \lambda(s, s') \mid \gamma'' \mid^{-\frac{1}{2}} f_4(x) \int \Phi(u) f_3(u) < u, -\gamma''^{-1}(x) > du \ ,$$

par suite, de l'égalité $X_g \Phi = X_d \Phi$, vraie pour tout Φ, il résulte $\lambda(s, s') = \gamma(f_0)$; l'expression attendue de f_0 vient de la proposition 1.1. □

2.2. **Les mesures duales et les fonctions Θ.** Soit Γ un sous-groupe fermé de V et soit Γ_* le sous-groupe de V^* formé de ses éléments triviaux (c'est à dire égaux à 1) sur Γ. On a des identifications canoniques $\Gamma_* \simeq (V/\Gamma)^*$ et $V^*/\Gamma_* \simeq \Gamma^*$. Les morphismes $V \to V/\Gamma$ et $V^* \to V^*/\Gamma_*$ sont notés respectivement $x \mapsto \dot{x}$ et $x^* \mapsto \dot{x}^*$. On choisi des mesures de Haar $d\xi$ et $d\dot{x}$ sur respectivement Γ et V/Γ de telle manière que l'on ait $dx = d\xi d\dot{x}$, c'est à dire que pour toute fonction Φ de $L^1(V)$

$$\int_V \Phi(x) dx = \int_{V/\Gamma} \Big(\int_\Gamma \Phi(x + \xi) d\xi \Big) d\dot{x} \ . \tag{8}$$

En posant $\Phi_x(\xi) = \Phi(x + \xi)$ on voit tout de suite que

$$\| \Phi \|^2_{L^2(V)} = \int_{V/\Gamma} \| \Phi_x \|^2_{L^2(\Gamma)} d\dot{x} \ . \tag{9}$$

On a

$$\widehat{\Phi}(x^*) = \int_{V/\Gamma} \Big(\int_\Gamma \Phi(x + \xi) < \xi, x^* > d\xi \Big) < x, x^* > d\dot{x} \ , \tag{10}$$

d'où l'idée de poser

$$\Theta(x, x^*) = \int_\Gamma \Phi(x + \xi) < \xi, x^* > d\xi \tag{11}$$

ce qui conduit à la formule

$$\widehat{\Phi}(x^*) = \int_{V/\Gamma} \Theta(x, x^*) < x, x^* > d\dot{x} \ . \tag{12}$$

Pour simplifier les raisonnements on suppose maintenant que Φ est continue à support compact, alors Θ est continue. On vérifie que pour tous $\xi \in \Gamma$ et $\xi^* \in \Gamma_*$

$$\Theta(x + \xi, x^* + \xi^*) = \Theta(x, x^*) < \xi, -x^* > \ ,$$

ce qui s'écrit en posant $z = (x, x^*)$ et $\zeta = (\xi, \xi^*)$

$$\Theta(z + \zeta) = \Theta(z) F(\zeta, z)^{-1} \ , \tag{13}$$

cette dernière formule permet en particulier de définir sur V^*/Γ_* la fonction Θ_x par $\dot{x}^* \mapsto \Theta(x, x^*)$, alors la formule (11) s'interprète en disant que pour tout $x \in V$, Θ_x est la transformée de Fourier de Φ_x .

Sur $V^*/\Gamma_* \simeq \Gamma^*$ soit $d\dot{x}^*$ le mesure de Haar duale de $d\xi$ et soit $d\xi^*$ sur $\Gamma_* \simeq (V/\Gamma)^*$ celle duale de $d\dot{x}$. Soit

$$Q = (V \times V^*)/(\Gamma \times \Gamma^*) \simeq (V/\Gamma) \times (V^*/\Gamma^*) \ ,$$

que l'on munit de la mesure de Haar $d\dot{x}d\dot{x}^*$. On remarque aussi grâce à (13) que $\mid \Theta \mid$ est en fait définie sur Q.

Lemme 2.2. *La mesure dx^* sur V^* duale de la mesure dx sur V est $d\xi^* d\dot{x}^*$, c'est à dire que l'on a pour toute fonction $\Psi \in L^1(V^*)$*

$$\int_{V^*} \Psi(x^*)dx^* = \int_{V^*/\Gamma_*} \Big(\int_{\Gamma_*} \Psi(x^*+\xi^*)d\xi^*\Big)d\dot{x}^* \ .$$

Démonstration. On a vu que $\Theta_x = \widehat{\Phi_x}$, il en résulte avec le théorème de Plancherel que

$$\| \Theta_x \|_{(V^*/\Gamma_*),d\dot{x}^*} = \| \widehat{\Phi_x} \|_{(V^*/\Gamma_*),d\dot{x}^*} = \| \Phi_x \|_{\Gamma,d\xi} \ ,$$

par suite, en intégrant sur G/Γ

$$\| \Phi \|_{V,dx} = \| \Theta \|_{Q,d\dot{x}d\dot{x}^*} \ . \tag{14}$$

D'autre part, la formule (12) appliquée à $x^*+\xi^*$ à la place de x^* montre que la fonction $\xi^* \mapsto \widehat{\Phi}(x^*+\xi^*)$ est la transformée de Fourier de $\dot{x} \mapsto \Theta(x,x^*) < x, x^* >$ d'où grâce au théorème de Plancherel

$$\| \Phi(x,\cdot) \|_{\Gamma_*,d\dot{x}^*} = \| \Theta(\cdot,x^*) < \cdot, x^* > \|_{(V/\Gamma),d\dot{x}} \ ,$$

d'où en intégrant sur V^*/Γ_*

$$\| \Theta \|^2_{Q,d\dot{x}d\dot{x}^*} = \int_{V^*/\Gamma_*} \Big(\int_{\Gamma_*} \mid \widehat{\Phi}(x^*+\xi^*) \mid^2 d\xi^*\Big)d\dot{x}^* \ .$$

Le théorème de Plancherel et la formule (14) montrent alors que

$$\| \widehat{\Phi} \|^2_{V^*,dx^*} = \| \Phi \|^2_{V,dx} = \| \Theta \|^2_{Q,d\dot{x}d\dot{x}^*} = \int_{V^*/\Gamma_*} \Big(\int_{\Gamma_*} \mid \widehat{\Phi}(x^*+\xi^*) \mid^2 d\xi^*\Big)d\dot{x}^* \ ,$$

d'où le résultat attendu. □

2.3. **L'espace des fonctions Θ.** Soit $H(V,\Gamma)$ l'espace des fonctions Θ vérifiant (13), localement intégrables sur $V \times V^*$, telles que $\| \Theta \|_Q < \infty$, où $\| \Theta \|_Q = \| \Theta \|_{Q,d\dot{x}d\dot{x}^*}$ (cf la formule 14), cet espace étant muni de la norme $\| \cdot \|_Q$. La relation (11) montre que l'application $\Phi \mapsto \Theta$ est continue, conserve la norme, se prolonge par continuité en une application continue Z de $L^2(V)$ dans $H(V,\Gamma)$. Il faut noter qu'en général, pour $\Phi \in L^2(V)$ le second membre de (11) n'est pas défini.

Lemme 2.3. *L'application $Z : L^2(V) \to H(V,\Gamma)$ est un isomorphisme d'espaces normés (donc d'espaces de Hilbert). Si $\phi \in \mathcal{S}(V)$ alors $Z(\Phi)$ est continue.*

Démonstration. Soit $\Phi \in L^2(V) \cap L^1(V)$, alors (8) montre que $\dot{x} \mapsto \int_\Gamma \Phi(x+\xi)d\xi$ est définie sauf sur un ensemble négligeable N de V/Γ ; soit alors Θ la fonction définie par (11) si $\dot{x} \notin N$ et par 0 sinon, c'est une solution de (13) et Θ_x est la transformée de Φ_x lorsque $\dot{x} \notin N$ (cf (10) et (11)). La formule de Plancherel appliquée à ces fonctions et combinée avec (9) donne alors $\| \Phi \|^2_V = \| \Theta \|^2_Q$. Il reste à montrer que $\Theta = Z(\Phi)$. Soit Φ_n une suite de fonctions continues à supports compacts convergeant au sens de L^2 vers Φ. On voit comme précédemment que $\Phi - \Phi_n$ et $\Theta - Z(\Phi_n)$ ont la même norme, donc $\Theta = Z(\Phi)$.

Pour l'application réciproque on procès de manière voisine. Soit $\Theta \in H(V, \Gamma)$ tel que $\mid \Theta \mid$ soit intégrable sur Q, l'ensemble de ces fonctions est dense dans $H(V, \Gamma)$. Il existe une partie négligeable N de V/Γ telle que Θ_x soit dans $L^2(V^*/\Gamma_*) \cap L^1(V^*/\Gamma_*)$ lorsque $\dot{x} \notin N$. On modifie Θ en imposant $\Theta_x = 0$ si $\dot{x} \notin N$ et on définit Φ par

$$\Phi(x) = \int_{V^*/\Gamma_*} \Theta(x, x^*) dx^* \ . \tag{15}$$

Ceci définit une fonction localement intégrable et substituant $x + \xi$ à x dans cette dernière formule on voit que Φ_x est la transformée de Fourier de Θ_x, pour tout x. Le théorème de Plancherel avec (9) donne alors $\| \Phi \|_V^2 = \| \Theta \|_Q^2$ et pour finir, c'est à dire montrer que $\Theta = Z(\Phi)$, on considère de nouveau une suite Φ_n, etc.

Soit $\Phi \in \mathcal{S}(V)$, on voit qu'alors $x \mapsto \Phi_x$ est une application continue de V dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ et l'on voit que $Z(\Phi) = \Theta$ est continue en examinant la définition (11), qui ainsi que (15) est alors valable partout (non pas presque partout). $\square$

2.4. **Construction de formes automorphes.** Au moyen de l'isomorphisme Z on transporte de $L^2(V)$ à $H(V, \Gamma)$ les groupes d'opérateurs précédemment étudiés, sans en changer les notations le plus souvent. Par exemple $U(w)$ opérant sur $H(V, \Gamma)$ (i.e. $ZU(w)Z^{-1}$) s'écrit

$$U(w)\Theta(z) = \Theta(z + w)F(z, w) \ .$$

Soit $B_0(V, \Gamma)$ le sous-groupe des éléments $s = (\sigma, f)$ de $B_0(V)$ tels que $f \mid (\Gamma \times \Gamma_*) = 1$ et que σ induise un automorphisme de $\Gamma \times \Gamma_*$. Pour tout $s = (\sigma, f) \in B_0(V, \Gamma)$ et tout $\Theta \in H(V, \Gamma)$ on pose

$$r_\Gamma(s)\Theta(z) = \Theta(\sigma(z))f(z) \ , \tag{16}$$

et l'on voit facilement que $r_\Gamma(s)$ opère sur $H(V, \Gamma)$, que r_Γ est une morphisme de $B_0(V, \Gamma)$ dans le groupe $Z(\mathbb{U}^\circ)Z^{-1}$, que l'on peut encore écrire $\mathbb{U}^\circ$ suivant notre abus de notation, où $\mathbb{U}^\circ$ est le groupe des automorphismes unitaires de $L^2(V)$ muni de la loi inverse $(s_1, s_2) \mapsto s_2 s_1$. On voit aussi que pour tout $w \in V \times V^*$

$$U(w)r_\Gamma(s) = f(w)r_\Gamma(s)U(\sigma(w)) \tag{17}$$

donc $r_\Gamma(s) \in \mathbb{B}_0(V)$ et que la projection canonique de $r_\Gamma(s)$ sur $B_0(V)$ est s, c'est à dire que r_Γ est un relèvement de $B_0(V, \Gamma)$ à $\mathbb{B}_0(V)$, qui est en fait un morphisme de $B_0(V, \Gamma)$ dans $\mathbb{B}_0(V)^\circ$. On note $\mathbb{B}_0(V, \Gamma)$ l'image de r_Γ, et, en cohérence avec ce qui vient d'être fait, on note de même le groupe d'opérateurs sur $L^2(V)$ qui s'en déduit par transport de structure par Z.

Théorème 2.4. *Pour tout élément $\Phi \in \mathcal{S}(V)$ et tout $\underline{s} \in \mathbb{B}_0(V,\Gamma)$ on a*

$$\int_\Gamma \Phi(\xi)d\xi = \int_\Gamma \underline{s}\Phi(\xi)d\xi \ .$$

Démonstration. Si Φ est dans $\mathcal{S}(V)$ il en est de même de $\underline{s}\Phi$ et $\Theta = Z(\Phi)$, $\theta' = Z(\underline{s}\Phi)$ sont continues (ces assertions demandent des démonstrations) et pour ces fonctions la formule (11) est vraie point par point. On écrit $\underline{s} = r_\Gamma(s)$,, la formule (16) est vraie en tous points pour Θ et Θ' (à cause de la continuité), en particulier pour $z = 0$, où l'on voit que $\Theta(0) = \Theta'(0)$ qui avec (11) donne la formule cherchée. □

Corollaire 2.5. *Pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(V)$*

$$\underline{s} \mapsto F(\underline{s}) = \int_\Gamma \underline{s}\Phi(\xi)d\xi$$

défini une fonction sur $\mathbb{B}_0(V)$ invariante par translation à gauche par les éléments de $\mathbb{B}_0(V,\Gamma)$.

2.5. **Quelques situations où $\gamma(f) = 1$.** Soit $\Omega_0(V,\Gamma)$ l'ensemble des éléments $s = (\sigma, f)$ de $B_0(V,\Gamma)$ tel que $\gamma(s)$ soit un isomorphisme de G^* sur G et de Γ_* sur Γ (on sait déjà, par définition de $B_0(V,\Gamma)$, que $f \mid \Gamma \times \Gamma_* = 1$ et que σ induit un automorphisme de $\Gamma \times \Gamma_*$), on a $\Omega_0(V,\Gamma) \subset \Omega_0(V)$.

Lemme 2.6. *Les deux relèvements r_0 et r_Γ coïncident sur $\Omega_0(V,\Gamma)$.*

Démonstration. Soit $s = (\sigma, f) \in \Omega_0(V,\Gamma)$. Les formules (6) et (17) montrent que $r_0(s)$ et $r_\Gamma(s)$ ne diffèrent que par un élément du centralisateur de $\mathbb{A}(V)$ dans $\mathbb{U}$, c'est à dire par un facteur multiplicatif dans $\mathbb{T}$ (cf théorème 1.4, de plus ceci est vrai pour $s \in B_0(V,\Gamma)$). Par ailleurs la description des éléments de $\Omega_0(V)$ donnée dans la proposition 1.1 montre qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque $s = t_0(f)$ et $s = d'_0(\gamma)$.

On vérifie que par exemple pour ϕ continue à support compact et $\Theta = Z(\Phi)$ on a

$$Z(\underline{t_0}(f)\Phi)(x) = \int_\Gamma \Phi(x+\xi)f(x) < \xi, x^*+\rho(x) > d\xi = r_\Gamma(t_0(f))Z(\Phi)(x) \,,$$

car $f \mid \Gamma = 1$ et où $\rho : V \to V^*$ est associé au caractère du second degré f de V.

Pour certaines fonctions θ et $\Phi = Z^{-1}(\Theta)$, mais formant des parties denses des espaces considérés, la formule (15) est vraie, elle donne

$$Z^{-1}r_\Gamma(d_0(\gamma))\Theta(x) = \int_{V^*/\Gamma_*} \Theta(\gamma(x^*), -\gamma^{*-1}(x)) < x, x^* > dx^*$$

$$= c\int_{V/\Gamma} \Theta(u, -\gamma^{*-1}(x)) < x, -\gamma^{-1}(u) > d\dot{u}$$

où c est une constante strictement positive qui dépend de l'isomorphisme $V/\Gamma \simeq V^*/\Gamma_*$ induit par γ. Finalement, avec (11)

$$Z^{-1} r_\Gamma(d_0(\gamma)) Z\Phi(x) = c \int_{V/\Gamma} \int_\Gamma \Phi(u+\xi) < \xi, -\gamma^{*-1}(x) >< x, -\gamma^{-1}(u) > d\xi d\dot{u}$$

$$= c \int_V \phi(u) < u, -\gamma^{*-1}(x) > du = c\widehat{\Phi}(-\gamma^{*-1}(x)) \ ,$$

par conséquent l'égalité cherchée est vraie, à une constante multiplicative près c qui est positive et de module 1, c'est donc 1. □

Théorème 2.7. *Soit f un caractère du second degré de V égal à 1 sur un sous groupe fermé Γ de V, soit Γ_* le sous-groupe du groupe dual G^* de G formé des éléments de G^* triviaux sur Γ ; supposons que le morphisme symétrique $\rho : V \to V^*$ associé à f soit un isomorphisme et induise un isomorphisme de Γ sur Γ_* . Alors $\gamma(f) = 1$.*

Démonstration. Avec les hypothèses tous les éléments de la formule (5) sont dans $B_0(V, \Gamma)$, par suite leurs relèvements par r_0 et r_Γ coïncident, mais $\gamma(f)$ est un facteur multiplicatif qui mesure la différence entre ces relèvements, il suit $\gamma(f) = 1$ (cf la définition de $\gamma(f)$ donnée un peu avant le théorème 1.5). □

Corollaire 2.8. *Sur $V \times V^*$ soit f le caractère du second degré donné par $f(x, x^*) =< x, x^* >$.Alors f est non dégénéré et $\gamma(f) = 1$.*

Démonstration. En identifiant $(V \times V^*)^*$ avec $V^* \times V$ on voit que le morphisme ρ associé à f est $(x, x^*) \mapsto (x^*, x)$, qui est un isomorphisme, ce qui est la définition de f non dégénéré. Le corollaire s'obtient en posant $\mathcal{V} = V \times V^*$, $\mathcal{V}^* = V^* \times V$, $\Gamma = V \times \{0\}$ et $\Gamma_* = \{0\} \times V$. □

2.6. **Des exemples de calculs de $\gamma(f)$.** On reprend les définitions et notations du début de ce chapitre.

Proposition 2.9. *Soient F un corps local et K une algèbre du type précédent, munie de l'application $x \mapsto x^\iota$ possédant les propriétés énoncées au début de ce chapitre. On pose $\gamma = \gamma(f)$ où f est le caractère du second degré de K défini par $f(x) = \psi_F(\nu(x))$.*

(1) *Si $K = F \oplus F$ ou $K = M_2(F)$ alors $\gamma = 1$.*

(2) *Si $F = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ et $\psi_F(\ ) = e^{2i\pi a(\ )}$, alors $\gamma = ia/ \mid a \mid$.*

(3) *Si F est non archimédien et K en est une extension séparable de degré 2. Soit ω le caractère de $F^\times$ donné par la théorie du corps de classes local, soient ℓ le plus petit entier tel que $\wp_F^\ell \subset \ker \psi_F$ et $m \geq 0$ le plus petit entier positif ou nul tel que $1 + \wp_F^m \subset \ker \omega$ (avec la convention que $1 + \wp_F^0 = \mathcal{O}_F^\times$).*
   - *Si l'extension K/F est non ramifiée on a $m = 0$ et $\gamma = (-1)^\ell$.*

– *Si l'extension K/F est ramifiée on a $m \geq 1$ et $m = 1$ si elle l'est modérément ; on a*

$$\gamma = \frac{\sum_{z \in \mathcal{O}_F^\times/(1+\wp_F^m)} \omega(z)\psi_F(\varpi^{\ell-m}z)}{|\sum_{z \in \mathcal{O}_F^\times/(1+\wp_F^m)} \omega(z)\psi_F(\varpi^{\ell-m}z)|} \ .$$

– *Dans les deux cas $\gamma^2 = \omega(-1)$.*

Démonstration. Montrons (3). Soit $\nu = \mathrm{N}_{K/F}$ la norme de K sur F. Soient $\wp_K$ et $\mathcal{O}_K$ l'idéal et l'anneau de valuation de K, idem pour F. On choisit la mesure de Haar dx de F telle que $\mathrm{mes}_F(\mathcal{O}_F) = 1$, celle sur $F^\times$ est $d^\times x = dx/ \mid x \mid_F$. Soit ϖ une uniformisante de F, donc $\mid \varpi \mid_F = 1/q$, où q est le cardinal du corps des restes k_F de F, et $\mathrm{val}_F(\varpi) = 1$. Après le choix d'un isomorphisme $K \simeq F^2$ on déduit de la mesure de Haar de F celle de K, encore notée dx, alors celle de $K^\times$ est $d^\times x = dx/ \mid \nu(x) \mid_F$; les valeur absolue et valuation de K vérifient $\mid x \mid_K = \mid \nu(x) \mid_F^{\frac{1}{2}}$ et $\mathrm{val}_K(x) = \frac{1}{2}\mathrm{val}_F(\nu(x))$.

Compte tenu de la formule (1) le corollaire 1.6 pour $x^* = 0$ dit qu'il existe un constante $c > 0$

$$\int_K \Phi * f(x)dx = c\gamma\widehat{\Phi}(0) = c\gamma \int_K \Phi(x)dx \ ,$$

où Φ est une fonction convenable. On choisit $\Phi = 1_{\wp_K^n}$, où n est un entier qui sera précisé plus loin. La relation précédente s'écrit

$$\int_K \int_{\wp_K^n} \psi_F((x-z)(x-z)^\iota)dzdx = c\gamma\mathrm{mes}_K(\wp_K^n) \ .$$

Faisons l'hypothèse que $2n \geq \ell$, alors le membre de gauche de la relation précédente s'écrit (puisque $zz^\iota \in \wp_K^\ell$)

$$\int_K \psi_F(xx^\iota) \int_{\wp_K^n} \psi_F(-(xz^\iota + x^\iota z))dzdx \ ;$$

en changeant z en $z + t$, $t \in \wp_K^n$, on voit que

$$\int_{\wp_K^n} \psi_F(-(xz^\iota + x^\iota z))dz = \psi_F(-(xt^\iota + x^\iota t)) \int_{\wp_K^n} \psi_F(-(xz^\iota + x^\iota z))dz \ ,$$

qui est donc nul si $\mathrm{val}_K(x) < \ell - n$ et égal à $\mathrm{mes}_K(\wp_K^n)$ sinon. Finalement, on sait que γ est un nombre complexe de module 1 (cf le théorème 1.5) et qu'à une constante multiplicative strictement positive près il est égal à

$$\int_{\wp_K^{\ell-n}} \psi_F(xx^\iota)dx \ .$$

La suite exacte d'espaces munis de mesures

$$0 \to \ker \nu \to K^\times \to \nu(K^\times) \to 0$$

et le "théorème de Fubini" montrent que

$$\int_{\wp_K^{\ell-n}} \psi_F(xx^\iota)dx = \int_{\wp_K^{\ell-n}-\{0\}} \psi_F(xx^\iota) \mid xx^\iota \mid_F d^\times x$$

est, à une constante multiplicative strictement positive près, égal à

$$\int_{\nu(\wp_K^{\ell-n}-\{0\})} \psi_F(y) \mid y \mid_F d^\times y \ .$$

Soit $r = 2(n-\ell)$ si l'extension K/F est non ramifiée et $r = n-\ell$ sinon, on a $\nu(\wp_K^{\ell-n}) = \wp_K^{-r} \cap \nu(K^\times)$ et l'on voit que γ est un nombre complexe de module 1, à une constante multiplicative strictement positive près égal à

$$\int_{\wp_K^{-r}\cap\nu(K^\times)} \psi_F(y)dy \ .$$

La théorie du corps de classe local dit que $F^\times/\nu(k^\times)$ est un groupe d'ordre 2, si ω est son caractère non trivial relevé à $F^\times$ et prolongé en 0 par 0, alors $y \mapsto 1+\omega(y)$ est la fonction caractéristique de $\nu(K^\times)$, par suite

$$\int_{\wp_K^{-r}\cap\nu(K^\times)} \psi_F(y)dy = \int_{\wp_K^{-r}} \psi_F(y)dy + \int_{\wp_K^{-r}} \psi_F(y)\omega(y)dy$$

et la première intégrale du membre de droite est nulle si r, donc n, est suffisamment grand, auquel cas l'on voit que γ est un nombre complexe de module 1, à une constante multiplicative strictement positive près égal à

$$X := \int_{\wp_K^{-r}} \psi_F(y)\omega(y)dy \ .$$

On a

(18)
$$X = \sum_{\alpha\geq -r} \int_{\varpi^\alpha \mathcal{O}_F^\times} \psi_F(y)\omega(y)dy = \sum_{\alpha\geq -r} \omega(\varpi^\alpha) \mid \varpi^\alpha \mid_F \int_{\mathcal{O}_F^\times} \psi_F(\varpi^\alpha y)\omega(y)dy$$

Posons

$$X_\alpha = \int_{\mathcal{O}_F^\times} \psi_F(\varpi^\alpha y)\omega(y)dy \ .$$

Soit Λ_m une partie de $\mathcal{O}_F^\times$ en bijection avec $\mathcal{O}_F^\times/(1+\varpi^m\mathcal{O}_F)$ par la surjection canonique, le changement de variable $y = z + \varpi^m t$ dans X_α donne

$$X_\alpha = |\varpi|_F^{-m} \sum_{z\in\Lambda_m} \psi_F(\varpi^\alpha z)\omega(z) \int_{\mathcal{O}_F} \psi_F(\varpi^{m+\alpha}t)dt$$

et $\int_{\mathcal{O}_F} \psi_F(\varpi^{m+\alpha}t)dt = 0$ si $m+\alpha < \ell$ et est égal à 1 sinon. Donc

(19)
$$X_\alpha = \int_{\mathcal{O}_F^\times} \psi_F(\varpi^\alpha y)\omega(y)dy = 0 \text{ si } \alpha < \ell - m$$

$$X_\alpha = |\varpi|_F^{-m} \sum_{z\in\Lambda_m} \psi_F(\varpi^\alpha z)\omega(z) \text{ si } \alpha \geq \ell - m$$

et il faut noter que ceci est vrai aussi pour $m = 0$, avec $\mathcal{O}_F^\times/(1+\varpi^m\mathcal{O}_F) = \{1\}$.

Supposons l'extension K/F non ramifiée. Alors $\{1, \varpi\}$ est un système de représentants de $F^\times/\nu(K^\times)$ et l'on voit en examinant les valuations que $\mathcal{O}_F^\times \subset \nu(K^\times)$, par suite $m = 0$ et l'on a, cf (18) et (19),

$$X = \sum_{\alpha \geq -r, \alpha \geq \ell} \omega(\varpi^\alpha)|\varpi^\alpha|_F = (-1)^\ell q^{-\ell} \frac{q}{q+1}$$

d'où la formule cherchée puisque $X = \gamma |X|$.

Supposons maintenant l'extension K/F ramifiée. On a $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_F \oplus \pi\mathcal{O}_F$ où π est une uniformisante de K que l'on peut supposer vérifier $\nu(\pi) = \varpi$. En supposant $n \geq m$, ce qui est toujours possible, il vient avec (18) et (19),

$$X = q^m \sum_{\alpha \geq \ell - m} q^{-\alpha} X'_\alpha \quad \text{avec} \quad X'_\alpha = \sum_{z \in \Lambda_m} \psi_F(\varpi^\alpha z)\omega(z) \ ,$$

dont on déduit, en changeant z en $z(1+\varpi)$

$$X = q^m \omega(1+\varpi)\Big(\sum_{\alpha \geq \ell - m} q^{-\alpha} X'_\alpha + \sum_{\alpha \geq \ell - m} q^{-\alpha} X'_{\alpha+1}\Big)$$

$$= \omega(1+\varpi)X + q^{-1}\omega(1+\varpi)(X - q^{2m-\ell}X'_{\ell-m} \ ,$$

finalement,

$$X = (1 - \omega(1+\varpi) + 1/q)^{-1} q^{2m-\ell-1} \sum_{z \in \mathcal{O}_F^\times/(1+\wp_F^m)} \omega(z)\psi_F(\varpi^{\ell-m} z)$$

avec toujours $X = \gamma|X|$.

Dans le cas où l'extension K/F est *modérément ramifiée* on a $m = 1$ puisque, si $x \in \mathcal{O}_F^\times$, alors $x \in \nu(K^\times)$ si et seulement si x est un carré dans k_F. En effet, si $x = \nu(a + \pi b)$ avec a et b dans $\mathcal{O}_F$ on voit que $x = a^2$dans k_F. Si au contraire $x \notin \nu(K^\times)$, comme $F^\times/\nu(K^\times)$ admet un système de représentants dans $F^\times$ de la forme $\{1, \zeta\}$, alors il existe $a \in \mathcal{O}_F$ tel que $x = \zeta a^2$ dans k_F n'est pas un carré. Toujours dans cette situationn de ramification modérée on a

$$X = q^{-\ell} \sum_{\lambda \in k_F^\times} \omega(\lambda)\psi_F(\varpi^{\ell-1}\lambda)$$

Soit pour $m \geq 1$

$$G_m = \sum_{z \in \mathcal{O}_F^\times/(1+\wp_F^m)} \omega(z)\psi(\varpi^{\ell-m} z) \ ,$$

la relation $\gamma^2 = \omega(-1)$ se déduit de

$$|G_m|^2 = q^m \quad \text{et} \quad G_m^2 = \omega(-1)|G_m|^2 \ .$$

Montrons ces formules. L'inclusion $\mathcal{O}_F^\times \subset \mathcal{O}_F$ induit un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_F^\times/(1+\wp_F^m) \simeq \left(\mathcal{O}_F/\wp_F^m\right)^\times \ ,$$

donc, en prolongeant ω par 0 dans tout $A := \mathcal{O}_F/\wp_F^m$, i.e. en dehors de $A^\times$, et en posant $\psi_F(\varpi^{\ell-m}\ \cdot) = \psi(\cdot)$, il vient $G_m = \sum_{z\in A}\omega(z)\psi(z)$ et comme $\omega = \overline{\omega}$ il suit

$$|G_m|^2 = \sum_{x,y\in A}\omega(xy)\psi(x-y) = \sum_{y,t\in A}\omega(1+yt)\psi(t)\ , \tag{20}$$

où l'on a posé $t = x - y$. Si $t \in A^\times$ l'application $y \mapsto 1 + ty$ est une bijection de A, par suite $\sum_{y\in A}\omega(1+yt) = 0$. Si $t \notin A^\times$ et $t \neq 0$ on voit qu'il existe $1 + u \in A^\times$ avec $\omega(1+u) \neq 1$ d'où l'on déduit $\sum_{y\in A}\omega(1+yt) = \omega(1+u)\sum_{y\in A}\omega(1+yt) = 0$. Finalement il ne reste que $t = 0$ dans l'expression de $|G_m|^2$ et ceci fournit le résultat voulu. La deuxième formule s'obtient en remarquent que l'on passe de l'expression (20) de $|G_m|^2$ à celle de G_m^2 en changeant y en $-y$.

□

3. Des représentations de SL(2) et GL(2).

Soient F et K comme li a été indiqué au début de ce chapitre, c'est à dire que F est un corps local et K muni de l'involution ι est

- $K = F \oplus F$ et $(x,y)^\iota = (y,x)$,
- K est un extension séparable quadratique de F et ι est son F-endomorphisme non trivial,
- K est l'unique algèbre de quaternion sur F, c'est à dire que K est une algèbre centrale simple de centre F, et ι est la conjugaison,
- $K = M_2(F)$ et ι associe à une matrice la transposée de la matrice de ses cofacteurs.

En tant qu'espace vectoriel sur F, K s'identifie à son dual grâce à l'application

$$K \times K \to F \ \text{ définie par } \ (x,y) \mapsto \tau(xy^\iota)$$

et il suit une identification de K avec son dual K^* en tant que groupe abélien par

$$K \times K \to \mathbb{T}\ ,\ (x,y) \mapsto \psi_F\circ\tau(xy^\iota) =: < x, y^\iota >\ ,$$

cette identification étant plus précisément $K^* \simeq K$, $< \cdot, y > \mapsto y^\iota$.

Le groupe $\mathrm{SL}(2,F)$ s'injecte naturellement dans le groupe symplectique $Sp(K)$ de la manière suivante

- Lorsque $K = F \oplus F$ ou bien si K est unes extension quadratique séparable de F, alors $\mathrm{GL}(2,K)$ est vu comme le groupe des automorphismes de $K \times K$ et $\mathrm{SL}(2,F)$ est plongé dans $\mathrm{GL}(2,K)$ en envoyant une matrice m de $\mathrm{SL}(2,F)$ sur
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix}\ ,\ \text{on écrira } t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix};$$
- lorsque $K = M_2(F)$, $m \in \mathrm{SL}(2,F)$ associe à $(x,y) \in K \times K$ le couple (mx, ym^ι) ;
- lorsque K est l'algèbre de quaternions sur F ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

On vérifie que ces plongements de $\mathrm{SL}(2,F)$ sont en fait dans $Sp(K)$.

Proposition 3.1. *Lorsque K est une extension quadratique séparable de F soit ω le caractère de $F^\times$ donné par la théorie du corps de classe local, sinon ω est le caractère trivial; γ est donné par la proposition 2.9. Il existe une unique représentation r de $\mathrm{SL}(2,F)$ sur $\mathcal{S}(K)$ telle que*

$$(1)\ r\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right)\Phi(x) = \omega(a)|a|_K^{1/2}\Phi(ax)\ ,$$

$$(2)\ r\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\Phi(x) = \psi_F(zxx^\iota)\Phi(x)\ ,$$

$$(3)\ r\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)\Phi(x) = \gamma\widehat{\Phi}(x^\iota)\ ,$$

quels que soient $a \in F^\times$, $z \in F$, $x \in K$ et $\Phi \in \mathcal{S}(K)$.

Démonstration. On va utiliser le plongement de $Sp(K)$ dans $B_0(K)$ tel qu'il est détaillé dans le paragraphe 1.0.1, puis le relèvement r_0 sur $\Omega_0(K)$, donné dans le paragraphe 1.3 et par la formule (7), de la projection $\pi_0 : \mathbb{B}_0(K) \to B_0(K)^\circ$, ainsi que le théorème 2.1. La représentation r cherchée sera sur les éléments de $\mathrm{SL}(2,F)$ qui sont dans $\Omega_0(K)$ égale à un facteur multiplicatif près à r_0, le théorème 2.1 nous permettant de faire en sorte que l'on ait un morphisme. Pour faire ceci, la représentation cherchée étant continue, nous approchons les éléments de $\mathrm{SL}(2,F)$ de l'énoncé par des éléments de $\Omega_0(V)$.

On se place d'abord dans la situation où K est une extension quadratique de F. Soient γ_1 et γ_2 des éléments de F non nuls (que l'on fera tendre vers zéro), on pose pour γ_1, γ_2, $a \neq 0$, z et $b = 1 + \gamma_2 z$ dans F

$$\sigma_1 = t\begin{pmatrix} a & \gamma_1 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}t\ ,\ \sigma_2 = t\begin{pmatrix} b & \gamma_2 \\ z & 1\end{pmatrix}t\ \text{ et }\ \sigma_3 = t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}t\ .$$

Soient $s_j = (\sigma_j, f_j)$ et où les f_j sont donnés dans le paragraphe 1.0.1, formule (4), c'est à dire pour $(u,v) \in K \times K$

$$f_1(u,v) =< 2^{-1}a^{-1}\gamma_1 v^\iota, v >$$
$$f_2(u,v) =< u, 2^{-1}bzu^\iota >< 2^{-1}\gamma_2 v^\iota, v >< \gamma_2 v^\iota, zu^\iota >$$
$$\text{et}\ \ f_3(u,v) =< v^\iota, u^\iota >\ \ .$$

On étudie $r_0(s_1)$ (cf le §1.3). Soit Φ une fonction définie sur K, continue et à support compact (à valeurs complexes). La formule (7) donne pour tout $u \in K$

$$r_0(s_1)\Phi(u) = |\gamma_1|^{1/2}\int_K \Phi(au + \gamma_1 v^\iota) < 2^{-1}a^{-1}v^\iota, v > dv\ ,$$

par suite, si l'on pose $\Psi(v) = \Phi(au, \gamma_1 v^\iota)$, $f_1(v) =< 2^{-1}a^{-1}v^\iota, v >$ et avec les commentaires suivant le théorème 1.5

$$r_0(s_1)\Phi(u) = |\gamma_1|^{1/2}\widehat{(\Psi f)}(0) = |\gamma_1|^{1/2}(\widehat{\Psi} * \widehat{f})(0)$$

qui avec la transformée de Fourrier donnée par le théorème 1.5 donne

$$r_0(s_1)\Phi(u) = |a|^{1/2}\gamma(f_1)\int \Psi(v) < v, -2a\gamma_1^{-1}v^\iota > dv$$

$$= |a|^{1/2}\gamma(f_1)\int\int \Phi(au+\gamma_1 t^\iota) < t, v >< v, -2a\gamma_1^{-1}v^\iota > dtdv$$

qui donne par le changement de variable $t \mapsto x = t - 2a\gamma_1^{-1}v^\iota$

$$= |a|^{1/2}\gamma(f_1)\int\int \Phi(au+\gamma_1 x^\iota + 2av) < v, x > dxdv$$

puis par le changement de variable $v \mapsto y = au + \gamma_1 x^\iota + 2av$

$$= |a|^{1/2}\gamma(f_1)|2a|^{-1}\int < x, (2a)^{-1}(-au - \gamma_1 x^\iota) > \int \Phi(y) < (2a)^{-1}x, y > dydx$$

$$= |a|^{1/2}\gamma(f_1)|2a|^{-1}\int \widehat{\Phi}((2a)^{-1}x) < x, -2^{-1}u >< x, -(2a)^{-1}\gamma x^\iota > dx$$

qui donne avec le changement de variable $z = (2a)^{-1}x$

$$r_0(s_1)\Phi(u) = |a|^{1/2}\gamma(f_1)\int \widehat{\Phi}(z) < z, -au >< z, -\gamma 2at^\iota > dt\ .$$

Soient $\eta > 0$ et C une partie compacte de K, ouverte si K est ultra-métrique, fermeture d'un ouvert sinon, tels que

$$||r_0(s_1)\Phi(u) - |a|^{1/2}\gamma(f_1)\int_C \widehat{\Phi}(z) < z, -au >< z, -\gamma 2at^\iota > dt|| < \eta\ ,$$

on suppose γ_1 suffisamment proche de $0 \in K$ pour que $< z, -\gamma 2at^\iota >=$ 1 pour tout $z \in C$, alors on voit que

$$||r_0(s_1)\Phi(u) - |a|^{1/2}\gamma(f_1)\int \widehat{\Phi}(z) < z, -au > dt|| < \eta\ ,$$

ceci s'écrit

$$||r_0(s_1)\Phi(u) - |a|^{1/2}\gamma(f_1)\Phi(au)|| < \eta$$

et cette majoration peut-être rendue uniforme en u appartenant à une partie compacte quelconque C_0 de K. Un "changement de variable" dans la démonstration de la proposition 2.9 montre que si l'extension K/F est non ramifiée on a $\gamma(f_1) = (-1)^{\ell+\mathrm{val}_F(a)} = \omega(a)\gamma$ et l'on voit aussi facilement que la même formule $\gamma(f_1) = \omega(a)\gamma$est vraie si K/F est ramifiée. Finalement, pour tous $\eta > 0$ et partie compacte C_0 de K, on a pour γ_1 suffisamment proche de 0 et pour tout $u \in C_0$

$$||r_0(s_1)\Phi(u) - |a|^{1/2}\gamma\omega(a)\Phi(au)|| < \eta \tag{21}$$

Maintenant on calcule $r_0(s_2)$, par la même méthode qu'au dessus. Soit Φ une fonction définie sur K, continue et à support compact (à valeurs complexes). On a pour tout $u \in K$

$$r_0(s_2)\Phi(u) = |\gamma_2|^{1/2} < u, 2^{-1}bzu^\iota > \int_K \Phi(bu+\gamma_2 v^\iota) < 2^{-1}\gamma_2 v^\iota, v >< \gamma_2 zu, v > dv\ ,$$

posons $\Psi(v) = \Phi(bu + \gamma_2 v^\iota)$ et $f_2(v) =< 2^{-1}\gamma_2 v^\iota, v >$, alors cette dernière formule s'écrit

$$r_0(s_2)\Phi(u) = |\gamma_2|^{1/2} < u, 2^{-1}zu^\iota > \int \Psi(v)f_2(v) < \gamma_2 zu, v > dv =$$

$$|\gamma_2|^{1/2} < u, 2^{-1}zu^\iota > \widehat{(\Psi f_2)}(\gamma_2 zu) = |\gamma_2|^{1/2} < u, 2^{-1}zu^\iota > (\widehat{\Psi} * \widehat{f_2})(\gamma_2 zu)$$

$$=< u, 2^{-1}zu^\iota > \gamma(f_2) \int \widehat{\Psi}(v) < v, 2^{-1}zu^\iota - 2^{-1}\gamma_2^{-1}v^\iota > dv$$

$$=< u, 2^{-1}zu^\iota > \gamma(f_2) \int\int \Phi(bu+\gamma_2 t^\iota) < v, t+2^{-1}zu^\iota - 2^{-1}\gamma_2^{-1}v^\iota > dtdv$$

et l'on fait le changement de variable $t \mapsto x = t + 2^{-1}zu^\iota - 2^{-1}\gamma_2^{-1}v^\iota$, puis $v \mapsto y = bu + \gamma_2 x^\iota - \gamma_2 zu - 2^{-1}v$, il vient

$$r_0(s_2)\Phi(u) =< u, 2^{-1}zu^\iota > \gamma(f_2)|2| \int \widehat{\Phi}(2x) < -bu - 2\gamma_2 x^\iota - 2\gamma_2 zu, x > dx$$

$$=< u, 2^{-1}zu^\iota > \gamma(f_2) \int \widehat{\Phi}(x) < -bu, x >< \gamma_2(-2x^\iota - 2zu), x > dx \ ,$$

finalement, en remarquant que $\gamma(f_2) = \gamma$ (car on peut supposer que $2{-}1\gamma_2$ est un carré dans F, on monte comme plus haut que pour tout $\eta > 0$, pour toute partie compacte C_0 de K, on a pour γ_2 suffisamment proche de 0 et pour tout $u \in C_0$

$$||r_0(s_2)\Phi(u) - < u, 2^{-1}zu^\iota > \gamma\Phi(u)|| < \eta \ . \tag{22}$$

Le calcul de $r_0(s_3)$ est beaucoup plus rapide. On a,

$$r_0(s_3)\Phi(u) = \int \Phi(v^\iota) < v, u > dv = \int \Phi(v) < v, u^\iota > dv^\iota \ ,$$

et les mesures de Haar dv et dv^ι sur K sont égales (cf 2), donc pour tout $u \in K$

$$r_0(s_3)\Phi(u) = \int \Phi(v) < v, u^\iota > dv = \widehat{\Phi}(u^\iota) \ . \tag{23}$$

Soient j_1 et j_2 deux entiers distincts pris parmi 1, 2 et 3. Le théorème 2.1 dit qu'il existe un caractère f_{j_1,j_2} du second degré de K tel que

$$r_0(s_{j_2})r_0(s_{j_1}) = \gamma(f_{j_1,j_2})r_0(s_{j_1}s_{j_2}) \ .$$

A condition de supposer que $2\gamma_2$ est un carré, ce qui a déjà été fait, que γ_1, γ_2 et $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ sont suffisamment petits, que $2a\gamma_1$ est aussi un carré, on voit que l'on a toujours $\gamma(f_{j_1,j_2}) = \gamma$.

Soit $\zeta_j \in \mathrm{SL}(2, F)$ tel que $\sigma_j = t\zeta_j t$ $(j = 1, 2, 3)$, cf la définition des σ_j au début de cette démonstration On voit donc que la formule

$$r(\zeta_j^{-1}) = \gamma^{-1}r_0(s_j)$$

définit une application de la partie de $\mathrm{SL}(2, F)$ engendrée par les ζ_j et qui via le plongement $Sp(K) \to B_0(K)$ s'envoie dans $\Omega_0(K)$, application qui de plus respecte le produit. Cette application est continue, faisant tendre γ_1 et γ_2 vers 0, tout en respectant les conditions imposées plus haut, on voit que r devient la représentation cherchée de $\mathrm{SL}(2, K)$.

Pour les autres possibilités de l'algèbre K la démonstration est la même (cf proposition 2.9). □

Remarque 3.2. *La démonstration précédente montre que r_0 est un homomorphisme, au moins sur une partie pas trop petite de $B_0(K)$ (par exemple l'image de $Sp(K)$ ou même de $\mathrm{SL}(2,K)$), si et seulement si $\gamma = 1$. Ceci rejoint le théorème 2.7.*

3.1. **Représentation de G_+, lorsque K est une extension quadratique séparable de F ou bien lorsque $K = F \oplus F$.** Ces résultats sont aussi valables lorsque K est une algèbre de quaternions de centre F, nous ne le détaillerons pas ici.

Soient K' le sous-groupe compact de $K^\times$ formé des x tels que $\nu(x) = xx^\iota = 1$ et G_+ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,F)$ formé des g tels que $\det g \in \nu(K^\times)$.

Soit Ω une représentation irréductible de $K^\times$ (de dimension 1 car $K^\times$ est commutatif) dans $\mathbb{C}$, c'est à dire que Ω est un caractère de $K^\times$, non nécessairement unitaire.

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{S}(K,\Omega)$ l'espace des fonctions $\Phi \in \mathcal{S}(K)$ telles que, pour tous $h \in K'$ et $x \in K$*

$$\Phi(xh) = |h|_K^{1/2}\Omega^{-1}(h)\Phi(x)$$

($h \mapsto |h|_K$ est le module de K, comme précédemment il vérifie $|h|_K = |\nu(h)|_F$ où à droite se trouve la valeur absolue de F ; si dx est un mesure de Haar sur K, alors $|x|_K^{-1}dx$ en est une sur $K^\times$).

(1) *Le groupe $\mathrm{SL}(2,F)$ opère par la représentation r sur $\mathcal{S}(K,\Omega)$.*

(2) *La représentation r de $\mathrm{SL}(2,F)$ dans $\mathcal{S}(K,\Omega)$ s'étend en une représentation r_Ω de G_+ toujours dans $\mathcal{S}(K,\Omega)$ vérifiant pour tous $a = \nu(h) \in \nu(K^\times)$ et $x \in K$*

$$r_\Omega\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\Phi(x) = |h|_K^{1/2}\Omega(h)\Phi(xh)\ .$$

(3) *On a pour tous $a \in F^\times$ et $\Phi \in \mathcal{S}(K,\Omega)$*

$$r_\Omega\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\Big)\Phi = \omega(a)\Omega(a)\Phi\ .$$

(4) *La représentation r_Ω est continue et si F est archimédien, tous les facteurs dans $\mathcal{S}(K,\Omega)$ sont indéfiniment différentiables.*

(5) *Supposons Ω unitaire et soit $L^2(K,\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{S}(K,\Omega)$ dans $L^2(K)$, alors r_Ω s'étend en une représentation unitaire dans $L^2(K,\Omega)$.*

On fait la démonstration en privilégiant la situation où K est une extension quadratique de F, c'est analogue lorsque $K = F \oplus F$. La démonstration nécessite le

Lemme 3.4. *Soit $a \in F^\times$ et soit r^a la représentation de* $\mathrm{SL}(2,F)$ *construite comme r, mais avec le caractère $x \mapsto \psi(ax)$.*

(1) *On a pour tout $g \in \mathrm{SL}(2,F)$*

$$r^a(g) = r\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big)$$

(2) *Pour $b \in K^\times$ soient $\lambda(b)$ et $\rho(b)$ les translations à gauche et à droite dans $\mathcal{S}(K)$ (c'est à dire $\lambda(b)\Phi(x) = \Phi(b^{-1}x)$ et $\rho(b)\Phi(x) = \Phi(xb)$). Soit $a = \nu(b) \in \nu(K^\times$, alors pour tout $g \in \mathrm{SL}(2,F)$*

$$r^a(g)\lambda(b^{-1}) = \lambda(b^{-1})r(g) \quad \textit{et} \quad r^a(g)\rho(b) = \rho(b)r(g) \ ,$$

en particulier, si $b \in K'$, la représentation r commute avec $\lambda(b)$ et avec $\rho(b)$.

Démonstration. La démonstration du lemme consiste à vérifier les formules sur les générateurs, cf proposition 3.1. La démonstration de la partie (1) de la proposition résulte du lemme. Pour montrer (2) il faut remarquer que G_+ est le produit semi-direct du groupe

$$H = \Big\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a \in \nu(K^\times) \Big\}$$

et de $\mathrm{SL}(2,F)$, que la formule de cet énoncé (2) définit une représentation continue de H. Il reste donc à prouver que pour tout $g \in \mathrm{SL}(2,F)$ et tout $a = \nu(h) \in \nu(K^\times)$ on a

$$r_\Omega\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = r_\Omega\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) r_\Omega\big(g\big) r_\Omega\Big(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big)$$

et avec le lemme cette relation s'écrit

$$r^a_\Omega(g) = \rho(h) r_\Omega(g) \rho^{-1}(h)$$

qui est encore une conséquence du lemme.

Pour la formule (3) on remarque que pour tout $a \in F^\times$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et que $a^2 \in \nu(K^\times)$. Les autres assertions sont faciles. □

Soit $\Phi \in \mathcal{S}(K,\Omega)$, pour tout $g \in G_+$ soit

$$W_\Phi(g) = r_\Omega(g)\Phi(1) \ ,$$

et pour tout $a = \nu(h) \in \nu(K^\times)$ soit

$$\varphi_\Phi(a) = W_\Phi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = |h|_K^{1/2} \Omega(h) \Phi(h) \ .$$

Il résulte de la définition que l'application $\Phi \mapsto \varphi_\Phi$ est injective, par suite aussi $\Phi \mapsto W_\Phi$. On voit aussi que l'espace des W_Φ est stable sous les translations à droite puisque pour tout $g \in G_+$

$$\rho(g)W_\Phi = W_{r_\Omega(g)\Phi}\ .$$

Maintenant on construit une représentation de G_+ sur l'espace V des fonctions φ_Φ, $\Phi \in \mathcal{S}(K,\Omega)$. Soit B_+ le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \nu(K^\times)$ et $x \in F$. On définit la représentation ξ de B_+ sur l'espace des fonctions φ définies sur $\nu(K^\times)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$\xi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\varphi(b) = \varphi(ba) \ \text{ et } \ \xi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\varphi(b) = \psi_F(bx)\varphi(b)$$

c'est à dire que pour tous $\beta \in B_+$ et $\Phi \in \mathcal{S}(K,\Omega)$

$$\xi(\beta)\varphi_\Phi = \varphi_{r_\Omega(\beta)\Phi}\ .$$

Cette formule définit une action de B_+ via r_Ω sur V, on vérifie que pour $a \in F^\times$ on a

$$r_\Omega\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\Big) = \omega(a)\eta(a)\mathrm{Id}$$

sur V, cf proposition 3.3 (on a $\omega(a)\eta(a)\varphi_\Phi = \varphi_{\omega(a)\eta(a)\Phi}$). La décomposition de Bruhat montre que pour définir une action de G_+ sur V il reste à préciser celle de $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Cela demande d'introduire la notion de transformée de Mellin. Si μ est un caractère de $F^\times$ (non nécessairement unitaire) on pose

$$\widehat{\varphi}(\mu) = \int_{\nu(K^\times)} \varphi(a)\mu(a)d^\times a\ ,$$

la mesure de Haar $d^\times a$ sur $\nu(K^\times)$étant induite par la mesure de Haar de $F^\times$ précédemment choisie et toujours notée $d^\times a$ ($d^\times a = |a|^{-1}da$ où da est la mesure de Haar sur F qui vérifie $\mathrm{mes}(\mathcal{O}_F) = 1$ si F est non archimédien...). Comme lors de la relation (8) on choisit la mesure de Haar $d^\times\zeta$ sur $\mathrm{Ker}(\nu)$ de telle manière qu'avec celle de $K^\times/\mathrm{Ker}(\nu) \simeq \nu(K^\times)$ l'on ait pour toute fonction $\Phi \in L^1(K^\times)$

$$\int_{K^\times} \varphi(h)d^\times h = \int_{\nu(K^\times)} \Big(\int_{\mathrm{Ker}(\nu)} \varphi(x+\zeta)d^\times\zeta\Big)d^\times a\ ,$$

donc pour $\Phi \in \mathcal{S}(K,\Omega)$, par définition de φ_Φ et si l'on pose $c_1 = \Big(\int_{\mathrm{Ker}(\nu)} d^\times\zeta\Big)^{-1}$

$$\widehat{\varphi_\Phi}(\mu) = c_1 \int_{K^\times} |h|_K^{1/2}\mu(\nu(h))\Omega(h)\Phi(h)d^\times h\ ,$$

Posons $\varphi' = \varphi_{r_\Omega(w)\Phi}$ et $\varphi = \varphi_\Phi$, on se propose de calculer $\widehat{\varphi'}$ en fonction de $\widehat{\varphi}$. Soient $\mu^{(1)}$ un caractère de $F^\times$, $s \in \mathbb{C}$ et $\mu_s = \mu^{(1)}|\cdot|_F^s$, on a

$$\widehat{\varphi'}(\mu_s) = c_1 \int_{K^\times} |h|_K^{1/2} \mu_s(\nu(h))\Omega(h)(r_\Omega(w)\Phi)(h)d^\times h$$

qui donne par définition de r_Ω

$$\widehat{\varphi'}(\mu_s) = c_1\gamma \int_{K^\times} |h|_K^{1/2} \mu_s(\nu(h))\Omega(h)\widehat{\Phi}(h^\iota)d^\times h$$

$$= c_1\gamma \int_{K^\times} |h|_K^{1/2} \mu_s(\nu(h))\Omega(h)\Big(\int_K \Phi(x)\psi_F(\nu(h^\iota))dx\Big)d^\times h$$

on a $dx = |x|d^\times x$ entre les mesures de K et de $K^\times$, on fait le changement de variables $(h, x) \mapsto (t = xh^\iota, x)$ et on remarque que $\Omega(h^\iota) = \eta(\nu(h))\Omega(h^{-1})$, il vient

$$\widehat{\varphi'}(\mu_s) = \gamma\Big(c_1 \int_{K^\times} |t|_K^{1/2} \mu_s(\nu(t))\Omega(t)\psi_F(\nu(t))d^\times t\Big)\times$$

$$\int_{K^\times} |x|_K^{1/2} \mu_s(\nu(x^{-1}))\eta(\nu(x^{-1}))\Omega(x)\Phi(x)dx\ ,$$

on choisit s tel que sa partie réelle soit suffisamment grande pour que

$$c(s) := c_1 \int_{K^\times} |t|_K^{1/2} \mu_s(\nu(t))\Omega(t)\psi_F(\nu(t))d^\times t$$

ait un sens, auquel cas c'est une fonction holomorphe, qui ne dépend que de $\mu^{(1)}$ et de Ω, on peut supposer aussi que le choix de Φ permet de donner un sens à l'autre intégrale. On voit alors que la formule précédente s'écrit

$$\widehat{\varphi'}(\mu_s) = \gamma c(s)\widehat{\varphi}(\mu_s^{-1}\eta^{-1})\ .$$

On résume ceci dans la

Proposition 3.5. *Soit V l'espace des fonctions φ_Φ pour Φ décrivant $\mathcal{S}(K, \Omega)$, alors r_Ω définit une représentation de G_+ dans V, toujours notée r_Ω, donnée par la formule, $g \in G_+$*

$$r_\Omega(g)\varphi_\Phi = \varphi_{r_\Omega(g)\Phi}\ .$$

Cette représentation vérifie la relation suivante entre transformées de Mellin : soient $\mu^{(1)}$ un caractère de $F^\times$, $s \in \mathbb{C}$ et $\mu_s = \mu^{(1)}|\cdot|_F^s$, pour la partie réelle de s suffisamment grande il existe une fonction holomorphe $c(s)$, ne dépendant que de $\mu^{(1)}$ et de Ω telle que

$$\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}(\mu_s) = \gamma c(s)\widehat{\varphi_\Phi}(\mu_s^{-1}\eta^{-1})\ .$$

Remarque 3.6. *Soit χ un caractère de $K^\times$, pour Φ dans $\mathcal{S}(K, \chi)$ on définit formellement*

$$Z(\chi, \Phi) = \int_{K^\times} \chi(h)\Phi(h)d^\times h\ ,$$

on voit que

$$\widehat{\varphi_\Phi}(\mu_s) = Z((\mu_s \circ \nu)|\cdot|_K^{1/2}, \Phi)\ ,$$

le membre de droite est une fonction zêta partielle au sens de Tate, qui est holomorphe pour la partie réelle de s suffisamment grande et qui se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe ; l'existence de ce prolongement sera expliqué plus loin. La formule de la proposition s'écrit alors

$$Z((\mu_s \circ \nu)|\cdot|_K^{1/2}, \widehat{\Phi}) = c(s) Z((\mu_s^{-1} \circ \nu)(\eta^{-1} \circ \nu)|\cdot|_K^{1/2}, \Phi) ,$$

le membre de droite est une fonction holomorphe pour la partie réelle de s suffisamment petite et se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe (ce sera aussi expliqué plus loin). Il faut l'existence de ces deux prolongements méromorphes pour donner du sens pour tout s à cette égalité.

3.2. **Représentation de** $\mathrm{GL}(2, F)$**.** Dans ce paragraphe $K = F \oplus F$.

Proposition 3.7. *On note ρ la représentation de* $\mathrm{GL}(2, F)$ *dans $\mathcal{S}(K)$ donnée par $\rho(g)\Phi(a, b) = \Phi((a, b)g)$.*

(1) *La représentation r (cf proposition 3.1 se prolonge à* $\mathrm{GL}(2, F)$*, elle vérifie pour tous $a \in F^\times$ et $\Phi \in \mathcal{S}(K)$*

$$r\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\Phi = \rho\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\Phi$$

(2) *Soit $\Phi \in \mathcal{S}(K)$, notons $\widetilde{\Phi}$ sa transformée de Fourier partielle : pour $a, b \in F$*

$$\widetilde{\Phi}(a, b) = \int_F \Phi(a, y)\psi_F(by)dy$$

où la mesure de Haar dy de F est supposée automnale par rapport à ψ_F. On a pour tout $g \in$ $\mathrm{GL}(2, F)$

$$\widetilde{(r(g)\Phi)} = \rho(g)\widetilde{\Phi} .$$

La démonstration est immédiate, à partir des relations de la proposition 3.1.

Soit $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ un caractère de $K^\times = F^\times \times F^\times$. Soit r_Ω la représentation de $\mathrm{GL}(2, F)$ donnée par

$$r_\Omega(g) = |\det g|_F^{1/2}\omega_1(\det g) r(g)$$

où r est la représentation donnée dans la proposition précédente.

Soit $\Phi \in \mathcal{S}(K)$, on pose pour tout $g \in \mathrm{GL}(2, F)$

$$W_\Phi(g) = \int_{F^\times} \Omega(t, t^{-1}) r_\Omega(g)\Phi(t, t^{-1}) d^\times t ,$$

qui existe si par exemple Φ est à support compact. On définit aussi, pour tout $a \in F^\times$

$$\varphi_\Phi(a) = W_\Phi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) .$$

Soit ρ l'action à droite par $\mathrm{GL}(2,F)$ et pour $a \in F^\times$ soit $\eta(a) = \omega_1(a)\omega_2(a)$. Les W_Φ possèdent les propriétés suivantes, pour $g \in \mathrm{GL}(2,F)$ et $a \in F^\times$

$$\rho(g)W_\Phi = W_{R_\Omega(g)\Phi} \quad , \quad W_\Phi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} g\Big) = \eta(a)W_\Phi(g) \ .$$

La première formule est évidente et compte tenu de cette première formule il suffit de démontrer la seconde pour $g = e$, ce qui est un calcul sans mystère (on utilise encore $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$).

Comme dans le paragraphe précédent (pour B_+) on définit une représentation ξ de

$$B_F = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a \in F^\times \ , \ x \in F \right\}$$

dans l'espace V des φ_Φ par les mêmes formules, qui se résument en

$$\xi(b)\varphi_\Phi = \varphi_{r_\Omega(b)\Phi} \ .$$

Pour obtenir une représentation de $\mathrm{GL}(2,F)$ il reste à définir l'action de $w = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout caractère μ de $F^\times$ on pose pour tout fonction φ sur $F^\times$ convenable

$$\widehat{\varphi}(\mu) = \int_{F^\times} \varphi(a)\mu(a)d^\times a \ .$$

On a, pour $\Phi \in \mathcal{S}(K)$

$$\widehat{\varphi_\Phi}(\mu) = \int_{F^\times}\int_{F^\times} \omega_1(t)\omega_2(t^{-1})\mu(a)|a|_F^{1/2}\omega_1(a)\Phi(at,t^{-1})d^\times t d^\times a \ ,$$

qui avec le changement de variable $(t,a) \mapsto (v = t^{-1}, u = ta)$ donne

$$\widehat{\varphi_\Phi}(\mu) = \int_{F^\times}\int_{F^\times} \omega_1(u)\omega_2(v)\mu(uv)|uv|_F^{1/2}\Phi(u,v)d^\times u d^\times v \ .$$

On suppose que μ vérifie $\mu = \mu_s = \mu^{(1)}|\cdot|^s$ où s est un nombre complexe et $\mu^{(1)}$ un caractère de $F^\times$. On définit formellement

$$Z(\Omega,\Phi) = Z(\omega_1,\omega_2,\Phi) = \int_{F^\times}\int_{F^\times} \omega_1(x_1)\omega_2(x_2)\Phi(x_1,x_2)d^\times x_1 d^\times x_2 \ ,$$

on a

$$\widehat{\varphi_\Phi}(\mu_s) = Z(\mu_s\omega_1|\cdot|_F^{1/2}, \mu_s\omega_2|\cdot|_F^{1/2}, \Phi) \ .$$

Calculons $\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}$. On a

$$\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}(\mu_s) = \int_{F^\times}\int_{F^\times} \omega_1(u)\omega_2(v)\mu_s(uv)|uv|_F^{1/2}\widehat{\Phi}(u,v)d^\times u d^\times v$$

et, puisque $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(u,v) &= \int_F\int_F \Phi(x,y)\psi_F(xyuv)dxdy \\ &= \int_{F^\times}\int_{F^\times} \Phi(x,y)\psi_F(xyuv)|xy|_F d^\times x d^\times y \ .\end{aligned}$$

On porte ceci dans l'expression de $\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}(\mu_s)$, puis on fait le changement de variable $(u,v,x,y) \mapsto (\alpha = ux, \beta = vy, x, y)$, il vient

$$\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}(\mu_s) = \Big(\int_{F^\times} \int_{F^\times} \omega_1(\alpha)\omega_2(\beta)|\alpha\beta|_F^{1/2}\psi_F(\alpha\beta)\mu_s(\alpha\beta)d^\times\alpha d^\times\beta\Big)\times$$

$$\int_{F^\times}\int_{F^\times} \omega_1^{-1}(x)\omega_2^{-1}(y)|xy|_F^{1/2}\psi_F^{-1}(xy)\mu_s^{-1}(xy)\Phi(x,y)d^\times x d^\times y \ ,$$

le premier facteur du membre de droite a un sens si le partie réelle de s est suffisamment grande, la seconde pour un bon choix de Φ. Posons

$$c(s) = \int_{F^\times}\int_{F^\times} \omega_1(\alpha)\omega_2(\beta)|\alpha\beta|_F^{1/2}\psi_F(\alpha\beta)\mu_s(\alpha\beta)d^\times\alpha d^\times\beta$$

alors la formule précédente s'écrit

$$\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}(\mu_s) = c(s)Z(\mu_s^{-1}\omega_1|\cdot|_F^{1/2}, \mu_s^{-1}\omega_2|\cdot|_F^{1/2}, \Phi) = c(s)\widehat{\Phi}(\mu_s^{-1}\eta^{-1})$$

où η est le caractère de $F^\times$ défini par $\eta(a) = \Omega(a,a) = \omega_1(a)\omega_2(a)$. On résume ces calculs dans la proposition suivante, suivie d'une remarque, tout à fait analogues à celles du paragraphe précédent.

Proposition 3.8. *Soit $K = F \oplus F$. Soit V l'espace des fonctions φ_Φ pour Φ décrivant $\mathcal{S}(K)$, alors r_Ω définit une représentation de $\mathrm{GL}(2,F)$ dans V, toujours notée r_Ω, donnée par la formule, $g \in \mathrm{GL}(2,F)$*

$$r_\Omega(g)\varphi_\Phi = \varphi_{r_\Omega(g)\Phi} \ .$$

Cette représentation vérifie la relation suivante entre transformées de Mellin : soient $\mu^{(1)}$ un caractère de $F^\times$, $s \in \mathbb{C}$ et $\mu_s = \mu^{(1)}|\cdot|_F^s$, pour la partie réelle de s suffisamment grande il existe une fonction holomorphe $c(s)$, ne dépendant que de $\mu^{(1)}$ et de Ω telle que

$$\widehat{\varphi_{r_\Omega(w)\Phi}}(\mu_s) = c(s)\widehat{\varphi_\Phi}(\mu_s^{-1}\eta^{-1}) \ .$$

Remarque 3.9. *Soit $\Xi = (\chi_1, \chi_2)$ un caractère de $K^\times$, pour Φ dans $\mathcal{S}(K)$ on définit formellement*

$$Z(\Xi, \Phi) = Z(\chi_1,\chi_2,\Phi) = \int_{F^\times}\int_{F^\times} \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\Phi(x_1,x_2)d^\times x_1 d^\times x_2$$

on voit que

$$\widehat{\varphi_\Phi}(\mu_s) = Z(\mu_s\omega_1|\cdot|_F^{1/2}, \mu_s\omega_2|\cdot|_F^{1/2}, \Phi) \ ,$$

le membre de droite est une fonction zêta partielle au sens de Tate, qui est holomorphe pour la partie réelle de s suffisamment grande et qui se prolonge en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe ; l'existence de ce prolongement sera expliqué plus loin. La formule de la proposition s'écrit alors

$$Z(\mu_s\omega_1|\cdot|_F^{1/2}, \mu_s\omega_2|\cdot|_F^{1/2}, \widehat{\Phi}) = c(s)Z(\mu_s^{-1}\omega_1^{-1}|\cdot|_F^{1/2}, \mu_s^{-1}\omega_2^{-1}|\cdot|_F^{1/2}, \Phi) \ ,$$

le membre de droite est une fonction holomorphe pour la partie réelle de s suffisamment petite et se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe (ce sera aussi expliqué plus loin). Il faut *l'existence de ces deux prolongements méromorphes pour donner du sens pour tout s à cette égalité.*

4. Appendice : La théorie du corps de classe local.

4.1. Soient F un corps local non archimédien, $\mathcal{O}_F$ et $\wp_F$ ses anneau et idéal de valuation, $k_F = \mathbb{F}_q$ son corps des restes et $F^{\text{sép}}$ une fermeture séparable de F, supposée contenir toutes les extensions (séparables) de F considérées dans cet appendice.

Pour tout entier $m > 0$ soit F_m l'extension de F non ramifiée de degré m, c'est le corps de décomposition sur F du polynôme $X^{q^m} - X$. Soit F_∞ la réunion des F_m, c'est la sous-extension maximale non ramifiée de $F^{\text{sép}}/F$. Soient $G_F = \mathrm{Gal}(F^{\text{sép}}/F)$, $I_F = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, Ce dernier s'appelle le groupe d'inertie de F. Si k_F^{alg} désigne le corps des restes de $F^{\text{sép}}$, qui est aussi une clôture algébrique de k_F, on a la suite exacte de groupes

$$1 \to I_F \to G_F \to F_\infty \to 1 \ .$$

Le groupe G_F est la limite projective des groupes $G_E = \mathrm{Gal}(F^{\text{sép}}/E)$, pour E décrivant les extensions finies E de F (dans $F^{\text{sép}}$). C'est donc un groupe profini, topologique, une base de voisinages ouverts de son éliment neutre est donnée par l'ensemble des G_E. On a aussi les isomorphismes

$$\mathrm{Gal}(F_\infty/F) \simeq F_\infty \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \ ,$$

le premier venant de la suite exacte précédente, le second étant expliqué comme suit

$$\mathrm{Gal}(F_\infty/F) = \lim_{\leftarrow} \mathrm{Gal}(F_m/F) \simeq \lim_{\leftarrow} \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \widehat{\mathbb{Z}} \ .$$

Un élément de G_F qui donne par ces applications $1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$ s'appelle un morphisme arithmétique de Frobenius, s'il donne -1 c'est un morphisme géométrique de Frobenius.

Pour tout entier $m > 0$, premier avec la caractéristique résiduelle p de F, le corps F_∞ possède (dans $F^{\text{sép}}$) une unique extension E_m de degré m, qui est engendrée par une racine m-éme $\varpi^{1/m}$ d'une uniformisante ϖ de F, cette extension est galoisienne et l'application

$$\mathrm{Gal}(E_m/F_\infty) \to \mu_m \ , \ \sigma \mapsto \frac{\sigma(\varpi^{1/m})}{\varpi^{1/m}} \tag{24}$$

est un isomorphisme canonique de groupes topologiques. Soit E_∞ la réunion des E_m, avec toujours m premier avec la caractéristique résiduelle p de F, alors on a des isomorphismes de groupes topologiques, le premier étant canonique

$$\mathrm{Gal}(E_\infty/F_\infty) \simeq \lim_{\leftarrow} \mu_m \simeq \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell \ .$$

On note P_F le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\text{sép}}/E_\infty)$, il s'appelle le groupe de ramification sauvage de F, c'est un pro-p-groupe (où p est la caractérisque résiduelle de F) ; on a donc un isomorphisme de groupes topologiques (non canonique, non unique)

$$I_F/P_F \simeq \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell \ ;$$

il suit de la relation (24)

Lemme 4.1. *Soient $\alpha : I_F/P_F \to \prod_{\ell\neq p} \mathbb{Z}_\ell$ un isomorphisme topologique et ϕ_F un morphisme géométrique de Frobenius de F, alors pour tout $\sigma \in I_F/P_F$,*

$$\alpha(\phi_F \sigma \phi_F^{-1}) = q^{-1}\alpha(\sigma) \ ,$$

où q est le cardinal du corps résiduel k_F de F.

4.2. Soit W_F l'image inverse de $\mathbb{Z}$ par le morphisme $G_F \to \widehat{Z}$. En fait W_F est défini à conjugaison près dans G_F. On a la suite exacte de groupes

$$1 \to I_F \to W_F \to \mathbb{Z} \to 0 \ ,$$

qui permet de munir W_F de la topologie selon laquelle I_F est un sous-groupe ouvert de W_F et I_F est muni de la topologie induite par celle de G_F. L'inclusion $W_F \to G_F$ est continue. Le groupe topologique W_F s'appelle *un groupe de Weil de F*, c'est un groupe localement profini (tout voisinage ouvert de l'identité contient un sous-groupe ouvert et compact).

Proposition 4.2. – *Soit E une extension finie de F (dans $F^{\text{sép}}$) et posons $G_E = \mathrm{Gal}(E/F)$, alors, si W_F est un groupe de Weil de F, $G_E \cap W_F$ est un groupe de Weil de E (algébriquement et topologiquement) ; c'est le seul groupe de Weil de E contenu dans W_F.*
- *Le groupe $W_E = W_F \cap E$ est ouvert et d'indice fini dans W_F, il est normal si et seulement si E/F est une extension galoisenne.*
- *L'application canonique $W_E \backslash W_F \to G_E \backslash G_F$ est une bijection.*
- *L'application $E \mapsto W_F \cap G_E$ est une bijection entre l'ensemble des extensions E de F contenues dans $F^{\text{sép}}$ et l'ensemble des sous-groupes ouverts de W_F d'indices finis.*

Démonstration. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} F & \to & E \cap F_\infty & \to & F_\infty & \longrightarrow & F^{\text{sép}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ & & E & \to & E_\infty & & \end{array}$$

le carré

$$\begin{array}{ccc} E \cap F_\infty & \to & F_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \to & E_\infty \end{array}$$

étant constitué par des extensions horizontales non ramifiées et des extensions verticales complètement ramifiées. Soit $\mathbb{F}_{q^m}$ le corps résiduel de E, c'est à dire aussi de $E \cap F_\infty$. On voit que si ϕ_F est un Frobenius géométrique de F alors ϕ_F^m en est un de E et de $E \cap F_\infty$. On voit que le sous-groupe W_E de G_E engendré par ϕ_F^m et I_E est un groupe de Weil de E et, si W_F est le groupe de Weil de F engendré par ϕ_F et I_F, on voit aussi que $W_E = W_F \cap E$. La suite de la démonstration résulte de considérations sur ces diagrammes et du fait que W_F (resp. W_E)est dense dans G_F (resp. G_E). □

4.3. W'_F l'adhérence du groupe des commutateurs de W_F et posons $W_F^{\mathrm{ab}} = W_F/W'_F$, c'est un groupe abélien profini, indépendant des choix faits pour définir W_F.

Théorème 4.3. *La théorie du corps de classe local.*
Il existe un homomorphisme continu $\mathbf{a}_F : W_F \to F^\times$*, appelée l'application (de réciprocité) d'Artin possédant les propriétés suivantes*

(1) *L'application* $\mathbf{a}_F$ *induit un isomorphisme* $W_F^{\mathrm{ab}} \simeq F^\times$*.*
(2) *Un élément* σ *de* W_F *est un Frobenius géométrique de* F *si et seulement si* $\mathbf{a}_F(\sigma)$ *est une uniformisante de* F*.*
(3) *On a* $\mathbf{a}_F(I_F) = \mathcal{O}^\times$ *et* $\mathbf{a}_F(P_F) = 1 + \wp_F$*.*
(4) *Soit* E/F *une extension séparable finie, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W_E & \stackrel{\mathbf{a}_E}{\to} & E^\times \\ \downarrow & & \downarrow N_{E/F} \\ W_F & \stackrel{\mathbf{a}_F}{\to} & F^\times \end{array}$$

Dans l'assertion (4) la flèche verticale de W_E dans W_F est ainsi définie : à isomorphisme près on peut considérer que E est inclus dans $F^{\mathrm{sép}}$ et que $W_E = W_F \cap \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sép}}/E)$; $N_{E/F}$ désigne la norme de E sur F.

Corollaire 4.4. (1) *L'application* $E \mapsto N_{E/F}(E^\times)$ *est une bijection entre l'ensemble des extensions finies abélienne de* F *dans* $F^{\mathrm{sép}}$ *et l'ensemble des sous groupes ouverts de* $F^\times$ *d'indices finis.*

(2) *L'application d'Artin* $\mathbf{a}_F$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{Gal}(E/F) \simeq F^\times/N_{E/F}(E^\times)$*, quel que soit l'extension abélienne séparable finie* E *de* F*.*
(3) *Soit* E/F *une extension séparable finie et soit* E^{ab}/F *la sous-extension abélienne maximale, alors* $N_{E/F}(E^\times) = N_{E/F}((E^{\mathrm{ab}})^\times)$*.*

D'autres propriétés de l'application d'Artin font intervenir le transfert (die Verlagerung). Soient g un groupe et H l'un de ses sous-groupes d'indice fini.Soit $s : G/H \to G$ une section de la surjection canonique $G \to G/H$. Pour $x \in G/H$ et $g \in G$ on pose $gs(x) = s(gx)h_{x,g}$, avec donc $h_{x,g} \in H$. Ceci permet de construire l'homéomorphisme de groupes

$$\mathrm{ver}_{G/H} : G/[G,G] \to H/[H,H]\ ,\ g \mapsto \prod_{x \in G/H} h_{x,g}$$

appelée le transfert (dans cette définition on confond une élément de G ou de H avec son image dans le groupe rendu abélien). Si E/F est une extension séparable finie, par continuité on peut définir le transfert $\mathrm{ver}_{E/F} : W_F^{\mathrm{ab}} \to W_E^{\mathrm{ab}}$.

Théorème 4.5. *Soit E/F une extension séparable finie,alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W_E^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow{\mathbf{a}_E} & E^\times \\ \mathrm{ver}_{E/F} \uparrow & & \uparrow \\ W_F^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow{\mathbf{a}_F} & F^\times \end{array}$$

Remarque 4.6. *L'application d'Artin donne en particulier un isomorphisme entre le groupe des caractères (continus) de $F^\times$ avec celui de W_F, qui est $\xi \mapsto \xi \circ \mathbf{a}_F$. Les caractères non ramifiés de $F^\times$ et de W_F se correspondent, les caractères modérément ramifiés de $F^\times$ correspondant aux caractères de W_F triviaux sur P_F.*

Références

[1] van den Ban E. P. Induced Representation and the Langlands Classification, in Representation Theory and Automorphic Forms, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 61, Amer. Math. Soc. 1996, p. 123-155.

[2] Borel A. Linear Algebraic Groups (second enlarged edition), Sringer Verlag, 1991.

[3] Dieudonné J. Éléments d'analyse.

[4] Godement R. Notes on Jacquet-Langlands Theory, Institut of Advenced Study, 1970.

[5] Kirillov A. Éléments de la théorie des représentations, Éditions Mir, Moscou, 1974.

[6] Serre J.-P. Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, 1967.

[7] Varadarajan V. S. Harmonic Analysis on Real Reductive Groups, Springer L. N. 576, 1977.

[8] Weil A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. t.111, 1964.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: marc.reversat@math.univ-toulouse.fr