LES DÉBUTS DES FONCTIONS L DANS LE MONDE AUTOMORPHE.

MARC REVERSAT

Résumé. Le but de ces notes est de décrire comment l'étude des groupes de Galois des corps de nombres est devenue celle de certaines fonctions L. Elles s'inspirent principalement des ouvrages de Milne ([10]), Lang ([6]), Gelbart ([3]), Shimura ([13]) et Bump ([1]), ainsi que de Jacquet-Langlands ([5]), Godement ([4]).

Table des matières

Date: 24 février 2014.

1. Introduction

Le désir de comprendre la répartition des nombres premiers conduisit Riemann à introduire sa *fonction zêta*

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} ,$$

encore de nos jours des conjectures très fortes lui sont attachées, en particulier relatives au lieu de ses zéros ([1]).

Dirichlet repris les idées de Riemann en considérant de manière systématique les séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où (a_n) est une suite de nombres complexes ; en particulier si χ est un caractère modulo un entier N, que l'on nomme aujourd'hui un caractère de Dirichlet, et si $a_n = \chi(n)$ pour tout n, si de plus ce caractère n'est pas trivial, alors cette *série de Dirichlet* définit une fonction holomorphe sur tout le plan complexe. Cette étude conduisit Dirichlet à son théorème, sur la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Dedekind étendit la fonction zêta de Riemann aux nombres idéaux de Kummer, i.e. aux idéaux des corps de nombres (c'est à dire des

1. Des dates sont données dans le paragraphe suivant, des définitions et des détails dans le corps du texte.

extensions finies de $\mathbb{Q}$). Soient F un corps de nombres et $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, *la fonction zêta de Dedekind du corps* F est

$$\zeta_F(s) = \sum_I \frac{1}{\mathrm{N}(I)^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} ,$$

la somme étant suivant les idéaux non nuls de $\mathcal{O}_F$ et le produit suivant ses idéaux maximaux, avec $\mathrm{N}(I) = \sharp(\mathcal{O}_F/I)$. Pour $F = \mathbb{Q}$ on retrouve la fonction zêta de Riemann. L'étude de ces fonctions produisit des informations sur la répartition des idéaux maximaux d'un corps de nombres.

L'idée naturelle fut alors de faire pour les fonction zêta de Dedekind l'analogue de l'apport de Dirichlet à la fonction zêta de Riemann. Hecke proposa la notion de *Großencharacter* d'un corps de nombres F, c'est à dire essentiellement de caractère χ du groupe des idéaux, et définit les fonctions suivantes, appelées aujourd'hui les *fonctions* L *de Hecke*,

$$\zeta_F(s, \chi) = \sum_I \frac{\chi(I)}{\mathrm{N}(I)^s} ,$$

mais, y compris pour la définition de χ, il y a des difficultés ; cela s'est simplifié par la suite, avec l'introduction du bon point de vue, c'est à dire des adèles.

Toutes ces fonctions ont pour objet l'études des corps de nombres et du principal d'entre eux, le corps des nombres rationnels, de leurs idéaux premiers, que l'on appelle aujourd'hui leurs places finies, et de leurs extensions. Parallèlement, mais aussi parfois sous l'impulsion des mêmes personnes, se développa à partir de 1850 et pendant presque un siècle *la Théorie algébrique des nombres* et l'un de ses aboutissements majeurs, *la Théorie du corps de classes abélien*, c'est à dire la description des extensions abéliennes finies de corps de nombres en termes du corps de base. Il est vrai cependant que la Théorie algébrique des nombres n'a pas abouti à une théorie du corps de classes (i.e. à la description des extensions non abéliennes), cette question est toujours en débat, c'est l'objet du *Programme de Langlands*, dont on dit quelques mots dans ces notes.

L'introduction des idèles et des adèles (des idèles additifs), due pour beaucoup à Chevalley, a permis une interprétation nouvelle de la théorie abélienne du corps de classe et des fonction L de Hecke, tout en laissant entrevoir ce que pourrait être une théorie du corps de classes non abélien. Les idèles fournissent une vision synthétique du groupe des idéaux d'un corps de nombres, ils permettent aussi de constater, par exemple que les formes modulaires, qui conduisent aussi à des fonctions L (cf l'exemple de la fonction Δ de Ramanujan § 6.2), sont en fait définies sur un espace adèlique, c'est à dire que le demi-plan de Poincaré a une description adèlique, cf (7.6).

Pour le cas non abélien la théorie piétinait, cependant quelques avancées importantes eurent lieu sous l'impulsion d'Artin dans les années 40-50. Tout d'abord Artin introduisit ses fonctions L attachées aux représentations des groupes de Galois des corps de nombres (représentations irréductibles de tous rangs finis, donc tenant compte de l'aspect non abélien). Dans la thèse de l'un de ses élèves, Tate, en 1950, ces fonction L pour les représentations galoisiennes de rang 1 sont décrites par des fonctions L automorphes (construites à l'aide de fonctions définies sur les idèles), ces dernières étant la bonne manière d'écrire les fonctions L de Hecke. Il s'agit encore du cas abélien, puisque les représentations sont de rang 1, mais la description particulièrement lumineuse donnée des fonctions L des caractères des groupes de Galois mit en évidence l'importance du "monde automorphe" dans les tentatives de compréhension du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$.

L'étude des représentations galoisiennes de rangs > 1 est en cours, la forme actuelle et les nombreuses conjectures (pour l'essentiel non démontrées à ce jour) ont été proposées par Langlands principalement pendant la période 1967-70 (cf [7]), d'abord dans une lettre à Weil ([8]). De nombreux résultats intéressants ont été établis (par exemple la correspondance locale pour $\mathrm{GL}(n)$, Harris-Taylor et Henniart en 2000), mais, même pour $\mathrm{GL}(2)$ la correspondance de Langlands globale entre fonctions L des représentations galoisiennes et des représentations automorphes n'est pas connue à ce jour.

Il faut remarquer que ce champ de recherche, bien qu'encore largement à défricher, que l'on peut appeler "le monde automorphe", a donné quelques résultats spectaculaires, comme la démonstration du Théorème de Fermat (Wiles, 1994), ou la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ en arithmétique de caractéristique positive (Laurent lafforgue, 2000).

Dans les lignes suivantes nous rappelons les différentes fonctions et théories dont nous venons de dire quelques mots. C'est sans doute souvent trop bref, mais c'est la rançon d'un texte qui ne s'est pas voulu trop long, tout en espérant être accessible aux non spécialistes.

Quelques dates.

- Emil Artin, 1898-1962, parmi ses élèves il y a Dwork, Lang, Tate, Zassenhaus, Zorn.
- Claude Chevalley, 1090-1984, a suivi les cours d"Émile Picard, a travaillé sous la direction d'Emil Artin et Helmut Hasse, a eu comme élève Jacques Roubaud.
- Richard Dedekind, 1831 - 1916, disciple de Kummer, a travaillé avec Gauß.
- Johann Peter Gustav Dirichlet,1805 - 1859, auteur du "Principe des tiroirs".
- Gotthold Eisenstein, 1823 - 1852.
- Philipp Furtwängler, 1869 - 1940, élève de Klein.
- Johan Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855, a conseillé et encouragé Eisenstein, Riemann...
- Erich Hecke, 1887 - 1947.
- David Hilbert, 1862 - 1943, il a formé ou conseillé Emmy Noether, Hermann Weyl, Zermelo,von Neumann...
- Hervé Jacquet, 1939- , élève de Godement.
- Ernst Kummer, 1810 - 1893, a eu pour élèves Cantor, Hermann Schwarz.
- Robert Langlands, 1936 - .
- Louis Mordell, 1888 - 1972.
- Hans Petersson, 1902 - 1984.
- Srinivasa Ramanujan, 1887 - 1920.
- Bernhard Riemann, 1826 -1866.
- Teiji Takagi, 1875 - 1960, fondateur de l'école mathématique moderne du Japon.
- John Tate, 1925 - , élève d'Artin.
- Edmund Taylor Whittaker, 1873 - 1956.

2. Généralités

Dans ce paragraphe la lettre F désigne un corps de nombres, c'est à dire une extension finie de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_F$ est son anneau d'entiers, c'est un anneau noethérien de dimension de Krull 1, ses localisés par rapport à ses idéaux premiers non nuls (i.e. ses idéaux maximaux) sont des anneaux de valuation discrète. $\mathcal{O}_F$ est un anneau de Dedekind. Si $\mathfrak{p}$ est l'un de ses idéaux maximaux on désigne par $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel de F en $\mathfrak{p}$, c'est à dire $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$, c'est aussi le corps des restes du complété de F à la place $\mathfrak{p}$.

Les *places à l'*∞ de F, c'est à dire celles qui restreintes à $\mathbb{Q}$ donnent sa place usuelle (sa valeur absolue usuelle, à équivalence près) sont les

$$|\cdot|_\sigma : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ ,\ \ x \mapsto |\sigma(x)|$$

où σ décrit $\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(F, \mathbb{C})$ et $|\cdot|$ est la norme complexe ; si σ est à valeurs réelles la place $|\cdot|_\sigma$ n'est équivalente à aucune autre, si σ n'est pas à valeurs réelles alors $|\cdot|_\sigma$ est équivalente à $|\cdot|_{\overline{\sigma}}$, où $\overline{\sigma}$ est déduit de σ par composition avec la conjugaison complexe ; il vient

$$[F:\mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2 \tag{1}$$

où r_1 est le nombre de places réelles de F et r_2 le nombre de ses places complexes.

Les valuations de F qui ne sont pas à l'∞, que l'on dit *finies*, sont les $\mathfrak{p}$-adiques, où $\mathfrak{p}$ est un idéale maximal de $\mathcal{O}_F$.

Soient E/F une extension finie et $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_F$. Le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_E$ au dessus de $\mathfrak{p}$ (i.e. tels que $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{p}\mathcal{O}_E$, ce qui est équivalent à $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_E = \mathfrak{p}$) est fini, notons les $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_r$, on a

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_E = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}\ , \tag{2}$$

$e_1, \cdots, e_r$ *sont les indices de ramification de* E *en* $\mathfrak{p}$; on dit que E est non ramifié en $\mathfrak{p}$ si les e_i sont tous égaux à 1.

Soient $F_\mathfrak{p}$ et $E_{\mathfrak{P}_i}$ les compétés de F et E pour respectivement les places $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}_i$, on a un isomorphisme provenant des plongements $F_\mathfrak{p} \hookrightarrow E_{\mathfrak{P}_i}$,

$$E \otimes_F F_\mathfrak{p} \simeq \prod_{1 \leq i \leq r} E_{\mathfrak{P}_i}\ , \tag{3}$$

on désigne par $\mathcal{O}_{F/\mathfrak{p}}$ le complété de $\mathcal{O}_F$ en la place $\mathfrak{p}$, c'est l'anneau de valuation de $F_\mathfrak{p}$, on introduit de même la notation $\mathcal{O}_{E/\mathfrak{P}_i}$, alors les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_{F/\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{O}_{E/\mathfrak{P}_i}$ sont respectivement engendrés par

$\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}_i$, on a

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_{E/\mathfrak{P}_i} = \mathfrak{P}_i^{e_i}\mathcal{O}_{E/\mathfrak{P}_i} \tag{4}$$

et l'on voit facilement que

$$[E_{\mathfrak{P}_i} : F_{\mathfrak{p}}] = e_i f_i \ , \tag{5}$$

où $f_i = [\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i} : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}]$; les formules (3) et (5) montrent que

$$[E : F] = \sum_{1\leq i\leq r} e_i f_i \ . \tag{6}$$

On dit que E est *inerte en* $\mathfrak{p}$ si tous les f_i valent 1. On dit que l'idéal $\mathfrak{p}$ est *totalement décomposé dans* E si les e_i et les f_i sont tous égaux à 1.

Il faut noter que le vocabulaire ramifié, inerte, etc., est utilisé aussi pour les corps obtenus par complétions des corps de nombres aux places finies, alors on a toujours $r = 1$ (cf (4)) et les extensions inertes sont aussi dites *totalement ramifiées*. Lorsque l'extension E/F est galoisienne et est inserte on dit aussi qu'elle est totalement ramifiée, cela est expliqué dans le paragraphe suivant.

Par analogie les places à l'∞ réelles sont dites non ramifiées, les places complexes sont dites ramifiées d'indice de ramification 2.

2.1. **Les extensions galoisiennes.** Dans ce paragraphe on suppose que E/F est une extension galoisienne finie de corps de nombres et soit encore $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_r$ les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_E$ au dessus de $\mathfrak{p}$. Alors $\mathrm{Gal}(E/F)$ opère transitivement sur l'ensemble des $\mathfrak{P}_i$, donc les e_i et les f_i ne dépendent plus de i, on a

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_E = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r)^e \ , \ [E : F] = ref \ , \tag{7}$$

et, pour tout i, $[\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i} : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}] = f$.

Désignons par $\mathfrak{P}$ l'un des $\mathfrak{P}_i$ et soit

$$D(\mathfrak{P}) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F) \ / \ \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\} \ ,$$

c'est un sous groupe de $\mathrm{Gal}(E/F)$ appelé le *groupe de décomposition de* $\mathfrak{P}$. On a des morphismes naturels

$$D(\mathfrak{P}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E(\mathfrak{P})/F(\mathfrak{p}) \ , \tag{8}$$

le premier étant un isomorphisme, le second étant surjectif. Le noyau, dans $D(\mathfrak{P})$, du morphisme composé se note $I(\mathfrak{P})$ et s'appelle *le groupe d'inertie de* $\mathfrak{P}$; les considérations précédentes permettent d'affirmer que

$$\circ(D(\mathfrak{P}) = \circ(\mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}})) = ef \ , \ \circ(I(\mathfrak{P})) = e \tag{9}$$

et rappelons que $\circ(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) = f$.

2.2. **Le symbole d'Artin.** On suppose toujours que E/F est une extension galoisienne finie de corps de nombres, soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de E au dessus de $\mathfrak{p}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$ est engendré par le morphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$, c'est à dire, si $q_{\mathfrak{p}} = \sharp(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$, par le morphisme $x \mapsto x^{q_{\mathfrak{p}}}$. Soit $\sigma \in D(\mathfrak{P})$ qui relève ce morphisme de Frobenius. On écrit

$$\sigma = (\mathfrak{P}, E/F) \ ,$$

il faut remarquer que ceci n'est défini qu'à la conjugaison près par un élément de $I(\mathfrak{P})$, donc est bien défini si $\mathfrak{P}$ n'est pas ramifié sur $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{P}'$ un autre idéal de E au dessus de $\mathfrak{p}$, alors il existe $\tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$ tel que $\tau(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}'$, donc

$$D(\mathfrak{P}') = \tau D(\mathfrak{P})\tau^{-1} \ , (\mathfrak{P}', E/F) = \tau(\mathfrak{P}, E/F)\tau^{-1} \ .$$

Ainsi à tout premier $\mathfrak{p}$ de F on associe une classe de conjugaison de $\mathrm{Gal}(E/F)$, notée $(\mathfrak{p}, E/F)$ et appelée le *symbole d'Artin de* $\mathfrak{p}$ *dans* E, on a

$$(\mathfrak{p}, E/F) = \{(\mathfrak{P}, E/F) \ / \ \mathfrak{P} \cap F = \mathfrak{p}\} \ ,$$

si $\mathfrak{p}$ est non ramifié dans E chaque élément $(\mathfrak{P}, E/F)$ de $(\mathfrak{p}, E/F)$ est d'ordre $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = [\mathbb{F}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}]$, le degré résiduel de l'extension E/F en $\mathfrak{P}$.

Si l'extension E/F est abélienne, la classe $(\mathfrak{P}, E/F)$ est réduite à un seul élément et ne dépend que de $\mathfrak{p}$, de même $D(\mathfrak{P})$ ne dépend que de $\mathfrak{p}$ et on le note $D(\mathfrak{p})$, le symbole d'Artin se note aussi $(\mathfrak{p}, E/F)$, c'est un élément de $D(\mathfrak{p})$.

Les symboles d'Artin jouent un rôle important, comme le montre le résultat suivant : soit E/F une extension galoisienne de corps de nombres, alors le nombre de places ramifiées de F dans E est fini. Par exemple, si $E = F[T]/P(T)$, où $P(T)$ est un élément irréductible de $F[T]$, avec des hypothèses suffisamment génériques, les places finies de F ramifiées dans E sont celles qui divisent le discriminant de $P(T)$, cf [6], I, § 8, p. 25.

2.3. **Le groupe des classes d'idéaux.** On appelle idéal fractionnaire de F tout sous-$\mathcal{O}_F$-module I de F tel qu'il existe $\lambda \in F^\times$ avec $\lambda I \subset \mathcal{O}_F$. Les idéaux fractionnaires non nuls forment un groupe multiplicatif, soit

$$C_F = \{\text{groupe des idéaux fractionnaires non nuls de F}\}/F^\times \ ,$$

($F^\times$ est ici une manière rapide d'écrire l'ensemble des idéaux fractionnaires principaux) c'est le *groupe des classes d'idéaux de* F, il est fini, son ordre s'appelle *le nombre de classes de* F.

Par exemple le nombre de classes de $\mathbb{Q}$ est 1, de même pour celui de $\mathbb{Q}(i)$, mais celui de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ est 2 (ce n'est pas évident à montrer !).

La détermination du nombre de classes d'un corps denombre est en général difficile.

Pour tout nombre premier impair soit $\zeta_p \in \mathbb{C}$ une racine primitive p-ème de l'unité, on sait depuis la fin du 19ème siècle démontrer le Théorème de Fermat pour l'exposant p lorsque le corps $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ est de nombre de classes 1, mais ceci n'est vrai que pour un nombre fini de p (Kummer). On pense d'ailleurs que se trouve là l'erreur de Fermat quand il affirma avoir prouvé son Théorème, d'avoir supposé, sans bien sûr le formuler dans les termes qui vont suivre, tous les $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ de nombre de classes 1, c'est à dire que leurs anneaux d'entiers $\mathbb{Z}(\zeta_p)$ soient factoriels (cf [12], commentaire en haut de la page 20, où cette opinion est renvoyée à C. L. Siegel). Lorsque le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ n'est pas divisible par p, on dit alors que le *nombre premier p est régulier*, Kummer a aussi démontré le Théorème de Fermat pour l'exposant p régulier, mais l'on ne sait pas grand chose de ces nombres premiers, on sait qu'il en existe mais on ne sait pas s'il sont en nombre infini([2]).

2.4. **Les adèles et les idèles.** Un bonne manière de regarder les idéaux d'un corps de nombre et les groupes des classes est d'introduire les adèles et les idèles.

La lettre F désigne toujours un corps de nombres, soit V_F ou V l'ensemble de ses places, pour toute place v on note F_v le complété de F, $\mathcal{O}_{F_v}$ ou $\mathcal{O}_v$, $\mathfrak{p}_{F_v}$ ou $\mathfrak{p}_v$ l'anneau et l'idéal de valuation de ce dernier lorque v est une place finie. Soit

$$\mathbb{A}_F = \{(x_v)_{v\in V} \in \prod_{v\in V} F_v \ / \ x_v \in \mathcal{O}_v \text{ pp } \}$$

(pp signifie “presque partout”, c'est à dire “pour tous sauf un nombre fini”)

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F) = \{(x_v)_{v\in V} \in \prod_{v\in V} \mathrm{GL}(n, F_v) \ / \ x_v \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_v) \text{ pp } \}$$

Une base de voisinages ouverts de $\underline{0} \in \mathbb{A}_F$ est donnée par la famille des $\prod_{v\in V} U_v$, où U_v est un voisinage ouvert de $0 \in F_v$ et $U_v = \mathcal{O}_v$ pp. Ceci fait de $\mathbb{A}_F$ un anneau topologique. De même une base d'ouverts de $\underline{1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ est donnée par les $\prod_{v\in V} U_v$, où cette fois U_v est un voisinage ouvert de $1 \in \mathrm{GL}(n, F_v)$ et $U_v = \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_v)$ pp. Ceci fait de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ un groupe topologique.

2. Mais le Théorème de Fermat est démontré, par A. Wiles, 1995, par des méthodes qui relèvent du monde automorphe.

On dit que $\mathbb{A}_F$ est *l'anneau des adèles de F, que ses éléments sont les adèles de F*. De même $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ est *le groupe des adèles de* $\mathrm{GL}(n, F)$, *ses éléments sont les adèles de* $\mathrm{GL}(n, F)$.

On ne considèrera $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ que pour $n = 1$ ou 2. Pour $n = 1$, $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A}_F)$ s'appelle le groupe des idèles de F et se note aussi $\mathbb{A}_F^\times$, mais cette notation est trompeuse car sa topologie n'est pas induite par celle de $\mathbb{A}_F$ ([3])

Les adèles ou idèles finis se définissent comme au dessus, mais en ne considérant que les places finies de F, ils se notent $\mathbb{A}_{F,f}$ ou $\mathbb{A}_f$, $\mathbb{A}_{F,f}^\times$ ou $\mathbb{A}_f^\times$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_{F,f})$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_f)$. On pose

$$\mathbb{O}_f = \prod_{v \text{ finie}} \mathcal{O}_v \ , \ \mathbb{K}_{f,n} = \prod_{v \text{ finie}} \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_v) \ ,$$

on écrira $\mathbb{K}_{f,1} = \mathbb{K}_f$; ce sont des sous-anneau ou sous-groupes ouverts compacts des adèles finis.

Tout ce qui a été fait pour $\mathrm{GL}(n)$ peut l'être aussi pour $\mathrm{SL}(n)$.

Étant donné un idèle $\underline{x} = (x_v)$ on peut définir sa norme : $|\underline{x}| = \prod_{v \in V} |x_v|_v$, où $|\cdot|_v$ est la valeur absolue v-adique de F ainsi normalisée, c'est la valeur absolue usuelle si v est une place infinie, aux places finies, si π_v est une uniformisante de F_v, on a $|\pi_v|_v = 1/q_v$ où q_v est le cardinal du corps des restes de F_v. Le groupe des idèles de norme 1 est noté $\mathbb{A}_{F,1}^\times$ ou $\mathbb{A}_1^\times$.

Proposition 2.1.

(1) *Les morphismes canoniques $F \to F_v$ font de F un sous-anneau discret de $\mathbb{A}_F$, le quotient $F \backslash \mathbb{A}_F$ est compact.*

(2) *Les morphismes canoniques $F^\times \to F_v^\times$ font de $F^\times$ un sous-groupe discret de $\mathbb{A}_1^\times$ et le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}_1^\times$ est compact.*

(3) $\mathrm{SL}(n, F)$ *est discret dans* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{A}_F)$ *et le quotient* $\mathrm{SL}(n, F) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{A}_F)$ *est compact.*

Les deux premières assertions sont montrées dans [2], la troisième dans [**?**].

Soit I un idéal fractionnaire de F, soit v une place finie de F. L'idéal fractionnaire $I\mathcal{O}_v$ de F_v est principal, on voit qu'à I on peut associer un élément de $\mathbb{A}_f^\times / \mathbb{K}_f$. On voit que l'on a un isomorphisme de groupes

$$C_F \simeq F^\times \backslash \mathbb{A}_f^\times / \mathbb{K}_f \ , \tag{10}$$

de plus, pour une place finie v de F , les sous-$\mathcal{O}_v$-modules projectifs de F_v^n étant à isomorphismes près de la forme $\mathcal{O}_v^{n-1} \times I_v$, où I_v est un

3. Soit $F = \mathbb{Q}$, pour tout nombre premier p soit $u_p = (x_v^{(p)})_{v \in V}$ défini par $x_v^{(p)} = 1$ si $v \neq p$ et $x_p^{(p)} = p$, alors la suite (u_p) converge vers $\underline{1}$ dans $\mathbb{A}_F$ mais pas dans $\mathbb{A}_F^\times$.

idéal fractionnaire de F_v, on a de même une bijection

$$C_F \rightleftarrows \mathrm{GL}(n, F)\backslash\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_f)/\mathbb{K}_{f,n}\ . \tag{11}$$

3. Théorie du corps de classes abélien

3.1. Théorie du corps de classes abélien global. Elle fut développée entre 1850 et 1927, par Kronecker, Weber, Hilbert, Takagi, Artin...

3.1.1. *Les extensions abéliennes non ramifiées.* La lettre F désigne un corps de nombres. Soient C_F son groupe des classes d'idéaux et H l'un de ses sous-groupes. On dit qu'*une extension E de F est un corps de classes pour H* si

(1) l'extension E/F est abélienne et finie,
(2) l'extension E/F est non ramifiée, y compris à l'∞,
(3) les idéaux de F qui se décomposent dans L sont mod. $F^\times$ dans H.

Théorème 3.1. *Un corps de classes E existe pour tout sous groupe H de C_F, il est unique (une fois fixée une clôture algébrique F^{alg}) et $C_F/H \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$.*

Toute extension vérifiant (1) et (2) est le corps de classes pour un certain sous-groupe de C_F.

L'isomorphisme $C_F/H \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$ consiste à associer son symbole d'Artin à tout idéal premier de F qui n'est pas dans H.

Si $H = \{1\}$, le corps de classes L pour H s'appelle le corps de classes de Hilbert, son existence a été conjecturée par Hilbert (1897) et prouvée par Furtwängler (1907). C'est la plus grande extension de F non ramifiée partout, y compris à l'∞, les idéaux premiers de F qui s'y décomposent sont les idéaux premiers principaux, son groupe de Galois sur F est isomorphe à C_F.

Ce théorème montre bien quelle est la quête sous-jacente à ce type de démarches : décrire les groupes de Galois entre corps de nombres en termes du corps de base. Ceci s'appelle une loi de réciprocité.

3.1.2. *Les extensions abéliennes ramifiées.* Soit F un corps de nombres. Un *module $\mathfrak{M}$ sur F* est une application

$$\mathfrak{M} : \{\text{places de } F\} \to \mathbb{Z}$$

telle que

(1) $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) \geq 0$ et $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) = 0$ pp,

(2) $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) = 0$ ou 1 si $\mathfrak{p}$ est une place réelle,

(3) $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) = 0$ si $\mathfrak{p}$ est une place complexe.

On écrit usuellement $\mathfrak{M} = \prod \mathfrak{p}^{\mathfrak{M}(\mathfrak{p})}$.

Soient $S = S(\mathfrak{M})$ l'ensemble des places finies avec $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) > 0$, I^S le groupe engendré par les idéaux premiers qui ne sont pas dans S,

$$F_{\mathfrak{M}} = \{a/b \in F \ / \ a, b \in \mathcal{O}_F \ , \ (a), (b) \in I^S\} \ ,$$

$$F_{\mathfrak{M},1} = \{\alpha \in F_{\mathfrak{M}} \ / \ \alpha - 1 \equiv 0 \text{ mod. } \mathfrak{p}^{\mathfrak{M}(\mathfrak{p})} \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in S$$

$$\text{et } \alpha > 0 \text{ pour toute place réelle } \mathfrak{p} \text{ avec } \mathfrak{M}(\mathfrak{p}) > 0\} \ .$$

Le groupe $C_{\mathfrak{M}} := I^S/F_{\mathfrak{M},1}$ s'appelle *le groupe des classes de rayon* $\mathfrak{M}$ *de* F.

Soit H un sous-groupe du groupe des classes de rayon $\mathfrak{M}$ de F. Une extension E/F est appelée un corps de classes pour H (Weber 1897) si

(1) l'extension E/F est abélienne et finie,

(2) si $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) = 0$ alors $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifié dans E,

(3) les idéaux premiers qui ne sont pas dans S et qui se décomposent dans E sont ceux de I^S qui mod. $F_{\mathfrak{M},1}$ sont dans H.

Théorème 3.2. *(Takagi, 1915-1922) Pour tout sous-groupe* H *de* $C_{\mathfrak{M}}$ *il existe un corps de classes pour* H*, il est unique (une fois fixée une clôture algébrique* F^{alg}*) et* $C_{\mathfrak{M}}/H \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$*.*

Toute extension abélienne finie est le corps de classes pour un certain module $\mathfrak{M}$ *et un certain sous-groupe* H *de* $C_{\mathfrak{M}}$*.*

Pour $H = \{1\}$, le corps obtenu s'appelle le corps de classes de rayon $\mathfrak{M}$, son groupe de Galois sur F est isomorphe à $C_{\mathfrak{M}}$.

Ici aussi l'isomorphisme $C_{\mathfrak{M}}/H \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$ provient du symbole d'Artin. Que ce soit pour ce dernier théorème ou dans le paragraphe précédent, presque rien n'est dit des démonstrations, il ne faudrait pas qu'il en résulte des illusions de simplicité ([4]).

4. La théorie du corps de classes a une réputation de difficulté qui est en partie justifiée. Mais il faut faire une distinction : il n'est peut-être pas en effet dans la science de théorie où tout à la fois les démonstrations soient aussi ardues, et les résultats d'une aussi parfaite simplicité et d'une aussi grande puissance. J. Herbrand, 1936, cité par J.S. Milne ([10]).

3.2. **La théorie du corps de classes abélien local.** Soit F un corps local non archimédien, c'est à dire ici le complété d'un corps de nombres en une place finie (mais ce que nous disons vaut aussi pour les corps de fonctions). Le compositum, dans uns clôture algébrique F^{alg} fixée de F, de deux extensions abéliennes de F est encore une extension abélienne, ainsi

$$\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F) \simeq \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{alg}}/F)/\{\text{commutateurs}\}^{\mathrm{adh}} .$$

Soit E/F une extension finie non ramifiée, désignons par $\widetilde{F}$, $\widetilde{E}$, les corps des restes, on a

$$\mathrm{Gal}(E/F) \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{E}/\widetilde{F}) ,$$

le compositum de deux extensions non ramifiées l'est encore, d'où l'existence de l'extension maximale non ramifiée F^{nr} (dans F^{alg} fixée), elle est abélienne, elle vérifie

$$\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F) \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{F}^{\mathrm{alg}}/\widetilde{F}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} ,$$

où $\widehat{\mathbb{Z}}$ est le complété de $\mathbb{Z}$ suivant la topologie pour laquelle les voisinages de 0 sont les idéaux ; on a $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_p \mathbb{Z}_p$, le produit étant pris sur tous les nombres premiers.

Théorème 3.3. *Soit F un corps local non archimédien,, alors il existe un unique homomorphisme*

$$\phi_F : F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$$

tel que

(1) *pour toute uniformisante ϖ de F et toute extension finie E/F non ramifiée,*

$$\phi_F(\varpi)|E = \mathrm{Frob}_F|E ;$$

(2) *pour toute extension finie abélienne E/F, ϕ_F induit un isomorphisme*

$$\phi_{E/F} : F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \longrightarrow \mathrm{Gal}(E/F) ,$$

c'est à dire que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^\times & \xrightarrow{\phi_F} & \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) & \xrightarrow{\phi_{E/F}} & \mathrm{Gal}(E/F) \end{array}$$

les flèches verticales étant des surjections.

Proposition 3.4. *Un sous-groupe N de $F^\times$ s'écrit $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ si et seulement si il est ouvert et d'indice fini.*

Comme F est de caractéristique 0, tous les sous-groupes de $F^\times$ d'indices finis sont ouverts. En effet, soit N un tel sous-groupe, donc il existe un entier $n > 0$ tel que $F^* \supset N \supset (F^*)^n$ et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, si $x \in F$ vérifie $|x| \leq \varepsilon$, alors $1 + x \in (F^*)^n$ comme le montre la relation suivante

$$(1+x)^{1/n} = \sum_{i \leq 0} \binom{n}{i} x^i \ .$$

Cet argument est faux en caractéristique positive, d'ailleurs il existe alors des sous-groupes de $F^\times$ d'indices finis et non ouverts.

3.2.1. *Quelques remarques.* (1) Pour tout élément u de $\mathcal{O}_F$ on a $\phi_F(\varpi u)|F^{\mathrm{nr}} = \phi_F(\varpi)$, donc $\phi_F(u)|F^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Id}$, il vient la factorisation de ϕ_F (où v_F désigne la valuation de F, telle que $v_F(\varpi) = 1$)

$$\begin{array}{ccccccc} \phi_F : & F^* & \xrightarrow{v_F} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F) \\ & \lambda & \longmapsto & v_F(\lambda) & & \\ & & & n & \longmapsto & \mathrm{Frob}_F^n \end{array}$$

(2) Soit F_m l'extension non ramifiée de F de degré m (dans un clôture algébrique de F fixée), le noyau de $F^\times \to \mathrm{Gal}(F_m/F)$, $\lambda \mapsto \phi_F(\lambda)|F_m$, est $\mathcal{O}_F^\times \varpi^{m\mathbb{Z}}$, donc

$$\mathrm{N}_{F_m/F}(F_m^\times) = \mathcal{O}_F^\times \varpi^{m\mathbb{Z}} \ .$$

(3) On a un isomorphisme algébrique et topologique, où $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète,

$$F^\times \simeq \mathcal{O}_F^\times \times \mathbb{Z} \ .$$

les sous-groupes $(1 + \varpi^n \mathcal{O}_F) \times m\mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$, sont ouverts et d'indices finis, ils forment une base de voisinages de l'élément neutre. Soit E/F une extension abélienne finie, le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \supset 1 + \varpi^n \mathcal{O}_F$ s'appelle *le conducteur de l'extension E/F* (on pose $1 + \varpi^0 \mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F^\times$). Donc l'extension E/F est non ramifiée si et seulement si son conducteur est 0, elle est modérément ramifiée (i.e. son indice de ramification n'est pas divisible par la caractéristique résiduelle) si et seulement si son conducteur est ≤ 1.

(4) Soit $\widehat{F^\times}$ le complété de $F^\times$ pour la topologie normique, c'est à dire la topologie dont une base d'ouverts de l'unité est formée des sous groupes de la forme $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ où E/F est une extension abélienne finie (dans notre cas ce sont tous les sous-groupes de $F^\times$ d'indices finis). les résultats précédant disent que l'on a un isomorphisme venant de ϕ_F et noté de même

$$\phi_F : \widehat{F^\times} \simeq \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F) \ .$$

La suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times \longrightarrow F^\times \xrightarrow{v_F} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donne

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times \longrightarrow \widehat{F^\times} \xrightarrow{v_F} \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

et l'on a un isomorphisme algébrique et topologique, dépendant du choix de l'uniformisante ϖ,

$$\widehat{F^\times} \simeq \mathcal{O}_F^\times \times \varpi^{\widehat{\mathbb{Z}}} ,$$

ceci est une décomposition de $\widehat{F^\times} \simeq \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ en deux sous-groupes fermés, il suit une décomposition

$$F^{\mathrm{ab}} = F_\varpi F\mathrm{nr} \text{ avec } F_\varpi = (F^{\mathrm{ab}})^{<\phi_F(\varpi)>} \text{ et } F^{\mathrm{nr}} = (F^{\mathrm{ab}})^{<\phi_F(\mathcal{O}_F^\times)>} .$$

Le corps F_ϖ est la réunion des extensions finies abéliennes E telles que $\varpi \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, qui sont nécessairement totalement ramifiées. Il faut noter que F_ϖ dépend de ϖ, une construction explicite est donnée par Lubin-Tate ([9], voir aussi [10]), en particulier il n'existe pas “une extension maximale ramifiée”, par exemple, si p et ℓ sont deux nombres premiers distincts, alors $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$ et $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p\ell})$ sont totalement ramifiés sur $\mathbb{Q}_p$, mais leur compositum $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p}, \sqrt{p\ell}) = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}, \sqrt{\ell})$ ne l'est pas.

3.3. **La théorie du corps de classes abélien : interprétation adèlique.** Ce paragraphe est la transcription adèlique des résultats précédents, c'est en fait la bonne manière d'écrire la théorie du corps de classes mais ces notes sont sans doute trop brèves pour que cela apparaisse vraiment ; tout approfondissement demande certainement un retour aux textes importants.

Soit F un corps de nombres.

Proposition 3.5. *Il existe un unique homomorphisme continu*

$$\phi_F : \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$$

possédant la propriété suivante : pour toute sous-extension E/F de F^{ab}/F, pour toute place v finie et toute place w de E au dessus de v, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_v^\times & \xrightarrow{\phi_v} & \mathrm{Gal}(E_w/F_v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F) & \xrightarrow{a \mapsto \phi_F(a)|E} & \mathrm{Gal}(E/F) \end{array}$$

est commutatif, où ϕ_v provient de la théorie du corps de classes abélien local et où $\mathrm{Gal}(E_w/F_v)$ *est identifié au groupe de décomposition de v dans* $\mathrm{Gal}(E/F)$.

L'application ϕ_F est ainsi définie. Soit $\underline{a} = (a_v) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$, on a $a_v \in \mathcal{O}_v^\times$ pp et v ne se ramifie pas pp, donc $\phi_v(a_v) = 1$ pp et l'on peut définir

$$\phi_F(\underline{a}) = \prod_v \phi_v(a_v) \ .$$

L'homomorphisme ϕ_F de cette proposition s'appelle *l'application d'Artin de F.*

Théorème 3.6. *L'homomorphisme ϕ_F possède les propriétés suivantes.*

(1) $\phi_F(F^\times) = \{1\}$,

(2) *pour toute sous-extension finie E/F de F^{ab}/F, l'homomorphisme ϕ_F induit un isomorphisme*

$$\phi_{E/F} : \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_E)) \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$$

où, si $\underline{b} = (b_w) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_E)$, $\mathrm{N}_{E/F}(\underline{b}) = (\prod_{w|v} \mathrm{N}_{E_w/F_v})_v \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$.

Proposition 3.7. *pour tout sous-groupe ouvert N de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/F^\times$, d'indice fini, il existe une unique (dans une clôture algébrique F^{alg} fixée) extension abélienne E/F telle que*

$$\mathrm{N}_{E/F}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_E)/E^\times) = N \ .$$

En inégale caractéristique, i.e. lorsque F est un corps de nombres, ce qui est supposé ici, les sous groupes d'indices finis de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/F^\times$ sont ouverts. Ceci est faux dans le cas d'égale caractéristique, i.e. lorque F est un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini.

En inégale caractéristique, l'application d'Artin ϕ_F est surjective et n'est pas injective (cela vient des places à l'∞) ; en inégale caractéristique elle est injective et non surjective, mais à image dense.

4. Séries de Dirichlet, caractères de Hecke, fonctions L

Pour ce paragraphe les références sont [6], [1], [11] et [**?**].

Une série est dite *de Dirichlet* si elle est de la forme

$$f(s) = \sum_{n>0} \frac{a_n}{n^s} \ ,$$

où s est un nombre complexe et (a_n) une suite de nombres complexes, on suppose de plus qu'elle converge pour un certain s_0, auquel cas il n'est pas difficile de montrer qu'elle converge pour tout nombre complexe s tel que $\Re s \geq \Re s_0$.

Une fonction L est une série de Dirichlet qui admet un *développement en produit eulérien* et vérifie une *équation fonctionnelle*.

Par exemple la fonction Zêta de Riemann (voir aussi par exemple [**?**], ch. XVII ou [**?**])

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} 1/n^s$$

est une fonction L, son produit eulérien est

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

elle se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, d'ailleurs certains de ses zéros sont célèbres, son équation fonctionnelle est la suivante : soit

$$Z(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \ ,$$

alors

$$Z(s) = Z(1-s) \ .$$

Une idée de la démonstration de ces résultats est donnée dans le paragraphe suivant.

4.1. **Fonctions L de Dirichlet.** Soit $N > 0$ un entier, un *caractère de Dirichlet* est un caractère χ de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ que l'on étend à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en attribuant la valeur 0 aux éléments non inversibles, puis que l'on relève à $\mathbb{Z}$ par la surjection canonique. S'il n'existe pas de diviseur N_1 de N tel que χ provienne, via la surjection canonique $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}$, d'un caractère de $(\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z})^\times$, on dit que χ est *primitif* et qu'il est de *conducteur* N.

Si χ est un caractère de Dirichlet, on définit la *fonction* L *de Dirichlet* par

$$L(s,\chi) = \sum_{n>0} \frac{\chi(n)}{n^s} \ ,$$

clairement, on a le produit eulérien

$$L(s,\chi) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \ .$$

Avant d'énoncer l'équation fonctionnelle de ces fonctions L nous rappelons ce qu'est une somme de Gauß. Si χ est un caractère de Dirichlet modulo l'entier $N > 0$, primitif, la somme de Gauß de χ est

$$\tau(\chi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(m) e^{2i\pi m/N} \ ,$$

les principales propriétés de ces sommes seront énoncées après l'équation fonctionnelle, que voici

Théorème 4.1. *Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur N et posons $\chi(-1) = (-1)^\varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1. Soit*

$$\Lambda(s,\chi) = \pi^{(s+\varepsilon)/2}\Gamma\left((s+\varepsilon)/2\right)\mathrm{L}(s,\chi)\ ,$$

alors $\Lambda(s,\chi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, qui est

– holomorphe si $\chi \neq 1$,

– dont les seuls pôles sont $s = 0$ et $s = 1$ et sont simples, si $\chi = 1$.

On a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s,\chi) = (-i)^\varepsilon \tau(\chi) N^{-s}\Lambda(1-s,\overline{\chi})\ .$$

La démonstration procède ainsi (cf [1], § 1.1). D'abord, grâce aux sommes de Gauß on prolonge χ à tout les nombres réels. On montre facilement que pour tout entier n

$$\overline{\chi(n)}\tau(\chi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(m)e^{2i\pi nm/N}\ , \tag{12}$$

dont on déduit (par la formule $\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = |\tau(\chi)|^2$)

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{N}\ . \tag{13}$$

Il résulte de la formule (12) que

$$\chi(n) = \tau(\overline{\chi})^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \overline{\chi(m)}e^{2i\pi nm/N}\ ,$$

qui donne avec (13) (et du fait que $\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)\overline{\tau(\chi)}$)

$$\chi(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \overline{\chi(m)}e^{2i\pi nm/N}\ , \tag{14}$$

le membre de droite de cette dernière relation est défini pour tout n réel, il fournit donc une interpolation de χ.

Dans toute la suite de ces commentaires sur la démonstration de l'équation fonctionnelle on suppose que $\chi \neq 1$, en effet si $\chi = 1$ on a $N = 1$ et la fonction L est alors la fonction zêta de Riemann.

On définit la fonction θ_χ de la variable t telle que $\Re(t) > 0$, par les formules

– si $\chi(-1) = 1$

$$\theta_\chi(t) = 1/2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\chi(n)e^{-\pi n^2 t} = 1/2\chi(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\chi(n)e^{-\pi n^2 t}\ , \tag{15}$$

– si $\chi(-1) = -1$

$$\theta_\chi(t) = 1/2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\chi(n)e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=1}^{+\infty}n\chi(n)e^{-\pi n^2 t}\ . \tag{16}$$

Soit f une fonction de la variable réelle, suffisamment régulière, alors on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(n)f(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\chi(n)}\widehat{f}(n/N) \tag{17}$$

($\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f), en effet, soit

$$g(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \overline{\chi(m)}e^{2i\pi nm/N} f(n) \ ,$$

on a $\chi(n)f(n) = g(n)$ d'après (14) et on applique la formule de Poisson.

Cette formule (17) appliquée à θ_χ donne

$$\theta_\chi(t) = \frac{(-i)^\varepsilon\tau(\chi)}{N^{1+\varepsilon}t^{\varepsilon+1/2}}\theta_{\overline{\chi}}(\frac{1}{N^2t}) \tag{18}$$

avec $\varepsilon = 0$ si $\chi(-1) = 1$ et $\varepsilon = 1$ si $\chi(-1) = -1$.

Il suit en particulier de cette dernière formule que la transformée de Mellin

$$\int_0^{+\infty} \theta_\chi(t)t^{(s+\varepsilon)/2}\frac{dt}{t} \tag{19}$$

converge pout tout s, donc si $\Re(s) > 1$, la formule (presque) classique

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi tm^2}t^{(s+\varepsilon)/2}\frac{dt}{t} = \pi^{-(s+\varepsilon)/2}\Gamma((s+\varepsilon)/2)m^{-s-\varepsilon}$$

montre que (cf (19))

$$\int_0^{+\infty} \theta_\chi(t)t^{(s+\varepsilon)/2}\frac{dt}{t} = \Lambda(s,\chi) \ . \tag{20}$$

Comme (19) est définie pour tout s, il vient le prolongement holomorphe de $\Lambda(s,\chi)$. Avec (18) et faisant le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{N^2t}$ dans (19) il vient l'équation fonctionnelle.

Ceci résume la démonstration du prolongement et de l'équation fonctionnelle des fonctions L de Dirichlet. L'intervention de l'analyse de Fourier est certainement lourde de sens, cela apparaitra mieux encore dans le chapitre suivant.

4.2. **Fonctions zêta de Dedekind, caractères de Hecke, fonctions L.**

4.2.1. *Les fonctions zêta de Dedekind.* Soit F un corps de nombres, si $\mathfrak{a}$ est un idéal entier de $\mathcal{O}_F$, i.e. $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F$, $\mathfrak{a} \neq 0$, on pose $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = \sharp(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$. La *fonction zêta de Dedekind du corps de nombres* F est

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^s} \ , \tag{21}$$

où $\mathfrak{a}$ décrit les idéaux entiers non nuls de F. On voit facilement que ces séries convergent pour $\Re(s) > 1$ et qu'elles s'écrivent suivant les produits eulériens

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \left(1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1} \ , \tag{22}$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux premiers non nuls de $\mathcal{O}_F$. Ces fonctions zêta admettent des prolongements méromorphes à tout le plan complexe et des équations fonctionnelles, des preuves, dans le même esprit que celle résumée au dessus pour les fonctions L de Dirichlet, sont données dans [11], Ch. VII, § 5. Nous n'en dirons rien ici, seulement l'énoncé des résultats, car ils sont redémontrés dans la thèse de Tate, cf ch. 5.

4.2.2. *Les Größencharacteren.* Soit F un corps de nombres, de degré n sur $\mathbb{Q}$, rappelons que $n = r_1 + 2r_2$ où r_1 est le nombre de places réelles de F et r_2 celui de ses places complexes, en particulier $r_1 + 2r_2$ est le cardinal de l'ensemble des homomorphismes de corps (donc non nuls) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$.

Soient $\mathfrak{m}$ un idéal entier non nul de F et $I^{\mathfrak{m}}$ le groupe des idéaux fractionnaires de F premiers avec $\mathfrak{m}$. Les caractères χ de $I^{\mathfrak{m}}$ sont supposés unitaires et sont prolongés à tout le groupe I des idéaux fractionnaires de F par $\chi(\mathfrak{a}) = 0$ si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{a}$ ne sont pas premiers entre eux.

Définition 4.2. *Soient* $\mathfrak{m}$ *un idéal entier non nul de* F *et* χ *un caractère de* $I^{\mathfrak{m}}$. *On dit que c'est un Größcharachter s'il existe deux caractères continus unitaires,* χ_f *de* $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^*$ *et* χ_∞ *de* $(\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2})^\times$, *tels que pour tout* $a \in \mathcal{O}_F$, *a premier avec* $\mathfrak{m}$, *l'on ait*

$$\chi((a)) = \chi_f(a)\chi_\infty(a) \ .$$

Expliquons l'expression $\chi_\infty(a)$, pour $a \in F^\times$. Notons les plongements de F dans $\mathbb{C}$

$$\tau_1, \cdots, \tau_{r_1}, \tau_{r_1+1}, \cdots, \tau_{r_1+r_2}, \overline{\tau_{r_1+1}}, \cdots, \overline{\tau_{r_1+r_2}}$$

les r_1 premiers étant dans $\mathbb{R}$. Alors, pour $a \in F^\times$

$$\chi_\infty(a) = \chi_\infty\left(\tau_1(a), \cdots, \tau_{r_1}(a), \tau_{r_1+1}(a), \cdots, \tau_{r_1+r_2}(a)\right) \ .$$

Un caractère χ de $I^{\mathfrak{m}}$ est un Größencharacter mod. $\mathfrak{m}$ s'il existe un caractère continu et unitaire χ_∞ de $(\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2})^\times$ tel que, pour tout $a\in 1+\mathfrak{m}$, l'on ait $\chi((a))=\chi_\infty(a)$. En effet, alors, $\chi_f(a)=\chi((a))\chi_\infty(a)^{-1}$ définit un caractère de $(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times$.

Soit $\varepsilon\in 1+\mathfrak{m}$, on a $\chi_f(\varepsilon)=1$, donc $\chi_\infty(\varepsilon)=\chi((\varepsilon))=1$, par suite χ_∞ se factorise par $(\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2})^\times/(1+\mathfrak{m})$, c'est à dire à travers le quotient par $(\tau_1,\cdots,\tau_{r_1},\tau_{r_1+1},\cdots,\tau_{r_1+r_2})(1+\mathfrak{m})$.

Soit $a\in\mathcal{O}_F^\times$, on a

$$1=\chi((a))=\chi_f(a)\chi_\infty(a)\ ,$$

on peut montrer que toute paire (χ_f,χ_∞) de caractères unitaires continus de $(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times$ et $(\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2})^\times/(1+\mathfrak{m})$ respectivement, vérifiant la relation précédente, proviennent d'un Größencharacter mod. $\mathfrak{m}$.

Soit $\mathfrak{m}'$ un diviseur de $\mathfrak{m}$ (i.e. un sous-idéal non nul), soient χ' un Größencharacter mod. $\mathfrak{m}'$ et χ la restriction de χ' à $I^{\mathfrak{m}}$, alors χ_f se factorise par χ'_f. Lorsque pour χ, un Größencharacter mod. $\mathfrak{m}$, ceci ne se produit pas, c'est à dire que χ n'est pas la restriction d'un χ' mod. $\mathfrak{m}'$, pour un diviseur $\mathfrak{m}'$ de $\mathfrak{m}$, on dit que $\mathfrak{m}$ *est le conducteur de* χ *et on le note* $\mathfrak{f}_\chi$ *ou simplement* $\mathfrak{f}$.

Définition 4.3. *Un caractère de Hecke de F est un caractère continu unitaire de* $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/F^\times$*, c'est à dire du groupe des idèles de F quotienté par le plongement diagonal de $F^\times$.*

Un caractère de Hecke peut être vu comme défini sur $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$ et trivial sur $F^\times$, comme il est continu son noyau contient un ensemble de la forme $\underline{1}\times U_f$, $\underline{1}$ est l'élément unité de $\prod_{v|\infty}F_v$ (le produit des complétés de F pour toutes ses places à l'∞) et où $U_f=\prod_{v\not|\infty}U_v$, avec $U_v=\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_v)$ pp et $U_v=1+\mathfrak{p}_v^{n_v}$ pour les autres valuations v, où $n_v>0$ est un entier. Soit $\mathfrak{m}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$, où V décrit les valuations telles que $n_v>0$, on dit que $\mathfrak{m}$ est le module du caractère de Hecke.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal non nul entier de F, $\mathfrak{m}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$, on pose $U_f(\mathfrak{m})=\prod_{\mathfrak{p}}(1+\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}})$ que l'on considère dans $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$. On a une suite exacte (où $P_\mathfrak{m}$ désigne le groupe de idéaux principaux dans $I_\mathfrak{m}$)

$$1\longrightarrow(\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2})^\times/(1+\mathfrak{m})\xrightarrow{\alpha}\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/(F^\times U_f(\mathfrak{m}))\xrightarrow{\beta}I_\mathfrak{m}/P_\mathfrak{m}\longrightarrow 1\ ,$$

Soit ψ un caractère de Hecke de module $\mathfrak{m}$ et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ soit $\varpi_\mathfrak{p}$ une uniformisante en cette place, considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} I_\mathfrak{m} & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/(F^\times U_f(\mathfrak{m})) \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \underline{\varpi_\mathfrak{p}}=(1,\cdots,1,\varpi_\mathfrak{p},1,\cdots,1) \end{array}$$

avec la suite exacte précédente on peut montrer que $\psi\circ\delta$ est un Größencharacter mod. $\mathfrak{m}$ et qu'ainsi on a une bijection entre les caractères de Hecke de module $\mathfrak{m}$ et les Größencharacteren mod. $\mathfrak{m}$.

4.2.3. *Les fonctions L de Hecke.* Nous n'en donnons à peu près que la définition, au chapitre 5 nous pourrons constater que la vision adèlique et les caractères de Hecke, par opposition aux Großencharacteren, sont les bons points de vues.

Soient $\mathfrak{m}$ un idéal entier non nul de F et χ un caractère du groupe des idéaux de F modulo $\mathfrak{m}$, la fonction L pour le caractère χ est

$$\mathrm{L}(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathrm{N}(\mathfrak{a})^{s}}\ ,\tag{23}$$

où $\mathfrak{a}$ décrit les idéaux entiers non nuls de F et $\mathrm{N}(\mathfrak{a})=\sharp(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$. Cette fonction L converge uniformément et normalement pour $\Re(s)\geq 1+\delta$ pour tout $\delta>0$, et l'on a le produit eulérien

$$\mathrm{L}(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}\Big(1-\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}\Big)^{-1}\ ,\tag{24}$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux maximaux de F.

Lorsque χ est un Großencharacter mod. $\mathfrak{m}$, la fonction définie en (23) prend le nom de *fonction* L *de Hecke*, ses prolongement méromorphe et équation fonctionnelle sont établis dans [11], ch. VII, § 8, la méthode, comme d'ailleurs pour la fonction zêta de Dedekind, s'apparente à celle utilisée lors de l'étude de la fonction L de Dirichlet, mais c'est beaucoup plus compliqué. Nous retrouverons ces propriétés au chapitre 5, dans le résumé que nous donnons de la thèse de John Tate ([5]), et nous verrons que, grâce à la théorie du corps de classes abélien, les fonction L de Hecke et d'Artin, ces dernières décrites au paragraphe suivant, sont essentiellement les mêmes, ce qui en langage actuel s'appelle la correspondance de Langlands pour GL(1).

4.2.4. *Les fonctions L d'Artin.* Soit F/L une extension galoisienne finie de corps de nombres, de groupe de Galois G. Soient ρ une représentation de dimension finie de G (dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, comme toutes les représentations considérées ici) et χ_ρ son caractère (i.e. pour tout $g\in G$, $\chi_\rho(g)=\mathrm{Tr}(\rho(g))$). Soit $\mathfrak{P}$ un premier de F non ramifié sur L et posons $\mathfrak{P}\cap L=\mathfrak{p}$. Rappelons que $(\mathfrak{P},F/L)$ désigne un élément de G qui relève l'automorphisme de Frobenius de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{P}$ sur $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}$. Soit

$$\mathrm{L}_{\mathfrak{p}}(s,\rho)=\Big(\det\Big(1-\rho\left((\mathfrak{P},F/L)\right)\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\Big)\Big)^{-1}\ ,\tag{25}$$

5. Thèse écrite sous la dirsction d'Emil Artin, soutenue en 1950.

(où $\mathrm{N}(\mathfrak{p})$ est le cardinal de $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}$) c'est la fonction L locale de la représentation ρ, elle ne dépend que de $\mathfrak{p}$, et non des $\mathfrak{P}$ au dessus, car le symbole d'Artin $(\mathfrak{P}, F/L)$ est défini à conjugaison près.

Montrons qu'en fait cette fonction L locale ne dépend que de χ_ρ. Les valeurs propres de $\rho\left((\mathfrak{P}, F/L)\right)$ sont des racines de l'unité (car G est fini), désignons les par $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d$, où d est la dimension de ρ. On a

$$\left(\det\left(1-\rho\left((\mathfrak{P}, F/L)\right)\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{i=d}\left(1-\varepsilon_i\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$
$$= \prod_{i=1}^{i=d}\left(\sum_{m\geq 0}\varepsilon_i^m\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-ms}\right) = \exp\sum_{i=1}^{i=d}\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\varepsilon_i^m\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-ms}\right)$$
$$= \exp\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\chi_\rho\left((\mathfrak{P}, F/L)^m\right)\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-ms}\ .$$

La fonction L d'Artin de la représentation ρ (et de l'extension F/L) est

$$\mathrm{L}(s,\rho) = \prod_{\mathfrak{p}}\mathrm{L}_{\mathfrak{p}}(s,\rho) \tag{26}$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux de L qui ne se ramifie pas dans F. Cette fonction converge absolument et unifomément sur $\Re(s) \geq 1+\delta$, pour tout $\delta > 0$.

Si l'extension F/L est abélienne et ρ une représentation irréductible (donc de dimension 1), on retrouve la fonction L de Hecke, à un nombre fini de facteurs près, ceux des places ramifiées.

Les prolongements méromorphes à tout le plan complexe des fonctions L d'Artin ainsi que leurs équations fonctionnelles sont encore pour l'essentiel conjecturaux, nous en dirons quelques mots au § **??**.

5. La thèse de Tate : la correspondance de Langlands pour GL(1)

Alors que le programme de Langlands a été formalisé par ce dernier au milieu des années 60, John Tate, élève d'Emil Artin, fit une avancée remarquable dans ce sens lors de l'écriture de son Ph D en 1950. Avec la théorie abélienne du corps de classes, cette thèse donne la correspondance de Langlands pour GL(1). Nous la résumons ici, avec parfois des idées des démonstrations. Un exposé complet est donné par Tate lui-même dans [14], on peut aussi regarder par exemple [6], [1].

Soit F un corps de nombres. On commence par rappeler les définitions des mesures de Haar normalisées sur les complétés F_v et $F_v^\times$, où

v est une place de F et F_v le complété en cette place. On note d_v et $d_v^\times$ ces mesures sur F_v et $F_v^\times$ respectivement.

– Si $F_v = \mathbb{R}$, alors d_v est la mesure de Lebesgue et $d_v^\times$ vérifie $d_v^\times x = d_v x/|x|_v$, où $|\cdot|_v$ est la valeur absolue de $\mathbb{R}$.
– Si $F_v = \mathbb{C}$, alors d_v est encore la mesure de Lebesgue et $d_v^\times$ vérifie $d_v^\times x = d_v x/|x|_v$, où cette fois $|\cdot|_v$ est le carré de la norme de $\mathbb{C}$.
– Si F_v est non archimédien, d_v est sa mesure de Haar qui donne à $\mathcal{O}_v$ la mesure 1 et $d_v^\times$ vérifie $d_v^\times x = (1-1/q_v)^{-1} d_v x/|x|_v$, où $|\cdot|_v$ est la valeur absolue de F_v normalisée par $|\varpi_v| = q_v^{-1}$, ϖ_v étant une uniformisante de F_v et q_v le cardinal du corps des restes ; la mesure de $\mathcal{O}^\times$ est 1.

Il faut remarquer que toutes ces mesures vérifient, pour $f : F_v \to \mathbb{C}$ intégrable et $z \in F_v^\times$,

$$\int_{F_v} f(zx) d_v x = \int_{F_v} f(x)|z|_v^{-1} d_v x \ .$$

Lorsque F_v est archimédien *l'espace $S(F_v)$ de Schwartz* est celui des fonctions (à valeurs complexes) indéfiniment différentiables et à décroissances rapides ainsi que toutes leurs dérivées ; lorsque v est non archimédienne, *l'espace $S(F_v)$ de Schwartz-Bruhat* est celui des fonctions (à valeurs complexes) à supports compacts et localement constantes. On résumera ces propriétés en disant que *ces fonctions sont lisses. L'espace $S(\mathbb{A}_F)$ de Schwartz-Bruhat* est linéairement engendré par les fonctions $\prod_v \phi_v$, où $\phi_v \in S(F_v)$ et $\phi_v = 1_{\mathcal{O}_v}$ pp ($1_{\mathcal{O}_v}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_v$).

Soit H un groupe abélien localement compact, *un caractère est un homomorphisme continu $H \to \mathbb{C}^\times$, lorsqu'il est à image dans les nombres complexes de module 1 on dit que le caractère est unitaire.* Le groupe H^* des caractères unitaires de H est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, c'est aussi un groupe localement compact appelé *le dual de Pontriagin* de H ; on a un isomorphisme (algébrique et topologique) canonique $H \xrightarrow{\sim} H^*$ qui à h associe $\chi \mapsto \chi(h)$. Le dual d'un groupe compact est discret, le dual d'un groupe discret est compact.

Soient dh et $d^*\chi$ des mesures de Haar sur H et H^* respectivement, f une fonction intégrable sur H, la transformée de Fourier de f est la fonction sur H^* qui au caractère χ associe

$$\widehat{f}(\chi) = \int_H f(h)\chi(h) dh \ , \tag{27}$$

si $\widehat{f}$ est elle même intégrable sur H^* il existe une constante multiplicative rélle $C > 0$ telle que pour tout $h \in H$

$$f(-h) = C\ \widehat{\widehat{f}}(h)\ , \tag{28}$$

quitte à multiplier les mesures de Haar par des constantes positives non nulles, il est toujours possible d'avoir $C = 1$, on dit alors que *les mesures dh et $d^*\chi$ sont duales.*

Revenons au corps de nombre F. Pour toute place v de F on a un isomorphisme (algébrique et topologique), donné par un caractère unitaire $\psi_v \in F_v^*$ non trivial

$$F_v \xrightarrow{\sim} F_v^*\ ,\ x \longmapsto (z \mapsto \psi_v(zx))$$

et il se produit le même phénomène pour l'anneau des adèles $\mathbb{A}_F$, mais avant de l'énoncer nous précisons les caractères (additifs) de ce dernier. Soit ψ un caractère unitaire (continu) du groupe additif $\mathbb{A}_F$, on le restreint aux adèles finis, alors la continuité de $\psi|\mathbb{A}_f$ montre que son noyau contient un voisinage ouvert de $\underline{0} \in \mathbb{A}_f$, il suit que $\psi_v := \psi|F_v$ est non ramifié pp (i.e. est trivial sur $\mathcal{O}_v$ pp). Ceci permet d'écrire

$$\psi = \prod_v \psi_v \text{ où pour toute place } v \quad \psi_v := \psi|F_v \text{ et } \psi_v \text{ non ramifié pp.}$$

Soit ψ un caractère unitaire non trivial du goupe additif $\mathbb{A}_F$, alors on a un isomorphisme (algébrique et topologique)

$$\mathbb{A}_F \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_F^*\ ,\ x \longmapsto (z \mapsto \psi(zx))\ .$$

Que ce soit pour les corps F_v, resp. $\mathbb{A}_F$, par les isomorphismes justes décrits, les transformées de Fourier deviennent des fonction sur le même corps, resp. sur $\mathbb{A}_F$, elles dépendent du choix du caractères donnant les isomorphismes $F_v \simeq F_v^*$, resp. $\mathbb{A}_F \simeq \mathbb{A}_F^*$ (cf (27)). Lorsque la constante C de (28) est 1 pour la même mesure, on dit que cette dernière est *autoduale*. La transformée de Fourier d'un élément de $S(F_v)$, resp. $S(\mathbb{A}_F)$, est un élément du même espace. Écrivons encore $\psi = \prod_v \psi_v$, alors *pour chaque ψ_v non ramifié, donc pp, la mesure d_v est autoduale*, puisque la fonction $1_{\mathcal{O}_v}$ est invariante par la transformée de Fourier relative à ψ_v.

Un *caractère de Hecke de F* est un caractère unitaire (continu) de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. C'est une notion proche de celle de caractère de Dirichlet, on explicite ceci pour $F = \mathbb{Q}$.

Proposition 5.1. *On suppose $F = \mathbb{Q}$.*

(1) *Soit χ un caractère de Hecke de $\mathbb{Q}$, alors il existe un caractère χ_1 de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times$ d'ordre fini et $\lambda \in i\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$,*

$$\chi(\underline{x}) = \chi_1(\underline{x})|\underline{x}|^\lambda$$

($|\cdot|$ est la norme adèlique $\prod_v |\cdot|_v$, le produit étant étendu à toutes les places).

(2) *Soit χ un caractère d'ordre fini de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times$, alors il existe un entier N, dont les facteurs premiers sont les places finies où χ est ramifié, et il existe un caractère de Dirichlet χ_0 mod. N, primitif, tel qu'en toute place finie p ne divisant pas N l'on ait $\chi(p) = \chi_0(p)$.*

La correspondance $\chi \mapsto \chi_0$ induit une bijection entre les caractères de Hecke d'ordres finis et les caractères de Dirichlet primitifs.

Démonstration. Il existe un entier $N > 0$ tel que

$$U(N)_f := \left(\prod_{p|N}\Big(1 + N\mathcal{O}_p\Big)\right) \times \prod_{p\nmid N} \mathcal{O}_p^\times$$

soit dans le noyau de χ ; on choisit N le plus petit possible tel que ceci.

Le caractère $\chi|\mathbb{R}_{>0}$ est de la forme $x \mapsto x^\lambda$ avec $\lambda \in i\mathbb{R}$, soit χ_1 le caractère sur $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times$ défini par $\chi_1(\underline{x}) = \chi(\underline{x})|\underline{x}|^{-\lambda}$, la suite de la démonstration consiste à prouver que χ_1 est d'ordre fini et à préciser son ordre.

Soient

$$U(N) := \mathbb{R}_{>0} \times U(N)_f \quad \text{et}$$

$$V(N) := \mathbb{R}_{>0} \times \left(\prod_{p|N}\Big(1 + N\mathcal{O}_p\Big)\right) \times \prod_{p\nmid N} \mathbb{Q}_p^\times \ ,$$

on a $\mathbb{Q}^\times V(N) = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ et

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times & \simeq & (\mathbb{Q}^\times V(N))/(\mathbb{Q}^\times U(N)) \\ \alpha \in \mathbb{Z} & \mapsto & u^{-1}\ \alpha u \\ \alpha u + Nv = 1 & & u^{-1} \in \mathbb{Q}^\times \\ u, v \in \mathbb{Z} & & \alpha u \in V(N) \end{array}$$

d'où l'existence de χ_1 et χ_0. □

5.1. **Fonctions L des caractères de Hecke et fonctions ζ attachées aux fonctions lisses.** Soient F un corps global, χ un caractère de Hecke de F, S un ensemble fini de places de F contenant les places à l'∞ et les places ramifiées. On écrit $\chi = \prod_v \chi_v$ où χ_v est un caractère de F_v (et les χ_v sont pp non ramifiés, ce qui donne un sens au produit). Lorsque v est une place non ramifiée de F, $\chi_v(\varpi_v)$ ne dépend pas du choix de l'uniformisante ϖ_v, on écrira donc $\chi_v(\mathfrak{p}_v)$ ($\mathfrak{p}_v = \varpi_v\mathcal{O}_v$

est l'idéal de valuation). On pose pour $s \in \mathbb{C}$ et lorsque v est une place non ramifiée de F

$$L_v(s,\chi_v) = \Big(1 - \chi_v(\mathfrak{p}_v) q_v^{-s}\Big)^{-1} \ , \tag{29}$$

où q_v est le cardinal du corps des restes $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$. La fonction L partielle pour χ et S est

$$L_S(s,\chi) = \prod_{v \notin S} L_v(s,\chi_v) \ . \tag{30}$$

Lorsque $F = \mathbb{Q}$ et $\chi = \chi_1 |\cdot|^{\lambda}$, cf prop. 5.1, on a

$$L_S(s,\chi) = L_S(s+\lambda,\chi_1)$$

et l'on voit que ces fonction L partielles sont proches des séries de Dirichlet.

Pour des raisons qui apparaitrons peut-être plus loin on complète ainsi les fonctions L partielles : soit $v \in S$,

- si v est une place non ramifiée on définit $L_v(s,\chi_v)$ comme au dessus,
- si v est une place finie ramifiée on pose $L_v(s,\chi_v) = 1$,
- si v est réelle, on a $\chi_v(x_v) = (x_v/|x_v|_v)^{\varepsilon}$ avec $\varepsilon = 0,1$ (car χ_v est unitaire, $|\cdot|_v$ est ici la valeur absolue usuelle de $\mathbb{R}$) et l'on pose

$$L_v(s,\chi_v) = \pi^{-(s+\varepsilon)/2}\Gamma((s+\varepsilon)/2) \ ,$$

- si v est complexe, alors puisque χ_v est unitaire il existe $\mu \in i\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que (comme défini plus haut, $|.|_v$ est le carré de la norme complexe)

$$\chi_v(x_v) = |x|_v^{\mu} \left(\frac{x_v}{\sqrt{|x|_v}} \right)^m$$

  et l'on pose (où $|m|$ est la valeur absolue de m)

$$L_v(s,\chi_v) = 2(2\pi)^{s+\mu+|m|/2}\Gamma(s+\mu+|m|/2) \ .$$

Ceci permet de définir la fonction globale $L(s,\chi) = \prod_v L_v(s,\chi_v)$.

Soient χ un caractère de Hecke de F et $\phi \in S(\mathbb{A}_F)$. On veut définir l'expression

$$\zeta(s,\chi,\phi) = \int_{\mathbb{A}_F^{\times}} \phi(\underline{x})\chi(\underline{x})|\underline{x}|^s d^{\times}\underline{x} \ . \tag{31}$$

Il suffit de le faire lorsque ϕ est de la forme $\phi = \prod_v \phi_v$ avec $\phi_v \in S(F_v^{\times})$ (et $\phi_v = 1_{\mathcal{O}_v}$ pp). Pour toute place v de F on définit donc

$$\zeta_v(s,\chi_v,\phi_v) = \int_{F_v^{\times}} \phi_v(x)\chi_v(x)|x|_v^s d_v^{\times} x \tag{32}$$

Proposition 5.2. *Soient $\phi \in S(\mathbb{A}_F)$ de la forme $\phi = \prod_v \phi_v$ avec $\phi_v \in S(F_v^\times)$ et χ un caractère de Hecke de F.*

(1) *Les intégrales (32) sont convergentes pour les nombres complexes s tels que $\Re(s) > 0$. Soit S l'ensemble des places infinies de F, de celles qui sont ramifiées et de celles où $\phi_v \neq 1_{\mathcal{O}_v}$, c'est un ensemble fini et l'on a pour tout $v \notin S$*
$$\zeta_v(s, \chi_v, \phi_v) = L_v(s, \chi) = (1 - \chi_v(\mathfrak{p}_v) q_v^{-s})^{-1} \ .$$
(2) *L'intégrale (31) converge pour $\Re(s) > 1$ et l'on a*
$$\zeta(s, \chi, \phi) = \prod_v \zeta_v(s, \chi_v, \phi) \ .$$

La démonstration de la première partie ne présenta pas de difficultés, pour la seconde partie il faut remarquer que le produit infini converge pour $\Re(s) > 1$.

Ainsi sont définies ces fonctions zêta, attachées à des fonction lisses.

Dorénavant on note $\psi = \prod_v \psi_v$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_F/F$, on sait que $\mathbb{A}_F$ est isomorphe à son dual par $\underline{a} \mapsto \psi(\underline{a}\cdot)$, qu'ainsi la transformée de Fourier d'un élément ϕ de $(\mathbb{A}_F)$ devient une fonction sur $\mathbb{A}_F$:
$$\widehat{\phi}(\underline{a}) = \int_{\mathbb{A}_F} \phi(\underline{x}) \psi(\underline{ax}) d\underline{x}$$
et de même pour le dual de F_v et ψ_v.

La proposition suivante est due à Tate.

Proposition 5.3. *Soient $\phi \in S(\mathbb{A}_F)$ de la forme $\phi = \prod_v \phi_v$ avec $\phi_v \in S(F_v^\times)$ et χ un caractère de Hecke de F.*

(1) *Les fonctions $\zeta_v(s, \chi_v, \phi_v)$ admettent des prolongements méromorphes sur tout $\mathbb{C}$.*

(2) *Pour tout place v il existe une fonction méromorphe $\gamma_v(s, \chi_v, \psi_v)$ (indépendante de ϕ_v) telle que, sur $\mathbb{C}$*
$$\zeta(s, \chi_v, \phi_v) = \gamma_v(s, \chi_v, \psi_v) \zeta(1 - s, \chi_v^{-1}, \widehat{\phi_v}) \ .$$
(3) *La fonction $\zeta(s, \chi, \phi)$ admet un prolongement à tout le plan complexe, qui est holomorphe sauf si $\chi|\mathbb{A}_1^\times = 1$, auquel cas χ s'écrit $\chi = |\cdot|^\lambda$ avec $\lambda \in i\mathbb{R}$ et $\zeta(s, \chi, \phi)$ admet $-\lambda$ et $1 - \lambda$ au plus comme pôles ([6]).*

(4) *On a l'équation fonctionnelle*
$$\zeta(s, \chi, \phi) = \zeta(1 - s, \chi^{-1}, \widehat{\phi}) \ .$$

6. En caractéristique positive, les pôles sont très différents, cf par exemple [1], prop. 3.1.6, p. 267.

Démonstration. On en donne seulement une idée. Commençons par (2), par prouver que

$$\zeta(s,\chi_v,\phi_v)/\zeta(1-s,\chi_v^{-1},\widehat{\phi_v})\ ,$$

c'est a priori une fonction seulement définie pour $0<\Re s<1$, ne dépendant pas de *phi* ; on constate que, ϕ, $\phi'\in S(F_v)$,

$$\zeta(s,\chi_v,\phi_v)\zeta(1-s,\chi_v^{-1},\widehat{\phi'_v})=$$

$$\int_{F^\times}\int_{F^\times}\int_{F^\times}\phi(y)\phi'(z)\chi_v(yz)|yz|_v^s\psi(x)\chi_v(x)^{-1}|x|_v^{1-s}d_v^\times x d_v^\times y d_v^\times z\ ,$$

qui est symétrique en ϕ et ϕ'.

Choisissons ϕ_v telle que $\widehat{\phi_v}$ soit nulle dans un voisinage de 0, en fait, grâce à la formule d'inversion de Fourier, il suffit d'exhiber un élément de $S(F_v)$ nul au voisinage de 0. Alors $\zeta(1-s,\chi_v^{-1},\widehat{\phi_v})$ est définie et holomorphe pour tout s, donc γ_v est holomorphe pour $\Re s>0$. Si maintenant on suppose que c'est ϕ_v qui est nulles au voisinage de 0, il vient que γ_v est méromorphe pour $\Re s<1$.

La formule de la partie (2) de la proposition implique la partie (1). La preuve de la troisième partie utilise les résultats des deux autres pour les questions de prolongement, mais aussi de nouveaux arguments, particulièrement pour montrer qu'il n'y a pas de facteur dans l'équation fonctionnelle (cf par exemple [1], prop. 3.1.6). □

La première partie du théorème suivant est dû à Hecke et Tate, la seconde à Tate. Nous ne dirons pas grand chose des démonstrations, nous renvoyons par exemple à [1], th. 3.1.1 et 3.1.2.

Rappelons que F est un corps de nombres et que $\psi=\prod_v\psi_v$ est un caractère (additif) unitaire de $\mathbb{A}_F/F$.

Théorème 5.4. *Soit $\chi=\prod_v\chi_v$ un caractère de Hecke de F.*

(1) *Soit S un ensemble fini de places de F contenant les places finies et celles où χ_v et ψ_v sont non ramifiés.*

   (a) *Si χ n'est pas de la forme $|\cdot|^\lambda$, avec $\lambda\in\mathbb{C}$, la fonction $L(s,\chi)$ admet un prolongement holomorphe à tout le plan complexe.*

   (b) *S'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\chi=|\cdot|^\lambda$, alors $L(s,\chi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, ses pôles sont λ et $1-\lambda$ ([7]).*

7. Ici aussi, en caractéristique positive, les pôles sont très différents.

On a l'équation fonctionnelle, pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$L_S(s,\chi) = \left(\prod_{v\in S} \gamma_v(s,\chi_v,\psi_v)\right) L_S(1-s,\chi^{-1}) \ .$$

(2) *La fonction $L(s,\chi)$ admet un prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}$, dont les seuls pôles sont 0 et 1 et sont simples. Il existe une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$*

$$\varepsilon(s,\chi) \ ,$$

indépendante du choix de ψ, telle que l'on ait l'équation fonctionnelle

$$L(s,\chi) = \varepsilon(s,\chi)L(1-s,\chi^{-1}) \ .$$

La première partie découle assez directement de la proposition précédente, le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle aussi, sauf la nature du facteur. Les fonctions ε_v son ainsi définies, pour une certaine fonction lisse $\phi_v \in S(F_v)$,

$$\varepsilon_v(s,\chi_v,\psi_v) = \frac{L_v(s,\chi_v)}{\zeta_v(s,\chi_v,\phi_v)} \frac{\zeta_v(1-s,\chi_v,\widehat{\phi_v})}{L_v(1-s,\chi_v)} \ ,$$

si χ_v et ψ_v sont non ramifiés on a $\varepsilon_v(s,\chi_v,\psi_v) = 1$. Bien que les facteurs locaux ε_v dépendent de ψ, ε en est indépendant (Tate).

5.2. **Fonctions L de Hecke et d'Artin.** Soit F un corps de nombres. L'application d'Artin (cf prop. 3.5 et th. 3.6)

$$\Phi_F : \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$$

induit un isomorphisme, pour toute extension abélienne finie E/F,

$$\Phi_{E/F} : \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E/F) \ ,$$

et ceci est fonctoriel en E ; ainsi, on a un isomorphisme entre le dual de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et le groupe des caractères de Hecke de F dont le noyau contient $\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ (et tous les caractères de Hecke sont ainsi, pour une certaine extension galoisienne finie E/F).

Soient donc E/F une extension galoisienne finie, σ un caractère de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\chi = \sigma \circ \Phi_{E/F}$ le caractère de Hecke lui correspondant. Posons

$$\hat{\mathrm{L}}(s,\sigma) := \mathrm{L}(s,\chi)$$

où à droite se trouve la fonction L de Hecke pour χ (cf (23), on pourrait dire de Hecke-Tate, cf le théorème 5.4) ; cette dernière s'écrit comme un produit suivant les places de F de facteurs locaux, en se restreignant aux places finies où χ est non ramifié, on définit $\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{nr}}(s,\sigma)$ (avec nr comme non ramifié), et l'on a, cf (26),

$$\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{nr}}(s,\sigma) = \mathrm{L}(s,\sigma)$$

où à droite se trouve la fonction L d'Artin pour σ.

Ainsi les fonctions L d'Artin des représentations de $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{alg}}/F)$ de rang 1 correspondent aux fonctions L des "représentations automorphes" de F de rang 1, c'est ainsi que dans le chapitre suivant nous allons appeler les caractères de Hecke ; nous dirons aussi que ceci est *la correspondance de Langlands pour* GL(1), c'est à dire la description des représentations de $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{alg}}/F)$ par des représentations d'espaces de fonctions définies sur les adèles de $\mathrm{GL}_1(F)$, donc en des termes qui ne dépendent que de F.

6. Les formes modulaires

Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $Im(z) > 0$. Le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ (des éléments de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dont le déterminant est positif) opère sur $\mathbb{H}$ par homographie : si $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ et $z \in \mathbb{H}$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \ g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

(la partie imaginaire de $g(z)$ est $\det(g)Im(z)/|cz+d|^2$). On peut remarquer que le centre de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ agit trivialement sur $\mathbb{H}$, donc que l'on peut se ramener à la seule action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On peut remarquer aussi que cette action est définie sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Un groupe arithmétique est un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ commensurable avec $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, c'est à dire que $\Gamma \cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est d'indice fini dans Γ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Un exemple de tels groupes est le suivant. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$, i.e. un sous-$\mathbb{Z}$-module discret de rang maximum, c'est à dire 2, pour tout entier $N > 0$ on désigne par $\Gamma_\Lambda(N)$ le noyau de l'homorphisme canonique $\mathrm{SL}(\Lambda) \to \mathrm{GL}(\Lambda/N\Lambda)$. Alors les sous-groupes intermédiaires entre $\Gamma_\Lambda(N)$ et $\mathrm{SL}(\Lambda)$ sont arithmétiques.

Si $\Lambda = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ le groupe $\Gamma_\Lambda(N)$ se note $\Gamma(N)$ et s'appelle un sous-groupe principal de congruences. On a $\mathrm{SL}(\Lambda) = \Gamma(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, la dernière égalité étant une identification par la base $\{1, i\}$. Les groupes arithmétiques intermédiares entre $\Gamma(N)$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ s'appellent des sous-groupes de congruences. Le sous-groupe de congruences

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ / \ c \equiv 0 \text{ mod. } N \right\}$$

s'appelle un sous-groupe de Hecke. Dans la suite on ne considèrera que des sous-groupes de congruences.

Définition 6.1. *Soit Γ un sous-groupe de congruence, soit $k \geq 0$ un entier. Une forme modulaire de poids k pour Γ est une fonction*

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que

(1) *pour tout* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z) \ ,$$

(2) *f est holomorphe sur $\mathbb{H}$,*

(3) *f est holomorphe aux pointes de Γ.*

Expliquons ce que veut dire la troisième hypothèse.

6.1. **Les pointes d'un groupe arithmétique.** La matière de ce paragraphe est, avec tous les détails, dans [13], ch. 1, nous en décrivons ici brièvement que quelques aspects.

Un élément γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est dit parabolique si ce n'est pas une matrice scalaire et s'il ne possède qu'une valeur propre. Il revient au même de dire que $\mathrm{trace}(\gamma) = \pm 2$.

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, par exemple un groupes de congruences. Une pointe de Γ est un élément p de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fixé par un élément γ parabolique appartenant à Γ. Pour $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, soit $P(p)$ l'ensemble des éléments paraboliques du stabilisateur $Stab_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(p)$ de p dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On montre alors

Proposition 6.2. *Soient p une pointe de Γ et Γ_p son stabilisateur dans Γ, alors*

(1) $\Gamma_p = \Gamma \cap P(p)$,

(2) $\Gamma_p / (\{\pm 1\} \cap \Gamma)$ *est isomorphe à $\mathbb{Z}$,*

(3) *le groupe Γ agit sur l'ensemble de ses pointes, et modulo cette action, cet ensemble est fini.*

Ceci se prouve en se ramenant par conjugaison à la pointe à l'∞, par exemple, pour $\Gamma = \Gamma(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, l'ensemble des pointes est l'orbite $\Gamma(1)\infty$ de l'∞ et

$$\Gamma(1)_\infty = \{\pm 1\} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si Γ est un sous- groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, arithmétique, l'ensemble de ses pointes mod. Γ est l'orbite $\Gamma\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\infty$, il est donc fini.

Soit Γ un sous-groupe de congruences (pour simplifier on se limite aux sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$), on pose

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^*_\Gamma = \mathbb{H} \cup \{\text{pointes de } \Gamma\} .$$

Le groupe Γ opère sur $\mathbb{H}^*$, munissons $\mathbb{H}^*$ et $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$ de structures d'espaces analytiques.

D'abord la structure analytique de $\mathbb{H}^*$. Ses voisinages ouverts de $z \in \mathbb{H}$ sont les mêmes que ceux de $\mathbb{H}$; si p est une pointe finie, i.e. $p \in \mathbb{R}$, une base de voisinages ouverts de p sont les $\{p\} \cup D$, où D est un disque ouvert de $\mathbb{H}$ tangent à $\mathbb{R}$ en p ; une base de voisinages de la pointe à l'∞ est formée par les $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{H} \ / \ Im(z) > r\}$, pour $r > 0$ (en fait les voisinages de la pointe à l'∞ sont les disques ouverts centrés en $i\infty$, ce qui explique pourquoi cette dernière notation est utilisée par certains auteurs pour désigner cette pointe). Ceci fait de $\mathbb{H}^*$ un espace analytique, on vérifie que le groupe Γ opère sur les voisinages tels qu'ils viennent d'être précisés, d'où une structure d'espace analytique, la structure quotient, pour $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$. Nous ne disons rien de la démonstration du résultat suivant, qui cependant n'est pas immédiate.

Théorème 6.3. *Soit* Γ *un sous-groupe de congruences, alors l'espace analytique* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$ *est compact et non singulier, c'est donc une courbe algébrique projective sur* $\mathbb{C}$ *; par suite* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *est une courbe algébrique affine sur* $\mathbb{C}$*.*

Venons en à la *définition de l'holomorphie aux pointes* (cf définition 6.1, (3)). Afin de simplifier les notations nous ne l'écrivons que pour la pointe à l'∞, les autres s'en déduisant par conjugaison, et pour $\Gamma = \Gamma(1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. On a $\Gamma(1)_\infty = \{\pm 1\} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; soit f une forme modulaire pour $\Gamma(1)$, donc $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, d'où un développement de fourier, où traditionnellement on pose $q = e^{2i\pi z}$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$, la fonction f est holomorphe à la pointe ∞ si $a_n = 0$ pour $n < 0$, donc si pour z vérifiant pour un certain $r > 0$ $Im(z) > r$, ou encore si $|q| < e^{-2\pi r}$, on a

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n \ . \tag{33}$$

Lorsque dans (33) on a $a_0 = 0$ on dit que *la forme modulaire f est nulle à la pointe* ∞. D'où la définition

Définition 6.4. *Une forme modulaire pour le groupe Γ est dite parabolique si elle est nulle en toutes les pointes de Γ.*

On note $M(k,\Gamma)$ l'espace des formes modulaires de poids k pour le groupe Γ, $S(k,\Gamma)$ son sous-espace des formes paraboliques. Ce sont des espaces vectoriels de dimensions finies, ces dimensions ainsi que des bases sont explicites (on renvoie pour cela aux ouvrages précités), on peut ici simplement remarquer que les formes modulaires de poids 0 sont les constantes et que $M(k,\Gamma) = 0$ si k est impair.

6.2. **Deux exemples.** Soit $k \geq 2$ un entier pair, la série d'Eisenstein (normalisée) de poides $2k$ est

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}-(0,0)} \frac{1}{(nZ+m)^{2k}} \ ,$$

c'est une forme modulaire de poids $2k$ pour $\Gamma(1)$, son développement de Fourier à la pointe ∞ est

$$E_k(z) = 1 + \frac{(-1)^k 4k}{B_k} \sum_{n\geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

avec toujours $q = e^{2i\pi z}$, où B_k est le k-ème nombre de Bernoulli ($t/(e^t - 1) = \sum_{n\geq 0} B_n t^n/n!$) et $\sigma_\ell(n) = \sum_{d|n} d^\ell$.

La fonction Δ de Ramanujan. Soit

$$\Delta(z) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} = \sum_{n\geq 1} \tau(n) q^n$$

avec encore $q = e^{2i\pi z}$, la deuxième égalité définissant la fonction τ de Ramanujan. C'est une forme modulaire pour $\Gamma(1)$ de poids 12. A cette fonction Δ, ou plutôt à son développement à la pointe à l'infini, Ramanujan a associé une fonction L (1916)

$$\mathrm{L}(s,\Delta) = \sum_{n\geq 1} \tau(n) n^{-s} \ ,$$

dont il a conjecturé le développement en produit eulérien

$$\mathrm{L}(s,\Delta) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}\right)^{-1}$$

qui fut établi par Mordell (1917). La fonction $\mathrm{L}(s,\Delta)$ admet un prolongement holomorphe à tout le plan complexe, elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante, soit

$$\Lambda(s,\Delta)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\mathrm{L}(s,\Delta)$$

alors

$$\Lambda(s,\Delta)=\Lambda(12-s,\Delta)\ .$$

La forme modulaire Δ de Ramanujan est parabolique. On verra que Ramanujan a fait preuve d'une intuition remarquable en associant une fonction L ainsi définie à sa forme modulaire.

Soient

$$G_4(z)=1+240\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n \quad \text{et} \quad G_6(z)=1-504\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)q^n\ ,$$

ce sont des fonctions voisines des séries d'Eisenstein définies plus haut, $G_4^3-G_6^2$ est une forme de poids 12 et le calcul de ses coefficients de Fourier permet d'établir la formule

$$\Delta=\frac{1}{1728}\left(G_4^3-G_6^2\right)\ .$$

On peut aussi montrer que

$$\oplus_{k\geq 0}M(k,\Gamma(1))=\mathbb{C}[G_4^3\ ,\ G_6^2]$$

6.3. **Le produit scalaire de Petersson.** La mesure $dxdy/y^2$ sur $\mathbb{H}$ ($z=x+iy\in\mathbb{H}$) est invariante sour l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, d'où pour tout sous-groupe de congruences Γ et tout entier $k>0$ le *produit scalaire de Petersson* sur l'espace $S(k,\Gamma)$ des formes paraboliques pour Γ de poids k ; soient $f,g\in S(k,\Gamma)$,

$$(f,g)=\int\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}\ , \tag{34}$$

lorsque $\Gamma=\Gamma(N)$ ou $\Gamma_0(N)$, pour un certain entier $N>0$, il est commode de normaliser ce produit scalaire en le divisant par $[\Gamma(1):\Gamma]$:

$$(f,g)=\frac{1}{[\Gamma(1):\Gamma]}\int\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2}\ . \tag{35}$$

Ce produit scalaire est non dégénéré.

6.4. **Les opérateurs de Hecke.** Ils furent introduits par Hecke en 1937, ils permettent d'exhiber des formes modulaires auxquelles sont attachées ds fonctions L. Nous nous limitons au cas du groupe de congruences $\Gamma(1)$, c'est suffisant pour décrire les idées de Hecke, bien que certaines difficultés soient ainsi évitées, de plus, nous verrons plus loin que le bon point de vue est adèlique.

Tout d'abord un résultat technique.

Lemme 6.5. *Soit $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})^+$, alors il existe des éléments γ_1,..., γ_N de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})^+$ tels que*

$$\Gamma(1)\gamma\Gamma(1) = \coprod_{1\leq i\leq N} \Gamma(1)\gamma_i \ ,$$

où

$$N = [\Gamma(1) : \gamma\Gamma(1)\gamma \cap \Gamma(1)] < \infty \ .$$

On montre ceci en prouvant que

$$\sharp(\Gamma(1)\backslash\Gamma(1)\gamma\Gamma(1)) = [\Gamma(1) : \gamma\Gamma(1)\gamma \cap \Gamma(1)] \ ,$$

par l'application

$$\Gamma(1) \to \Gamma(1)\gamma\Gamma(1) \to \Gamma(1)\backslash\Gamma(1)\gamma\Gamma(1) \ , \ \alpha \mapsto \alpha\gamma \ .$$

Notation. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})^+$, $k > 0$ est une entier et f est une fonction complexe définie sur $\mathbb{H}$, on pose

$$f|\gamma(z) = f|_k\gamma(z) = (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}f(\frac{az+b}{cz+d}) \ . \tag{36}$$

Définition 6.6. *Soient $f \in M(k,\Gamma(1))$ et $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})^+$, on pose (cf le lemme 6.5)*

$$f|T_\gamma = T(\gamma)f = \sum_{1\leq i\leq N} f|\gamma_i \ ,$$

cette définition ne dépend pas des choix des γ_i puisque f est modulaire de poids k.

On a les propriétés suivantes

Théorème 6.7. (1) *Les T_γ, pour $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})^+$, engendrent une algèbre commutative et associative sur chaque $M(k,\Gamma(1))$ et $S(k,\Gamma(1))$.*

(2) *Les T_γ sont auto-adjoints pour le produit scalaire de Petersson sur $S(k,\Gamma(1))$.*

Donc $S(k,\Gamma(1))$ possède une base formée de formes paraboliques propres pour tous les opérateurs de Hecke.

Théorème 6.8. *Soit $f \in S(k, \Gamma(1))$ une forme propres pour les opérateurs de Hecke. Écrivons*

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n) q^n$$

($q = e^{2i\pi z}$) et supposons que l'on a la normalisation $a(1) = 1$. Soit

$$\mathrm{L}(s, f) = \sum_{n \geq 1} a(n) n^{-s} \ .$$

Pour tout $n > 0$ soit

$$T(n) = \sum_{d_1, d_2} T\left(\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\right) \ , \ d_1, d_2 \in \mathbb{N} \ , \ d_1 d_2 = n \ , \ d_2 | d_1 \ .$$

Soit $\lambda(n)$ défini par $f|T(n) = n^{1-\frac{k}{2}} \lambda(n) f$. Alors

(1) *pour tout n on a $\lambda(n) = a(n)$ et $n \mapsto a(n)$ est une fonction multiplicative (si n et m sont premiers entre eux $a(nm) = a(n)a(m)$),*

(2) *la fonction $\mathrm{L}(s, f)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le plan complexe, on a*

$$\mathrm{L}(s, f) = \prod_{p \ premier} (1 - a(p) p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \ ,$$

(3) *soit*

$$\Lambda(s, f) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, f) \ ,$$

alors on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, f) = (-1)^{k/2} \Lambda(k - s, f) \ .$$

(4) *La fonction L, son produit eulérien et l'équation fonctionnelle existent encore si f n'est pas parabolique, $f \in M(k, \Gamma(1))$, mais son prolongement à tout le plan complexe est méromorphe, $\Lambda(s, f)$ a alors des pôles simples en 0 et k.*

6.4.1. *Pour les groupes de congruences.* On dit quelques mots des opérateurs de Hecke pour le groupe $\Gamma_0(N)$. Soit ψ un caractère de Dirichlet mod. N. On définit les formes $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ modulaires et paraboliques de poids k pour $\Gamma_0(N)$ et le caractère ψ comme dans les définitions 6.1 et 6.4, sauf l'axiome (1) de 6.1 qui devient : pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$,

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \psi(a)^{-1} (cz + d)^k f(z) \ . \tag{37}$$

On note $M(k,\Gamma_0(N),\psi)$ et $S(k,\Gamma_0(N),\psi)$, ou encore $M_k(N,\psi)$ et $S_k(N,\psi)$, les espaces de ces formes. Soit f dans l'un de ces espaces, on pose aussi (cf 36) pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})^+$

$$f|\gamma(z) = f|_{k,\psi}\gamma(z) = \psi(a)(\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}f(\frac{az+b}{cz+d}) \ . \tag{38}$$

Si p est un nombre premier on définit l'opérateur de Hecke $T(p)$ agissant sur $S_k(N,\psi)$ par $T(p) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\right)$ et par une formule semblable à 6.6, mais cette fois, à la place de 6.5, pour une décomposition de la forme

$$\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\Gamma_0(N) = \coprod_{1\le i\le n}\Gamma_0(N)\gamma_i \ .$$

Donc

$$T(p)f = f|T(p) = \sum_{1\le i\le n} f|\gamma_i \ .$$

Le produit scalaire de Petersson (cf 35) opère sur $S_k(N,\psi)$ et est non dégénéré, mais les opérateurs de Hecke $T(p)$ ne sont auto-adjoints que lorsque le nombre premier p ne divise pas N ; $S_k(N,\psi)$ possède une base formée de formes propres pour les $T(p)$, $p \nmid N$.

Soient $N > 0$ un entier, D un diviseur de N, $D \neq 1, N$ et d un diviseur de N/D. Notons $S_k(N)^-$ le sous-espace de $S_k(N) := S_k(N,1)$ engendré par les $z \mapsto f(dz)$, pour $f \in S_k(D) := S_k(D,1)$. Soit $S_k(N)^+$ son orthogonal pour le produit scalaire de Petersson. cette décomposition,

$$S_k(N) = S_k(N)^- \oplus S_k(N)^+$$

est stable sous l'action des opérateurs de Hecke $T(p)$, où p est un nombre premier ne divisant pas N. Les éléments de $S_k(N)^+$ propres pour les opérateurs de Hecke $T(p)$, $p \nmid N$, sont dits des *formes nouvelles* tandis que ceux de $S_k(N)^-$ sont dits des *formes anciennes.*

7. Quelques mots sur la correspondance de Langlands pour GL(2)

7.1. **Sur les formes et représentations automorphes.**

Définition 7.1. *Soient ψ un caractère de Hecke de $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{K}_f$ un sous-groupe compact-ouvert de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_f)$*. Une application f définie sur*

$\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *et à valeurs complexes est appelée une forme automorphe pour* $\mathcal{K}_f$ *et* ψ *si*

(1) $f(\gamma \underline{g}) = f(\underline{g})$ *pour tout* $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ *et tout* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

(2) $f(z\underline{g}) = \psi(z)f(\underline{g})$ *pour tout* $z \in Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *(*Z *est le centre de* $\mathrm{GL}(2)$*) et tout* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

(3) *restreint à* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, f *est une fonction lisse et* $\mathfrak{z}$*-finie (où* $\mathfrak{z}$ *est le centre de l'algèbre enveloppante de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$*),*

(4) f *est à croissance lente, c'est à dire que pour toute constante* $c > 0$ *et toute partie compacte* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, *il existe deux constantes* C *et* δ *telles que, pour tous* $\underline{g} \in \mathfrak{C}$ *et* $\underline{a} \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ *l'on ait*

$$\left| f\left(\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right)\right| \leq C|\underline{a}|^{\delta}$$

(à gauche c'est la norme complexe et à droite la norme adèlique, c'est à dire le produit des normes locales : $|(a_v)| = \prod_v |a_v|_v$*).*

(5) *On dit de plus que* f *est une forme modulaire parabolique si, pour presque tout* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *(presque tout au sens de la mesure sur* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$*)*

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) d\underline{x} = 0 \ .$$

L'assertion (3) impose une propriété de régularité à l'∞, qui permet de montrer que les formes modulaires paraboliques pour ψ sont dans l'espace de la définition 7.2 suivante.

L'espace des formes automorphes (resp. paraboliques) pour ψ et pour un sous-groupe compact-ouvert quelconque de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_f)$ est noté $\mathcal{A}(\psi)$ (resp. $\mathcal{A}_0(\psi)$).

Définition 7.2. *Soit* ψ *un caractère de* $Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *trivial sur* $\mathbb{Q}^{\times}$ *. On désigne par* $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}),\psi)$ *l'espace des fonctions mesurables* f *sur* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *telles que*

(1) $f(\gamma \underline{g}) = f(\underline{g})$ *pour tous* $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ *et* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

(2) $f(z\underline{g}) = \psi(z)f(\underline{g})$ *pour tous* $z \in Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *et* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

(3) $\int |f(\underline{g})|^2 d\underline{g} < \infty$, *l'intégrale étant sur* $Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

C'est un espace de Hilbert.

La fermeture de $\mathcal{A}_0(\psi)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}),\psi)$ est notée $\mathrm{L}^2_0(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}),\psi)$, les éléments de ce dernier espace sont parfois encore appelés des formes paraboliques pour ψ.

7.1.1. *Les représentations.* Soit R la représentation régulière (à droite) de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$, cette représentation se décompose suivant une intégrale hilbertienne par rapport aux caractères unitaires de $Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ triviaux sur $\mathbb{Q}^\times$,

$$\int \mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}),\psi)d\psi \ ,$$

une partie est continue et est connue, nous n'en dirons rien car nous ne nous intéressons qu'à la partie discrète, qui est beaucoup moins comprise. La représentation induite par R sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}),\psi)$ se note R^ψ, R_0^ψ est celle induite sur $\mathrm{L}_0^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}),\psi)$. On a le résultat suivant, dont la démonstration est loin d'être évidente, bien que nous n'en disions rien.

Théorème 7.3. *Chaque représentation R_0^ψ est une somme directe de représentations irréductibles, chacune de multiplicité* 1.

Une sous-représentation de R_0^ψ est appelée une représentation automorphe parabolique.

Soit (π_p,V_p) une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$, si $V_p^{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)}\neq\{0\}$ on dit que π_p *est de classe 1, ou bien sphérique, ou encore non-ramifiée.*

Les représentations π_p, restrictions à $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ d'une composante irréductible de R_0^ψ, sont admissibles, c'est à dire que le stabilisateur dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ de tout vecteur de son espace contient un sous-groupe compact-ouvert (on dit qu'elles sont lisses) et que de plus, pour tout sous-groupe $\mathcal{K}_p$ compact-ouvert de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$, le sous-espace des éléments stables sous $\mathcal{K}_p$ est de dimension finie. Les représentations π se décomposent suivant les π_p, de la manière suivante.

Soit pour toute place v de $\mathbb{Q}$ une représentation unitaire (π_v,V_v) de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_v)$, admissible, telle que ces représentations soient non ramifiées pp, alors

Théorème 7.4. *(multiplicité* 1*) Soient p un nombre premier et (π_p,V_p) une représentation unitaire admissible irréductible non-ramifiée de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$*, alors $V_p^{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)}$ est de dimension* 1.

Soit donc $\xi_p\neq 0$, stable sous $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)$, chaque fois que π_p et non ramifiée. Soit S l'ensemble (fini) des places de $\mathbb{Q}$ contenant la place à l'∞ et les places ramifiées, soient des ensembles finis de places S_1 et S_2 tels que $S\subset S_1\subset S_2$, on a alors un morphisme

$$\otimes_{v\in S_1}V_v\to\otimes_{v\in S_2}V_v \ ,\otimes_{v\in S_1}e_v\mapsto\otimes_{v\in S_2}e_v \text{ avec } e_v=\xi_v \text{ si } v\notin S_1 \ .$$

La limite inductive des $\otimes_{v\in S_1}V_v$ se note $\otimes'_vV_v$. Il suit une représentations unitaires π de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ dans le complété H de cette dernière limite inductive, *on écrit* $\pi = \otimes_v \pi_v$ *et on dit que* π *est le produit tensoriel restreint des* π_v.

Théorème 7.5. *Soit* (π, V) *une composante irréductible unitaire de* R_0^ψ*, alors* π *s'écrit de manière unique* $\pi = \otimes_v \pi_v$ *où* π_v *est une représentation admissible unitaire de* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_v)$

Soient (π, V) une composante unitaire irréductible de R_0^ψ, $\pi = \otimes_v \pi_v$ comme au dessus , V_v étant l'espace de π_v, ψ_v son caractère central. Soit p un nombre premier, soit $c(p)$ la plus petite puissance ≥ 0 de p telle que

$$\left\{ e \in V_v \ / \ \pi_p\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) e = \psi_p(a) e \ \forall \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(c(p)) \right\} \neq 0 \ ,$$

cet espace est alors de dimension 1 ; lorsque la représentation π_p est non ramifiée on a $c(p) = 1$, donc on peut définir le *conducteur de* π qui est

$$c(\pi) = \prod_p c(p) \ . \tag{39}$$

7.2. **Des formes modulaires aux formes automorphes.** Soit $N > 0$ étant un entier. Soient $\mathcal{K}_f$ l'un des sous-groupes de celui des adèles finis $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ ainsi définis

$$\mathcal{K}_f(1) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{O}_f) = \prod_{p \text{ premier}} \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p) \ ,$$

$$\mathcal{K}_f(N) = \prod_{p \text{ premier}} \{\gamma \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p) \ / \ \gamma \equiv \mathrm{Id} \text{ mod. } N\} \ ,$$

$$\mathcal{K}_{f,0}(N) = \prod_{p \text{ premier}} \{\gamma \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p) \ / \ \gamma \text{ est mod. } N \text{ triangulaire supérieure } \} \ .$$

Posons

$$\Gamma = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}) \bigcap \left(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})^+ \times \mathcal{K}_f\right) \ ,$$

on a $\Gamma = \Gamma(1)$, $\Gamma(N)$ ou $\Gamma_0(N)$ selon que $\mathcal{K}_f = \mathcal{K}_f(1)$, $\mathcal{K}_f(N)$ ou $\mathcal{K}_{f,0}(N)$.

Lemme 7.6. *On a une bijection*

$$Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_\mathbb{Q}) / \left(\mathcal{K}_f \times O(2, \mathbb{R})\right) \leftrightarrows \Gamma \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R}) \ .$$

Démonstration. On sait que que $GL(2, \mathbb{Q})$ est discret dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_\mathbb{Q})$, que

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}) \left(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})^+ \times \mathcal{K}_f\right)$$

(théorème d'approximation forte), un élément de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ s'écrit donc $\underline{g} = \gamma(g_\infty, \underline{k}_f)$, avec $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$, $g_\infty \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ et $\underline{k}_f \in \mathcal{K}_f$; la bijection consiste à envoyer $\underline{g}$ sur g_∞. □

Ainsi on voit qu'une forme modulaire pour Γ peut être vue comme une fonction sur les adèles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$,

Théorème 7.7. *Soient $N > 0$ un entier, ψ un caractère de Dirichlet modulo N. Soit $h \in S_k(N,\psi)$ et soit ϕ_h la fonction*

$$\phi_h : \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\left(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+ \times \mathcal{K}_f\right) \to \mathbb{C} \ ,$$

qui envoie $\underline{g} = \gamma(g_\infty, \underline{k}_f)$ sur

$$\phi_h(\underline{g}) = h(g_\infty(i)) j(g_\infty, i)^{-k} \psi(\underline{k}_f),$$

où $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$, $g_\infty \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ et $\underline{k}_f \in \mathcal{K}_f$, où comme d'habitude, si $g_\infty = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $j(g_\infty, z) = (cz+d)(\det g_\infty)^{-1/2}$ ($z \in \mathbb{H}$), où $\psi(\underline{k}_f)$ à le sens suivant : on note encore ψ le caractère de Hecke associé au caractère de Dirichlet ψ et, si $\underline{k}_f = \begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix}$, on a $\psi(\underline{k}_f) = \psi(\underline{a})$.

Alors ϕ_h est une forme automorphe parabolique pour le caractère de Hecke ψ.

Des détails sont donnée dans la prop 3.1, p. 42 de [3].

Pour terminer ce paragraphe, nous résumons le lien entre les formes modulaires et les représentations automorphes. Étant donné $h \in S(k,N)$ on appelle π_h la représentation de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ obtenue par l'action sur ϕ_h, c'est à dire la représentation régulière sur le complété dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathcal{A}_\mathbb{Q}),\psi)$ de $\sum_{g\in\mathrm{GL}(2,\mathcal{A}_\mathbb{Q})} \mathbb{C}\phi_h(\cdot g)$

Théorème 7.8. (1) *Soit $h \in S(k,N)$ une forme propre pour les opérateur de Hecke $T(p)$ avec $p \not| N$, alors π_h est une représentation irréductible (et automorphe parabolique, de conducteur N).*

(2) *La réciproque est vraie dans le sens suivant : si ψ est un caractère de Hecke et si π est une composante irréductible de R_0^ψ, alors les formes modulaires $h \in S(k, c(\pi))$ telles que ϕ_h soient dans l'espace de π, déterminent π.*

Nous donnons ici un énoncé flou, faute d'avoir dit avant assez des propriétés nécessaires pour plus de clarté (voir par exemple, [3], § 5-B et 5-C), en fait ce n'est pas là que se trouve le but de ces notes, mais dans le paragraphe suivant.

7.3. **Sur les fonctions L des représentations automorphes.**

7.3.1. *Modèles locaux non archimédiens.* Soient F un corps local non archimédien (dans notre cas c'est l'un des $\mathbb{Q}_p$) et ψ un caractère non trivial unitaire additif de F, soit (π, V) une représentation irréductible et admissible de $\mathrm{GL}(2, F)$. Un premier résultat important est

Proposition 7.9. *Les formes linéaires* Λ *sur* V *telles que pour tous* $x \in F$ *et* $\xi \in V$

$$\Lambda\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\xi\right) = \psi(x)\Lambda(\xi)$$

forment un espace de dimension 1*, dont les éléments non nuls s'appellent des formes linéaires de Whittaker.*

Nous ne disons rien de la démonstration, bien qu'elle ne soit pas immédiate.

Soit Λ une forme linéaire de Whittaker Pour $\xi \in V$, $\xi \neq 0$, soit la fonction

$$W_\xi : \mathrm{GL}(2, F) \to \mathbb{C} \ , \ g \mapsto \Lambda(\pi(g)\xi) \ .$$

Ces fonctions vérifient, pour tous $x \in F$ et $g \in \mathrm{GL}(2, F)$

$$W_\xi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \psi(x) W_\xi(g) \tag{40}$$

On voit aussi facilement que pour $g \in \mathrm{GL}(2, F)$ (et si ρ désigne la translation à droite)

$$W_{\pi(g)\xi} = \rho(g) W_\xi$$

Soit $\mathcal{W}$ l'espace de ces fonctions W_ξ, $\xi \in V$, alors pour l'action à droite de $\mathrm{GL}(2, F)$, $W_\xi \mapsto \xi$ est un isomorphisme de représentations. *L'espace* $\mathcal{W}$ *s'appelle un modèle de Whittaker de* π*. Plus généralement, tout espace de fonctions complexes définies sur* $\mathrm{GL}(2, F)$*, vérifiant (40) et donnant pour l'action à droite une représentation de* $\mathrm{GL}(2, F)$ *isomorphe à* π *s'appelle un modèle de Whittaker de* π.

On peut retrouver les formes linéaires de Whittaker à partir d'un modèle. En effet, un isomorphisme de représentations

$$V \xrightarrow{\sim} \mathcal{W} \ , \ \xi \mapsto W_\xi$$

étant donné, on définit une forme linéaire de Whittaker Λ en posant $\Lambda(\xi) = W_\xi(1)$.

7.3.2. *Modèles locaux archimédiens.* Soit (π, V) une représentation irréductible et admissible de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$), *elle possède un modèle de Whittaker*, analogue au cas non archimédien. Soit ψ un caractère unitaire additif non trivial de $\mathbb{R}$. Il existe un espace $\mathcal{W}$ de fonctions sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$), lisses et $O(2,\mathbb{R})$-finies (resp. $SO(2,\mathbb{R})$-finies), satisfaisant la relation (40), de plus ces fonctions sont à croissance lente et analytiques... (les points de suspension signifient que l'on omet des propriétés qui pour être énoncées demanderaient de trop longs compléments), cet espace est linéairement et pour l'action à droite de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$) isomorphe à V.

7.3.3. *Modèles globaux.* Soit ψ un caractère unitaire de $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}$. Soit (π, V) une représentation irréductible admissible de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, on suppose que π se décompose suivant des représentations irréductibles admissibles des $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_v)$, où v décrit les places de $\mathbb{Q}$: $\pi = \oplus_v \pi_v$ avec π_v sphérique pp. Chaque π_v a un modèle de Whittaker $\mathcal{W}_v$ pour ψ_v (on a $\psi = \prod_v \psi_v$). Soit $\mathcal{W}$ l'espace des combinaisons linéaires finies des fonctions $\prod_v W_v$, avec $W_v \in \mathcal{W}_v$ et lorsque v est finie, $W_v = 1_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_v)}$ pp. *L'espace $\mathcal{W}$ est le modèle de Whittaker de π.*

On a une description plus précise de cet espace de Whittaker lorsque (π, V) est *une représentation irréductible automorphe parabolique.* En effet alors V est contenu dans l'espace des formes automorphes paraboliques pour ψ, où ψ est un caractère unitaire de $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}$,

$$V \subset \mathcal{A}_0\left(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \psi\right) \ .$$

Pour $\varphi \in V$ et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ soit

$$W_\varphi(\underline{g}) = \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) \psi(-\underline{x}) d\underline{x} \ ,$$

alors l'espace $\mathcal{W}$ de ces fonctions W_φ est un modèle de Whittaker de π.

On peut remarquer que l'on peut retrouver V à partir de $\mathcal{W}$, par les développements de Fourier

$$\varphi(\underline{g}) = \sum_{a \in \mathbb{Q}^\times} W_\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) \ . \tag{41}$$

7.3.4. *Fonctions L.* Soit (π, V) une représentation automorphe irréductible parabolique de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, on écrit $\pi = \otimes_v \pi_v$ et soit S une ensemble fini de places tels que π_v soit sphérique si $v \notin S$. On peut supposer que le caractère central ω de π est unitaire.

Soit $\varphi \in V$, alors l'intégrale

$$Z(s,\varphi) = \int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times} \varphi\left(\begin{pmatrix} \underline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |\underline{x}|^{s-\frac{1}{2}} d^\times\underline{x} \tag{42}$$

converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ (on peut montrer que $\varphi\left(\begin{pmatrix} \underline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est à décroissance rapide quand $|\underline{x}|$ vers l'∞). En combinant la relation précédente et la relation (41) il vient

$$Z(s,\varphi) = \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times} W_\varphi\left(\begin{pmatrix} \underline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |\underline{x}|^{s-\frac{1}{2}} d^\times\underline{x}$$

qui est une intégrale convergente seulement pour $\Re(s)$ suffisamment grand. On écrit $\underline{x} = (x_v)$,

$$W_\varphi\left(\begin{pmatrix} \underline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \prod_v W_v\left(\begin{pmatrix} x_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

où W_v est dans le modèle de Whittaker de π_v et correspond à φ_v ($\varphi = \prod_v \varphi_v$). On pose donc

$$Z_v(s,W_v) = \int_{\mathbb{Q}_v^\times} W_v\left(\begin{pmatrix} x_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |x_v|^{s-\frac{1}{2}} d^\times x_v \ ,$$

on a

$$Z(s,\varphi) = \prod_v Z_v(s,W_v) \ ,$$

et ces deux dernières relations prennent du sens quand l'on sait que l'intégrale de la première est convergente pour $\Re(s) > 1/2$ et que le produit infini de la second l'est pour $\Re(s) > 3/2$.

On peut modifier les fonctions Z et Z_v en y ajoutant la présence d'un caractère de Hecke $\psi = \prod_v \psi_v$:

$$Z(s,\varphi,\psi) \int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times} \varphi\left(\begin{pmatrix} \underline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |\underline{x}|^{s-\frac{1}{2}} \psi(\underline{x})(d^\times\underline{x}$$

$$Z_v(s,W_v,\psi_v) = \int_{\mathbb{Q}_v^\times} W_v\left(\begin{pmatrix} x_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |x_v|^{s-\frac{1}{2}} \psi_v(x_v) d^\times x_v$$

et l'on a encore

$$Z(s,\varphi,\psi) = \prod_v Z_v(s,W_v,\psi_v) \ .$$

Rappelons que $\omega = \prod_v \omega_v$ est le caractère central de π, qu'il existe un caractère unitaire $\xi = \prod_v \xi_v$ de $Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ trivial sur $\mathbb{Q}^\times$ tel que $V \subset \mathrm{L}^2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q}),\xi)$; on pose $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 7.10. *la fonction zêta locale $Z_v(s, W_v, \psi_v)$ admet un prolongement méromorphe à tous le plan complexe. Il existe une fonction méromorphe $\gamma_v(s, \pi_v, \xi_v, \psi_v)$*

$$Z_v(s, \pi_v(w)W_v, \psi_v^{-1}\omega_v^{-1}) = \gamma_v(s, \pi_v, \psi_v, \xi_v) Z_v(s, W_v, \psi_v) \ .$$

Soit, pour un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$ contenant les places v où π_v est ramifiées, la *fonction* L *partielle*

$$L_S(s, \pi, \psi) = \prod_{v \notin S} Z_v(s, W_v, \psi_v)$$

Théorème 7.11. *Soit S un ensemble (fini) de places de $\mathbb{Q}$ contenant la place à l'infini, les places où π_v n'est pas sphérique, les places où ψ_v est ramifié et les places où le caractère additif ξ_v n'est pas de conducteur $\mathbb{Z}_v$. On a l'équation fonctionnelle*

$$L_S(s, \pi, \psi) = \left(\prod_{v \in S} \gamma_v(s, \pi_v, \psi_v, \xi_v) \right) L_S(1 - s, \check{\pi}, \psi^{-1})$$

où $\check{\pi}$ est la représentation contragrédiente (au sens des représentations lisses) de π.

Remarque 7.12.
(1) *On pourra remarquer que la formule (42) définissant la fonction $Z(s, \varphi)$ est proche de celle (20) reliant les fonctions θ et Λ du paragraphe sur les fonctions L de Dirichlet. La construction des équations fonctionnelles relève en fait du même esprit.*
(2) *Cette équation fonctionnelle, pour les représentations automorphes paraboliques de* GL(2)*, généralise celle obtenue par Tate pour* GL(1)*, elle est due à Jacquet et Langlands* [5].
(3) *Soient v une place finie (un nombre premier) de $\mathbb{Q}$, χ_1^v et χ_2^v deux caractères de $\mathbb{Q}_v^\times$, on suppose que $\chi_1^v(\chi_2^v)^{-1}$ n'est pas le caractère $x \mapsto |x|$ ou $x \mapsto |x|^{-1}$ Soit π_v la représentation (admissible) de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_v)$ définie par l'action à droite sur l'espaces des fonctions $f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_v) \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}_v^\times$, $t \in \mathbb{Q}_v$ et $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_v)$*

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 & t \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} g \right) = \left| \frac{x_1}{x_2} \right|^{\frac{1}{2}} \chi_1(x_1)\chi_2(x_2) f(g) \ .$$

Ceci est en fait une forme assez générale des représentations examinées ici, ce sont des séries discrètes. La représentation π_v est irréductible si χ_1^v et χ_2^v sont non ramifiés. On a alors ([1]*, prop. 3.5.3), où ϖ_v est une uniformisante de $\mathbb{Q}_v$ et $p_v = \sharp(\mathbb{Z}_v/(\varpi_v))$,*

$$Z(s, \pi_v) = (1 - \chi_1^v(\varpi_v)p_v^{-s})^{-1}(1 - \chi_2^v(\varpi_v)p_v^{-s})^{-1} \ ,$$

on retrouve ici une allure habituelle pour les fonctions L locales.

(4) *Beaucoup de ce qui a été dit dans ce paragraphe s'inspirent du ch. 3.5 de* [1].

7.4. **La correspondance.** Un problème majeur de la théorie des nombres est de comprendre le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}, \mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ désigne un clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, c'est à dire de comprendre les équations diophantiennes à une inconnue. On est donc amené à étudier les représentations de $\mathcal{G}$.

La thèse de Tate avec la théorie du corps de classes abélien montre que les représentations galoisiennes de rang 1 sont en bijections avec les caractères de Hecke, c'est à dire les représentations automorphes de rang 1, elle montre que les fonctions L des représentations galoisiennes (Artin) et celles adèliques de GL(1) (Hecke, Tate) sont les mêmes. Ceci peut être appelé la correspondance de Langlands pour GL(1), bien que ce soit un anachronisme, puisque la thèse de Tate date de 1950 alors que la correspondance de langlands ne fut précisée que vers la fin des années 60 et au début des années 70 (cf [7] et [8]).

Pour $n > 1$ les connaissances actuelles sont beaucoup plus restreintes. Les représentations automorphes paraboliques π de $\mathrm{GL}(n)$ se décomposent suivant les places de $\mathbb{Q}$ sous la forme d'un produit tensoriel restreint $\pi = \otimes_v \pi_v$ et on peut imaginer qu'une bijection

(43)
$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations automorphes} \\ \text{paraboliques de } \mathrm{GL}(n) \end{array} \right\} & \leftrightarrows & \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations de } \mathcal{G} \\ \text{de rang } n \end{array} \right\} \\ \pi & \mapsto & \rho_\pi \end{array}$$

ait une version locale, qui à π_v associe une représentation ρ_{π_v} de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_v/\mathbb{Q})$ (représentation provenant naturellement de ρ_π). L'application $\pi_v \mapsto \rho_{\pi_v}$ est connue pour v finie (Harris-Taylor et Henniart, 2000), mais la correspondance globale n'est pas établie à ce jour. Cette correspondance globale est connue dans un autre cadre, celui de l'arithmétique en caractéristique positive (Laurent Lafforgue, 2000), qui permet d'imaginer ce que l'on peut espérer pour le corps $\mathbb{Q}$. On attend une bijection comme dans le diagramme (43), qui soit compatible avec un certain nombre de propriétés fonctorielles des représentations, et qui par exemple, pour toute place finie v n'appartenant pas à l'ensemble défini au numéro (3) de la remarque 7.12 et avec les mêmes notations, donne l'égalité (dans le cas de GL(2))

$$\{\chi_1^v(\varpi_v), \chi_2^v(\varpi_v)\} = \{\text{valeurs de propres de } \rho_{\pi_v}\} \ ,$$

de plus les fonctions L globales seraient les mêmes.

Références

[1] Bump Daniel, Automorphic Forms and Representations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55, 1998.

[2] Cassels J.W.S., Global Fields, in Algebraic Number Theory, ch. II, ed. Cassels J.W.S.-Fröhlich A., Acad. Press 1969, 5th printing 1990.

[3] Gelbart Stephen S., Automorphic Forms on Adèle Groups, Princeton Univ. Press n° 83, 1975.

[4] Godement R., Notes on Jacquet-langlands theory, Institute for Advanced Studies, Princeton NJ, 1970.

[5] Jacquet Hervé, Langlands Robert P., Automorphic forms on GL(2), LN 114, 1970, http ://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/JL.html♯book

[6] Lang, Serge, Algebraic Number Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[7] Langlands Robert P. http ://publications.ias.edu/rpl/

[8] Langlands Robert P. http ://publications.ias.edu/rpl/paper/43

[9] Lubin J., Tate J., Formal Complex Multiplication in Local Fields, Ann. Math. 81,p. 380-397, 1965.

[10] Milne J.S., Class Field Theory, http ://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html

[11] Neukirch Jürgen Algebraic Number Theory, Springer Verlag 1999.

[12] Samuel Pierre, Théorie algébrique des nombres, Hermann, 1967.

[13] Shimura Goro, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press, 1971.

[14] Tate John, Fourier Analysis in Number Fields ans Hecke's Zeta-Functions, in Algebraic Number Theory, ch. XV, ed. Cassels J.W.S.-Fröhlich A., Acad. Press 1969, 5th printing 1990.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France
E-mail address: `marc.reversat@math.univ-toulouse.fr`