Mathématiques et réalité.

Introduction.

Dans le titre il y a « mathématiques » et « réalité ». Il sera peu parlé des mathématiques, encore moins de la réalité, mais des liens entre les deux.

Il ne sera rien dit de « l'intérieur des mathématiques », comment elles se pratiquent, quels choix philosophiques prévalent dans telle ou telle démarche : constructivisme, dont les représentants contemporains les plus flamboyants semblent être Manin, Serre, Deligne... ; formalisme d'Hilbert et Grothendieck ; ...

Il sera aussi très peu dit sur l'existence du réel, simplement une affirmation : il existe un réel en soi ; un réel hors de moi ; il existe une nature objective, indépendante de la pensée qui l'appréhende. C'est sans aucun doute une position a priori, mais elle est en bonne compagnie : « la nature existe et c'est perdre son temps que d'en discuter » (Wittgenstein).

Nous allons essayer de décrire les liens entre la « démarche mathématique » et la nature.

Naturellement, il doit déjà être possible de le concevoir, la position que nous allons défendre est à l'opposé de l'anti-réalisme, qui voit la réalité comme un ensemble de constructions mentales qui sont notre œuvre, même si, nous le verrons, nous pensons que nous produisons, à propos de la connaissance de la nature, des constructions mentales qui possèdent un certain degré de liberté par rapport à leur sujet.

Notre position n'est pas non plus assimilable, nous espérons le montrer, au réalisme platonicien, pour qui la réalité est constituée d'objets mathématiques préexistant dans un univers mathématique. Nous ne pensons pas que les objets (concepts) mathématiques soient le réel, nous ne confondons pas « réalité » et « description de la réalité ». Notre idée est que les mathématiques sont des « règles de grammaire » (Wittgenstein), qu'elles sont nécessaires à la description du réel, mais que ce n'est pas le réel.

Notre présupposé de l'existence objective d'une réalité ne nous conduit pas à refuser une certaine autonomie de sa description. Il y a une distance entre le réel et la mathématique. L'activité de compréhension de la nature s'appuie sur des siècles de travaux, qui pour une part conditionnent nos pensées actuelles, mais, au sein de cette dépendance, il y a des degrés de liberté, divers choix possibles, qui relèvent bien souvent des idées dominantes de l'époque. Par exemple, les concepts mathématiques très utilisé aujourd'hui sont ceux « d'algorithme » et de « modélisation », qui sont bien le produit d'une époque qui ne voit pas la science, la production de savoir, comme une activité culturelle, mais comme les outils de « l'économie de l'innovation ».

Plutôt que le terme « mathématique » nous préférerons souvent l'expression « méthode mathématique », car nous pensons que le savoir mathématique est d'abord une démarche, pouvant, et même devant, s'appliquer à tous les savoirs humains ([1]). Il ne s'agit pas ici de dire que les

1 « Accepter une définition très large des mathématiques : tout propos logique ». Jean Leray, « L'invention en mathématiques », in « Logique et connaissance scientifique », La Pléiade, 1967.

mathématiques permettent de « tout comprendre » ([2]), nous argumenterons ceci dans le paragraphe suivant. Bien sûr, nous sommes à l'opposé de la position de Diderot, pour qui « les mathématiques ne font qu'interposer un voile entre la nature et le peuple ».

C'est à travers des exemples que nous allons développer nos idées, ceux de la biologie, de l'informatique et du calcul différentiel, pour parler de la « méthode mathématique », celui des mathématiques chinoises pour mettre en évidence l'influence de l'environnement idéologique sur la production de concepts mathématiques. La conclusion sera l'occasion de quelques remarques, nous terminerons par raconter une histoire vraie en guise d'« exercice ».

La démarche mathématique.

L'idée était fortement répandue dans les années 60, 70 que les mathématiques permettent de tout comprendre (cf l'article de Lichnerowicz déjà cité). Ce n'est pas notre opinion, cependant nous croyons que la démarche mathématique peut s'appliquer partout, à tous les savoirs humains. Nous expliquons ceci.

Pierre Cartier avance l'idée dans son article « Mathématiques et réalité » ([3]) que l'activité mathématique consiste en la recherche d'invariants, de symétries dans la nature et que cela s'accompagne d'un retour sur la compréhension du phénomène étudié, par des explications, des prédictions, par la création d'un savoir cumulatif et reproductif. Cette démarche peut être étendue à tous les secteurs du savoir humain, mais bien souvent ceci est confondu avec l'application à de nouveaux domaines des outils mathématiques que nous possédons aujourd'hui, sans se poser la question d'une nécessaire adaptation, voire de la création de nouveaux concepts.

La biologie, au stade du développement actuel de la connaissance de la vie, demande des mathématiques, i.e. demande la recherche d'invariants, de symétries, demande que soient pensés ses acquis « à un niveau antérieur à celui de la recherche et plus fondamental que lui, à savoir celui de la détermination du sens » ([4]). Dans l'un de ses articles, Gromov ([5]) donne des exemples où manifestement le besoin de science abstraite en biologie ne peut se résoudre par l'application des mathématiques actuelles. Il nous dit qu'un lent et long chemin, producteur de nouvelles et profondes mathématiques, conduira à la compréhension de la création des cellules, du cerveau... : cellules, ribosomes (assemblages de molécules porteurs de messages), cerveaux, sont l'aboutissement de « choix » (sélection) parmi des milliers de milliers de possibilités... , le simple mot « évolution » n'explique rien, il ne dit rien des raisons qui ont conduit parmi des centaines de milliers de possibilités aux choix conduisant à des organes extrêmement complexes.

Cet exemple de la biologie (de fait c'est un exemple en cours de construction) argumente l'idée suivante : si la démarche mathématique peut et doit s 'appliquer dans tous les champs du savoir humain, chaque fois que se fait ressentir le besoin de la détermination du sens, de comprendre pourquoi et comment, pas seulement de décrire, pour autant, ce n'est pas les mathématiques telles

2 André Lichnerowicz, « Remarques sur les mathématiques et la réalité », op. cit.
3 « Qu'est-ce que la vie », Université de tous les savoirs, Odile Jacob éd., 2000
4 Argument attribué à Wittgenstein par Bouveresse dans « Le pays des possibles », Ed. de Minuit, 1988
5 « Chrystals, proteins, stability and isoperimetry », <www.ihes.fr/~gromov/recent.html> ; cet article de Gromov n'est pas toujours facile à lire, mais ce n'est pas dû aux mathématiques et cela vaut vraiment la peine de regarder au moins l'introduction

qu'elles sont qui vont nécessairement s'appliquer, il est souvent nécessaire de créer de nouveaux concepts, de nouvelles mathématiques, qui certes s'appuient sur le savoir acquis mais savent aussi le dépasser.

L'informatique est un autre exemple récent de l'adaptation/dépassement des mathématiques. Cette nouvelle science est issue des mathématiques, de la linguistique, de la physique... Les mathématiques y ont en particulier contribué en développant la logique, l'algorithmique, la théorie des graphes planaires..., mais pas seulement, aussi à un niveau plus fondamental, celui des critères de vérité : a quel moment de son étude peut-on dire qu'un phénomène est connu ? Les informaticiens considèrent que tout ce qu'il y a dans nos PC ou nos Mac est connu, cependant de temps en temps il faut « rebooter » (comme disent les spécialistes), c'est à dire éteindre sa machine et redémarrer afin de supprimer un programme parasite nuisant au bon fonctionnement, venu on ne sait comment et effacé par l'absence d'énergie. Finalement, un mathématicien de la première moitié du 20ème siècle pourrait dire que le contenu de nos ordinateurs n'est pas totalement connu, mais l'informatique a créé de nouveaux critères de connaissance, qui font que cette science est para-consistante, c'est à dire que l'on y accepte la possibilité de contradictions à condition qu'elle soit repoussée au delà des phénomènes accessibles (par exemple, une propriété attribuée aux nombres entiers et qui ne serait pas vérifiée seulement par des nombres plus grands que celui estimé des particules élémentaires de l'univers, est considérée comme étant vraie en informatique ; en effet, ces nombre ne sont pas accessibles par le calcul, même par des ordinateurs).

L'informatique est une « vraie science », qui produit un savoir reproductible et de nombreuses applications, qui a généré de nouvelles mathématiques et en utilise beaucoup, même si elle s'en est éloignée au niveau le plus fondamental, celui des critères de vérité ([6]).

Un autre exemple plus ancien, venant du 18ème siècle, d'évolution des mathématiques, de la création de nouveau concepts, est celui de la maîtrise de la notion d'infini. Il s'agissait de décrire le mouvement des corps dans l'espace, le mouvement des planètes ; il en a résulté la création du calcul infinitésimal. Il a fallu par exemple comprendre (c'est à dire exhiber et définir clairement) la notion de vitesse, i.e. la distance parcourue divisée par le temps mis pour la parcourir. Mais quand la distance devient de plus en plus petite, qu'obtient-on ? Cela a aboutit a de nouvelles notions, celle de distance infiniment petite, de temps infiniment petit, de grandeur infiniment petite (Leibniz), maintenant on dit d'infiniment petit, on dit que l'on a des infiniment petits et l'on connait les règles de calculs auxquels ils sont soumis. Clairement, ce n'est pas l'utilisation des mathématiques précédentes qui ont permis de décrire le mouvement des corps dans l'espace, mais au contraire une évolution profonde (on pourrait dire une révolution) de la pensée mathématique.

Cette réflexion sur la notion d'infini n'était pas isolée, des interrogations voisines venaient de l'étude de nombres ou de la géométrie et ces champs de réflexions se sont probablement mutuellement nourris, d'autant plus que c'était parfois les mêmes personnes qui y travaillaient (Leibniz). La création de l'assertion suivante montre une évolution profonde de la méthode mathématique de son temps : « deux termes sont égaux lorsque leur différence est incomparablement petite » (Leibniz). Il fallut la maîtrise donnée par cette règle pour que, par exemple, les formules suivantes, qui font intervenir des processus infinis, donc inaccessibles à l'activité manuelle de l'homme, prennent du sens,

6 L'idée suivante est assez répandue : si l'on avait laissé la création de l'informatique aux seuls mathématiciens elle n'existerait pas encore, ces derniers voulant toujours tout démontrer (par exemple comprendre tout des nécessités des rebootages) avant de passer à l'étape suivante...

$\pi=4\sum(-1)^n/(2n+1)$, la somme étant sur tous les entiers $n\geq0$,

$\pi=3,1415926....$

La première formule donne π (le quotient du périmètre d'un cercle par son diamètre) par un procédé de calcul humainement impossible à réaliser, puisqu'il s'agit d'une somme infinie, mais avec l'assertion de Leibniz cette formule a un sens parfaitement clair. La deuxième formule attire les mêmes commentaires, c'est l'expression numérique partielle de π, on sait maintenant que cette écriture numérique est infinie, c'est encore les progrès conceptuels sur les notions d'infini qui a donné un sens à cette formule, car, vu qu'elles sont en nombre infini et sans algorithme les produisants, personne ne connait la suite des décimales de π.

L'exemple des mathématiques anciennes chinoises ([7]) ; savoir universel et savoir relatif.

Les textes mathématiques de la Chine ancienne remontent aux années -200/+220, on y discerne les grandes tendances du savoir chinois sur la nature, qui prévaudront jusqu'à l'époque actuelle. Aujourd'hui la production scientifique chinoise est intégrée au mouvement international.

La conception ancienne chinoise des mathématiques consiste à ne privilégier que le calcul, la détermination ; les mathématiciens chinois anciens ne s'occupent que du calculable, dans le fond de leur démarche il ne sont pas concernés par la recherche du sens, par la création d'objets et de concepts mathématiques.

Un exemple significatif semble être le « Théorème des restes chinois », connu en Chine depuis l'année +130, retrouvé en Europe au 17ème siècle, enseigné aujourd'hui en première année d'université. Pour établir leur calendrier, les mathématiciens chinois ont résolu le problème arithmétique suivant :

« étant donné deux entiers p et q, premiers entre eux (i.e. n'admettant que 1 comme diviseur commun), étant donné deux autre entiers a et b, alors il existe un entier x tel que
p divise x-a et q divise x-b ».

Les mathématiciens chinois ont donné un procédé de calcul (un algorithme) pour obtenir x, en Europe, on a aussi cherché le sens de ce résultat, en créant le concept de l'ensemble des entiers après division par l'un d'entre eux, en constatant que sur cet ensemble il existe naturellement des lois du type addition et multiplication, en considérant la structure abstraite ainsi construite, en constatant que de telles structures apparaissent aussi dans d'autres domaines des mathématiques, éloignés de l'arithmétique et par leur étude systématique en créant la théorie des groupes, des anneaux, dont en retour l'impact sur de nombreuses branches des mathématiques est considérable. De nos jours « le sens » du « Théorème des restes chinois » est parfaitement établi.

7 Les informations sur les mathématiques chinoises utilisées ici viennent de travaux de Karine Chemla, en particulier de « Aperçu sur l'histoire des mathématiques en Chine ancienne dans le contexte d'une histoire internationale », <www.sphere.univ-paris-diderot.fr/?CHEMLA-Karine>, à laquelle il ne faudrait pas attribuer quelques unes de nos interprétations, qui pourraient éventuellement être erronées

Dans les écrits mathématiques chinois anciens la présentation des résultats est sous forme de procédés de calcul, d'algorithmes, ce qui est très différent de la présentation par exemple d'Euclide dans sa « Géométrie ». On peut noter que souvent le raisonnement scientifique en Chine ancienne se décrit à l'aide d'analogies, d'apparentements, un peu comme la démarche magique ; en Occident le progrès de le démarche scientifique a conduit à privilégier la recherche des causes et de leurs effets.

Il ne s'agit pas ici de dire que l'un est supérieur à l'autre, mais de souligner que les deux démarches sont très différentes. Cependant elles n'en ont pas moins toutes deux produit des savoirs universels. Si la Chine ancienne n'a pas donné du sens par la théorie elle a formulé des connaissances universelles, reflets d'une réalité extérieure aux présupposés idéologiques de ceux qui l'appréhendent, par exemple des propriétés de divisions de nombres et leur réalisation technologique très utile, le boulier ; l'utilisation de la poudre à canon ; des connaissances astronomiques (surtout utilisées en Chine pour les horoscopes)...

L'appréhension du réel, ses descriptions, le fonctionnement de la science, relèvent de particularités locales, mais le savoir produit est universel. Cela ne veut pas dire que les concepts sont les mêmes partout, qu'il n'aurait pas été possible de faire autrement, de produire d'autres objets théoriques devant les mêmes phénomènes, cela ne veut pas dire que la structuration du savoir ne peut qu'être unique, mais les conséquences du type prédictions ou applications sont les mêmes. Donc, derrière l'observation et l'interprétation il y a un réel, qui est le même pour tous.

Conclusion, avec quelques remarques.

La mathématique est une science de la nature (nature étant pris au sens spinoziste, car englobant les connaissances humaines), c'est la science qui se préoccupe de la détermination du sens.

La science mathématique est en fait une démarche, une méthode pour aller au delà du simple examen des choses. Ainsi se créent des concepts, des théories, qui produisent un savoir universel, sans pour autant l'être dans leurs formulations, leurs interprétations, qui ne sont pas, comme toute pensée, indépendantes des idées dominantes et des paradigmes de leur « région d'activité scientifique » (terminologie de de K. Chemla) et de leur époque. Elles peuvent changer d'une région à l'autre, évoluer dans le temps, mais le savoir est universel et immuable (une fraction est une fraction partout dans le monde, dit K. Chemla à propos des mathématiques de la Chine ancienne) même si les théories, donc le sens attribué aux phénomènes, peuvent être parfois radicalement remises en question (la relativité n'a pas remis en question l'héliocentrisme, mais a changé le sens attribué à l'attraction des planètes, en a donné une meilleure explication).

Si la démarche mathématique peut et doit s'appliquer à tout savoir humain, à un certain stade de son développement, demandant un approfondissement du sens donné aux découvertes, cela ne veut pas dire que les outils mathématiques connus soient nécessairement suffisants, au contraire, tout nouveau champ d'investigation conduit presque sûrement à de nouveaux concepts, de nouvelles théories, à l'étude de leur nature opératoire, des liens, des invariances, des relations causes/effets. C'est un processus d'étude dont l'histoire des sciences montre qu'il ne peut être que lent et complexe.

Il ne faudrait pas déduire de ceci que la démarche mathématique possède seule la « vérité scientifique », produit seule les critères de pertinence (pensons à la para-consistance de l'informatique), qu'elle soit en charge de régenter la connaissance. Nous espérons que notre argumentation, concernant la nécessaire évolution, parfois profonde, des mathématiques face à tout nouveau champ d'investigation, l'a suffisamment montré.

Au sens profond kantien, les mathématiques sont une science pure (dégagées de contraintes immédiates, dues à l'observation, aux conditions), mais aujourd'hui le discours est brouillé. Le mot recherche, y compris en mathématiques, recouvre deux réalités bien distinctes

- la recherche qui découvre,
- la recherche qui invente, innove,

le politique ou l'économiste ne voyant que la seconde, tenant un discours qui peut abuser, sur le savoir au cœur de « l'économie de la connaissance », alors que le terme pertinent est « économie de l'innovation ». Par exemple, ce n'est pas un grand progrès culturel que d'avoir inventé la capsule de café et la machine l'accompagnant, pour remplacer nos plus classiques cafetières, c'est peu dire que le but n'est pas culturel, mais qu'il s'agit de créer un marché et de faire des profits.

Cette confusion se retrouve dans ce qui est désigné par le terme « mathématique » aujourd'hui. Les mathématiques appliquées, de création récente, sont, sous le terme « mathématique » au plus près des applications et ne relèvent pas de la démarche décrite ici ([8]).

Les champs nouveaux de l'innovation ne viennent pas ce cette innovation elle-même, mais de progrès dans les connaissances. Il y a un exemple récent en mathématiques, plus précisément en arithmétique : la cryptographie. Il y a eu convergence de besoin de développements sociaux et économiques et de connaissances sur les nombres, acquises sans autre motivation que celle de connaître encore mieux ce que le réel a permis à l'humanité de percevoir dans ses tous premiers âges, les nombres. La cryptographie intervient fortement dans nos cartes de crédits, sur le réseau, mais aussi, et c'est peut-être là le plus compliqué, à l'aide de codes correcteurs d'erreurs, pour par exemple ôter aux informations transitant par l'espace les parasites que celui-ci leur apporte par le rayonnement cosmique. La découverte des principes de ces codes est due à la science pure (bien sûr, ces principes évoluent, toujours au sein d'une recherche fondamentale), qui ainsi à ouvert un champ d'inventions, d'innovations, autour de la sophistication des codes, de leurs utilisations... On pourrait aussi parler des progrès dans l'étude des équations différentielles (on dit aujourd'hui des systèmes dynamiques) qui ont permis des progrès important dans l'efficacité des phares de voitures, des éclairages publiques, ou encore dans la réalisation des verres correcteurs progressifs... Un autre exemple est le réseau (internet), créé au départ par le CERN (Centre Européen de Recherche Nucléaire) pour ses propres besoins, sans aucune motivation économique ou commerciale.

---

8 Il semble nécessaire de préciser que nous n'énonçons pas ici un jugement de valeur, mais plus simplement une distinction. Les mathématiques appliquées, les outils numériques, statistiques et probabilistes, apportent beaucoup d'informations, permettent des mesures, dans de nombreux domaines, comme la météo., l'épidémiologie, la démographie... Ils sont souvent d'une élaboration délicate et d'un maniement difficile, mais nous ne pensons pas qu'ils apportent du sens à ces phénomènes. Il faut aussi préciser que nous n'utilisons pas ici la dénomination officielle de « mathématiques appliquées », car celle-ci, dans le domaine universitaire, recouvre parfois des champs de recherche parfaitement purs (au sens kantien).

Un exercice.

Bernhard Riemann (1826-1866) fut un mathématicien de génie, il produisit un nombre considérable de mathématiques nouvelles pendant sa courte vie, l'une d'entre elles étant la « fonction zêta de Riemann » . C'est une fonction, c'est à dire une règle, qui à un nombre s (en fait un nombre complexe) associe un autre nombre (lui aussi complexe, ou infini), noté $\zeta(s)$ et la grande question posée par Riemann est : quels sont les nombres s qui annulent la fonction ζ ? Autrement dit, Riemann propose de résoudre l'équation, dont s est l'inconnue,

$$\zeta(s)=0 .$$

Ce problème n'est pas anecdotique, il s'est révélé très difficile et n'est toujours pas résolu, en fait sa solution donnerait beaucoup d'informations sur la répartition des nombres premiers parmi tous les entiers. Certains de ces nombres s qui annulent ζ sont connus, c'est à dire certaines solutions de l'équation précédente, mais la majeure partie d'entre elles reste insaisissable et Riemann a émit une hypothèse les caractérisant, appelée « hypothèse de Riemann ».

Venons en à une vraie anecdote. Dans les années 70, deux mathématiciens de l'Université de Bordeaux, que nous appellerons WE et MMF, écrivirent un ouvrage, intitulé « Les nombres premiers », dans lequel ils montrent un théorème en deux temps, d'abord en supposant que l'hypothèse de Riemann est vraie, puis en supposant qu'elle est fausse, autrement dit,

si l'hypothèse de Riemann est vraie alors le théorème est vrai,
si l'hypothèse de Riemann est fausse alors le théorème est vrai.

Une objection fut apportée par un autre mathématicien, JPS, chargé par l'éditeur d'expertiser l'ouvrage. JPS trouva la démonstration insuffisante, l'hypothèse de Riemann pouvant être indécidable (c'est à dire que les fondements sur lesquels s'appuient les mathématiques ne permettent pas de décider si l'hypothèse de Riemann est vraie ou fausse, il y a des exemples, c'est le cas de « l'hypothèse du continu »...). La réponse de WE fut claire : c'est sans importance, les zéros de ζ existent et ils vérifient ou ne vérifient pas l'hypothèse de Riemann, la réponse de MMF était plus nuancée.

Compte tenu du point de vue défendu ici, de l'existence d'une nature non réduite au produit de son étude, de la distance et de la relativité des concepts que cette étude formule, bien qu'il en résulte un savoir universel, notre opinion est que Jean-Pierre Serre a raison, la fonction ζ est un concept créé par l'étude des nombres, eux mêmes étant déjà une abstraction, car on a jamais rencontré 2 ou 3 dans la nature, mais 2 ou 3 quelque chose.

Donc les zéros de la fonction ζ peuvent ne pas exister. S'ils existent et si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors ils produiront un savoir universel sur les nombres.