CARACTÉRISTIQUE POSITIVE VERSUS GÉOMÉTRIE : LA PREMIÈRE CONSTRUCTION DE DRINFELD.

MARC REVERSAT

Résumé. Le but de cette note est d'expliquer comment des résultats de Drinfeld généralisés par Laumon ont conduit à la correspondance de Langlands géométrique.

Table des matières

1. Notations, etc.

Soient un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et X une courbe sur définie sur $\mathbb{F}_q$, lisse, complète et géométriquement irréductible. On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X, où des places du corps K des fonctions rationnelles sur X ; si v est une place de K, c'est à dire un point fermé de X, on désigne par K_v, $\mathcal{O}_v$, ϖ_v et $\mathbb{F}_q(v)$ le complété de K en cette place v, l'anneau valuation de K_v, une de ses uniformisantes et son corps des restes. Soient $\infty \in |X|$ un point fermé de X, $\alpha = [\mathbb{F}_q(\infty) : \mathbb{F}_q]$ et $A = H^0(X - \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$. Si $a \in A$, $a \neq 0$, on définit $\deg a$ par la formule $q^{\deg a} = \sharp(A/aA)$.

Si B est une $\mathbb{F}_q$-algèbre (commutative et unitaire, elles le seront toutes) on écrira $X \otimes B$ au lieu de $X \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q} \mathrm{Spec}B$, de même si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$ on écrira $X \times S$ pour le produit fibré au dessus de $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$, si s est un point de S on pose $X \times s = X \times \{s\}$ où $\{s\}$ est le

Date: 16 novembre 2016.

sous-schéma de S défini par s. On désignera par Frob_S le morphisme de Frobenius sur S qui est l'identité sur les points de S et l'élévation à la puissance q sur le faisceau $\mathcal{O}_S$.

Soit B une algèbre et σ l'un de ses endomorphismes, on désigne par $B\{\sigma\}$ l'anneau des polynômes en σ muni de l'addition usuelle et de la multiplication définie par $\sigma \cdot \sigma^n = \sigma^{n+1}$ et $\sigma \cdot b = \sigma(b)\sigma$, où n est un entier naturel et $b \in B$. On utilisera ceci en particulier lorsque B est une $\mathbb{F}_q$-algèbre sur laquelle agit l'endomorphisme τ de Frobenius de $\mathbb{F}_q$.

2. Choutcas, modifications.

[2] Soient V un K-espace vectoriel de dimension $r > 0$ et $\{e_1, \cdots, e_r\}$ l'une de ses bases. Soit $(M_v)_{v\in|X|}$ une famille telle que M_v soit un $\mathcal{O}_v$-réseau de $V \otimes_K K_v$ et que $M_v = \oplus_{1\le i\le r}\mathcal{O}_v e_i$ pour presque tout v (c'est à dire sauf pour un nombre fini de v). Soit E le faisceau sur X ainsi défini : pour tout ouvert affine U de X,

$$E(U) = \{e \in V \ / \ e \in M_v \text{ pour tout } v \in U\} \ ,$$

E est un fibré vectoreil de rang r sur X.

Tous les fibrés vectoriels sur X de rang r peuvent être définis ainsi, si E est un tel fibré on lui associe la famille de ses fibres $(E_v)_{v\in|X|}$ aux points fermés, $V = E_\eta$ est sa fibre au point générique et la base $\{e_1, \cdots, e_r\}$ est celle de $E(U)$, pour un ouvert affine non vide de X.

Soient de nouveau V un K-espace vectoriel de dimension $r > 0$ et $\{e_1, \cdots, e_r\}$ l'une de ses bases. Soit pour $v \in |X|$, $M_v^0 = \oplus_{1\le i\le r}\mathcal{O}_v e_i$. Soit $\underline{x} = (x_v)_{v\in|X|} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)$ un adèle de $\mathrm{GL}_r(K)$, alors la famille $(x_v M_v^0)_{v\in|X|}$ définit un fibré vectoriel de rang r sur X ; posons $\mathbb{O}_K = \prod_{v\in|X|}\mathcal{O}_v$ et

$$\mathfrak{K}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{O}_K) = \prod_{v\in|X|}\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v) \ ,$$

et lorsque $r = 2$ on écrira $\mathfrak{K}$ à la place de $\mathfrak{K}_2$. On voit que l'on a une bijection (due à A. Weil)

$$\mathrm{GL}_r(K)\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)/\mathfrak{K}_r \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de fibrés} \\ \text{vectoriels de rang } r \text{ sur } X \end{array} \right\} .$$

Soient D un diviseur positif sur X et E un fibré vectoriel de rang $r > 0$. *Une structure de niveau D sur E* est la donnée d'un isomorphisme $E/E(-D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^r/\mathcal{O}_X^r(-D)$. Soit $\mathfrak{K}_r(D) = \{\underline{k} \in \mathfrak{K}_r \ / \ \underline{k} \equiv 1 \bmod D\}$, on a la bijection

$$\mathrm{GL}_r(K)\backslash\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)/\mathfrak{K}_r(D) \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de fibrés} \\ \text{vectoriels de rang } r \text{ sur } X \\ \text{munis d'une structure de niveau } D \end{array} \right\} .$$

Á partir de maintenant on suppose $r = 2$. Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur X. Soit $v \in |X|$, on pose

$$E(v) = E \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_{X,v}/\mathfrak{m}_v) = E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{F}_q(v) : .$$

Un élément $\alpha_v \in \mathbb{P}(E(v)) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q(v))$ peut être vu comme une forme linéaire α_v^* sur $E(v)$, l'une de celles qui ne sont pas nulles sur la droite de $E(v)$ donnant α_v, on verra que le choix de l'une ou de l'autre n'a pas d'importance. Soit $E(\alpha_v)$ le faisceau sur X ainsi défini : soit U un ouvert affine de X alors $E(\alpha_v)(U) = E(U)$ si $v \notin U$ et sinon, $E(\alpha_v)(U) = \{s \in E(U) \ / \ \alpha_v^*(s) = 0\}$. On vérifie facilement qu'à isomorphisme près, $E(\alpha_v)$ ne dépend pas du choix de α_v^*. Donc on a une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \to E(\alpha_v) \to E \to \mathbb{F}_q(v)_X \to 0 ,$$

où $\mathbb{F}_q(v)_X$ est le faisceau dont la seule fibre non nulle est en v et est égale à $\mathbb{F}_q(v)$. On dit que $E(\alpha_v)$ *est une modification inférieure de* E *en* v *(de direction* α_v*)*, ces modifications inférieures sont caractérisées par la suite exacte précédente.

Interprétons cette construction en termes adèliques. Soient $V = Ke_1 \oplus Ke_2$ et pour $v \in |X|$, $M_v^0 = \mathcal{O}_v e_1 \oplus \mathcal{O}_v e_2$. Soient $\underline{x} = (x_v) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ et E le fibré vectoriel de rang 2 associé à la famille $(x_v M_v^0)$. Soit

$$\alpha_v \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v) \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v)$$

(où ϖ_v est une uniformisante en v) et soit $\underline{\alpha_v} = (\alpha_{v,v'})_{v'} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ défini par $\alpha_{v,v} = \alpha_v$ et $\alpha_{v,v'} = 1$ si $v' \neq v$, alors le fibré vectoriel associé à la famille $(x_{v'}\alpha_{v,v'}M_{v'}^0)_{v'}$ est une modification inférieure de E en v, notée encore $E(\alpha_v)$, et elles s'obtiennent toutes ainsi.

On peut aussi définir les modifications supérieures, en $w \in |X|$, en remplaçant dans les lignes précedentes l'adèle α_v par

$$\beta_w \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_w) \begin{pmatrix} \varpi_w^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_w) ,$$

on obtient un faisceau noté $E(\beta_w)$ appelé modification supérieure de E en w. Ces modifications supérieures sont caractérisées par la suite exacte suivante

$$0 \to E \to E(\beta_w) \to \mathbb{F}_q(w)_X \to 0 .$$

On peut remarquer que E est une modification supérieure de $E(\alpha_v)$ en v. On peut remarquer aussi que l'on a une identification, où v et w sont des points fermés de X,

$$E(\alpha_v, \beta_w)|_{X-\{v,w\}} = E|_{X-\{v,w\}} \ .$$

Soit D un diviseur positif sur X, si v et w ne sont pas dans le support de D, alors une structure de niveau D sur E en induit une sur $E(\alpha_v)$, $E(\beta_w)$ et $E(\alpha_v, \beta_w)$.

Soient v et w deux points fermés distincts de X et E un fibré vectoriel de rang 2. La donnée d'une *double modification* $E' := E(\alpha_v, \beta_w)$ de E est équivalente à la donnée d'un diagramme de la forme

$$E \xrightarrow{\phi_w} \mathcal{E} \xleftarrow{\phi_v} E'$$

où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X de rang 2 avec $\deg \mathcal{E} = \deg E + 1 = \deg E' + 1$, où le conoyau de ϕ_w est concentré en $\{w\}$, celui de ϕ_v en $\{v\}$. On passe d'une double modification à ce diagramme en posant $\mathcal{E} = E(\beta_w)$, ϕ_w et ϕ_v étant les inclusions. *Donc la donnée d'une double modification revient à celle d'un chtouca sur* $S = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$.

2.1. **la première construction de Drinfeld.** Les notations et hypothèses sont les mêmes que celles énoncées au début ; la lettre ℓ désigne un nombre premier différent de p. On considère les mesures de Haar sur $\mathbb{A}_K$ et sur $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ qui attribue à $\mathbb{O}_K$ et $\mathfrak{K} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{O}_K)$ respectivement la mesure 1 ; de même, si v est un point fermé de X, la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}(2, K_v)$ est normalisée par $\int_{\mathrm{GL}(2,\mathfrak{O}_v)} dg = 1$. Toutes ces mesures seront notées de la même façon.

Définition 2.1. *Une forme automorphe parabolique non ramifiée sur* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ *est la donnée d'une fonction*

$$f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$$

telle que

(1) $f(\gamma \underline{g} \underline{k}) = f(\underline{g})$ *pour tous* $\gamma \in \mathrm{GL}(2, K)$, $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ *et* $\underline{k} \in \mathfrak{K}$ *;*

(2) $\int_{\underline{z} \in K \backslash \mathbb{A}_K} f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) d\underline{z} = 0$ *pour tout* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$.

Soit $\mathcal{G}_2^0$ *l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations* $\sigma : \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ *ℓ-adiques*, c'est à dire qui sont définies sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ contenue dans $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et qui sont continues pour la topologie de $\mathrm{GL}(2, E)$ venant de celle de $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et pour la topologie de Krull de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$, qui aussi sont

(1) partout non ramifiées (pour toute place v de K et toute place au dessus w de K^{alg}, le sous-groupe de ramification de $\mathrm{Gal}(K_w^{\mathrm{alg}}/K_v)$ est dans le noyau de σ),
(2) géométriquement irréductible (la restriction de σ à $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}K)$ est irréductible).

Soit $\mathcal{A}_2^0$ *l'ensemble des formes automorphes paraboliques non ramifiées, sauf la fonction nulle, qui de plus sont vecteurs propres pour les opérateurs de Hecke.* Expliquons cette dernière condition.

Pour $v \in |X|$ soient

$$M_v^1 = \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \quad \text{et}$$

$$M_v^2 = \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \; .$$

Si f est une forme automorphe parabolique non ramifiée soient pour $i = 1, 2$ et pour tout $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$

$$(T_v^i f)(\underline{g}) = \int_{g \in M_v^i} f(\underline{g} h_v) dh_v \tag{1}$$

Pour $i = 1, 2$ *les* T_v^i *sont les opérateurs de Hecke à la place* v. Dire que f est propre pour les opérateurs de Hecke signifie que pour tous i et v il existe $\lambda_{i,v} \in (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ tel que $T_v^i f = \lambda_{i,v} f$.

Théorème 2.2. *(Drinfeld) Pour toute place v soit* Frob_v *un relèvement quelconque dans* $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{alg}}/K_v) \subset \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ *de l'automorphisme de Frobenius. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_2^0$ il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{A}_2^0$, à scalaire de $(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ près, telle que, pour toute place v de K l'on ait*

$$T_v^1(f) = tr(\sigma(\mathrm{Frob}_v)) f$$
$$T_v^2(f) = q_v^{-1} \det(\sigma(\mathrm{Frob}_v)) f$$

(où q_v est le cardinal du corps des restes de K en v).

Ce théorème est de Drinfeld [1], qui précise que le sens représentations vers fonctions est dans [1] et que l'unicité vient de résultats de [3]. L'énoncé de ce théorème, pour $\mathrm{GL}(n)$, conjectural mais avec beaucoup d'étapes démontrées, a été donné par Laumon dans [4]. Nous allons donner ici une idée de la preuve de Drinfeld de [1], c'est à dire du sens fonctions vers représentations. Celle-ci est appelée par Laumon *la première construction de Drinfeld* et permet de voir comment est apparue l'idée d'une *correspondance géométrique pour* $\mathrm{GL}(n)$, $n > 1$, cf [4] et [5], pour $n = 1$, voir [6].

La démonstration occupe le reste de ce paragraphe.

Soit $\mathcal{V}_2$ l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K) \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ telles que

(1) $f(\gamma\underline{g}) = f(\underline{g})$ pour tous $\gamma \in B(K)$ (B est le schéma en groupes des matrices triangulaires supérieures de rang 2) et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(2) $\int_{K\backslash\mathbb{A}_K} f\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\underline{g}\right) d\underline{z} = 0$ pour tout $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(3) $f(\underline{g}\underline{k}) = f(\underline{g})$ pour tous $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ et $\underline{k} \in \mathfrak{K}$.

Soit $\psi : K\backslash\mathbb{A}_K \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ un homomorphisme localement constant (c'est à dire continu), on désigne par $\mathcal{W}_2$ l'espace des fonctions $\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K) \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ telles que

(1) $\varphi\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\underline{g}\right) = \psi(\underline{z})f(\underline{g})$ pour tous $\underline{z} \in \mathbb{A}_K$ et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(2) $\varphi\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array}\right)\underline{g}\right) = f(\underline{g})$ pour tous $a \in K^\times$ et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(3) $\varphi(\underline{g}\underline{k}) = \varphi(\underline{g})$ pour tous $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ et $\underline{k} \in \mathfrak{K}$.

Lemme 2.3. *Les opérateurs de Hecke T_v^i, $i = 1, 2$ et $v \in |X|$, opèrent sur $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{W}_2$; munis de ces opérateurs $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{W}_2$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{V}_2$, alors

$$\phi(\underline{g}) = \int_{K\backslash\mathbb{A}_K} f\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{array}\right)\underline{g}\right)\psi(-\underline{z})d\underline{z}$$

défini un élément de $\mathcal{W}_2$. L'application réciproque à $\varphi \in \mathcal{W}_2$ associe f donnée par

$$f(\underline{g}) = \sum_{a\in K^\times} \varphi\left(\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\underline{g}\right)$$

(le dual de $K\backslash\mathbb{A}_K$ est isomorphe à K). □

Le lemme suivant est une reécriture par Drinfeld d'un résultat de Weil, [7], ch. 6, prop. 6 et commentaires suivant. Nous introduisons d'abord des notations.

Soient $t_1 : \mathrm{Pic}X \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ un homomorphisme et $t_2(v) \in \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ pour tout $v \in |X|$. Soit

$$\mathcal{U} = \left\{\varphi \in \mathcal{W}_2 \ / \ T_v^i(\varphi) = t_i(v)\varphi \text{ pour tous } i = 1, 2 \text{ et } v \in |X|\right\} .$$

On pose

$$\left(1 - t_1(v)z + q_v t_2(v)z^2\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0} c_v(n)z^n$$

et $c_v(n) = 0$ si $n < 0$. Soit $D = \sum_{v\in|X|} n_v v$ un diviseur sur la courbe X, on définit

$$r(D) = \prod_{v\in|X|} c_v(n_v) ,$$

donc $r(D) = 0$ si D n'est pas un divideur positif.

Soit $\underline{h}$ l'adèle tel que $\mathbb{O}\underline{h}$ soit maximal pour la propriété d'être inclus dans Kerψ, on pose $\delta = -\mathrm{div}\ (\underline{h})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{W}_2$ défini par

(2)

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}\right) = \psi(\underline{z})|\underline{a}/\underline{b}|t_1\left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1} r\left(\mathrm{div}\ (\underline{b}) + \delta - \mathrm{div}\ (\underline{a})\right)$$

pour tous $\underline{z} \in \mathbb{A}_K$ et $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{A}_K^\times$.

Lemme 2.4. *(Weil) L'espace $\mathcal{U}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et est engendré par la fonction φ de (2).*

La fonction $f \in \mathcal{V}_2$ déduite de φ par l'isomorphisme $\mathcal{V}_2 \simeq \mathcal{W}_2$ est caractérisée par

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}\right) = |\underline{a}/\underline{b}|t_1\left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1} \times \sum_{\lambda \in K^\times} r\left(\mathrm{div}\ (\lambda)\mathrm{div}\ (\underline{b}) + \delta - \mathrm{div}\ (\underline{a})\right)\psi(\lambda\underline{z}) \tag{3}$$

pour tous $\underline{z} \in \mathbb{A}_K$ et $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{A}_K^\times$.

La démonstration du théorème 2.2 consiste donc à prouver que cette dernière fonction f est invariante à gauche sous l'action de $\mathrm{GL}(2, K)$. Nous n'allons pas donner la démonstration, mais plutôt essayer de décrire les idées qu'elle a fait apparaître.

2.1.1. *Adèles, dualité, résidus.* Ce paragraphe est issu du livre de Serre [6], ch. II. Si $D = \sum_{v \in |X|} n_v v$ est un diviseur sur X on pose

$$\mathbb{A}_K(D) = \left\{\underline{a} = (a_v)_v \in \mathbb{A}_K \ / \ \mathrm{val}_v(a_v) + n_v \geq 0 \text{ pour tout } v\right\},$$

où val_v désigne la valuation de K_v normalisée par $\mathrm{val}_v(\varpi_v) = 1$.

Lemme 2.5. *On a un isomorphisme canonique*

$$H^1\left(X, \mathcal{O}_X(D)\right) \simeq \mathbb{A}_K / \left(K + \mathbb{A}_K(D)\right),$$

où au dénominateur du membre de droite la lettre K désigne le plongement diagonal de K dans $\mathbb{A}_K$.

Démonstration. De la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(D) \to \underline{K} \to \underline{K}/\mathcal{O}_X(D) \to 0,$$

où $\underline{K}$ désigne le faisceau constant de fibre K sur X, on déduit la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0\left(X, \mathcal{O}_X(D)\right) \to K \to \mathbb{A}_K/\mathbb{A}_K(D) \to H^1\left(X, \mathcal{O}_X(D)\right) \to 0,$$

d'où le résultat cherché. □

Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$ une différentielle $\mathbb{F}_q$-linéaire sur K. Soit v une place de K, on a $K_v = \mathbb{F}_{q_v}((\varpi_v))$, où ϖ_v est une uniformisante en v que l'on choisit dans K, et l'on voit que $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_{q_v}}(K_v)$, donc que ω s'écrit $\omega = f_v d\varpi_v$;

Définition 2.6. *(1) La valuation de ω en v est* $\mathrm{val}_v(\omega) = \mathrm{val}_v(f_v)$*,*

(2) écrivons $f_v = \sum_{i>>-\infty} \alpha_i \varpi^i$, alors le résidu de ω en v est $\mathrm{Res}_v(\omega) = \alpha_{-1}$.

Les deux résultats suivants sont importants.

Lemme 2.7. *Les définitions précédentes sont indépendantes du choix de l'uniformisante ϖ_v*

Lemme 2.8. *(Formule des résidus) Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$, alors*

$$\sum_{v \in |X|} \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_q}(\mathrm{Res}_v(\omega)) = 0 \ .$$

La démonstration de ces deux derniers résultats est une conséquence directe de [6], n°11 à 13 du ch. II, il faut simplement remarquer que si $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$ est vu comme un élément de $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}}(K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}})$, on a pour toute place v de K

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_q} \mathrm{Res}_v(\omega) = \sum_{w|v} \mathrm{Res}_w(\omega) \tag{4}$$

où dans le membre de droite w décrit les places de $K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ au dessus de v.

Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$, le diviseur de ω est

$$(\omega) = \sum_{v \in |X|} \mathrm{val}_v(\omega) v \ .$$

Soit D un diviseur sur X, on pose

$$\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K, D) = \left\{ \omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) \ / \ (\omega) \geq D \right\}$$

et l'on note $< \cdot, \cdot >$ l'accouplement

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) & \times & \mathbb{A}_K & \longrightarrow & \mathbb{F}_q \\ (\omega & , & \underline{a}) & \longmapsto & \sum_v \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_q}(\mathrm{Res}_v(\underline{a}\omega)) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que

(1) $< \omega, \underline{a} >= 0$ si $\underline{a} \in K \subset \mathbb{A}_K$,

(2) $< \omega, \underline{a} >= 0$ si $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K, D)$ et $\underline{a} \in \mathbb{A}_K(D)$ (cf la formule des résidus),

(3) $< \lambda\omega, \underline{a} >=< \omega, \lambda\underline{a} >$ si $\lambda \in K$.

Ceci permet de définir l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{A}_K, \mathbb{F}_q) \\ & \omega & \longmapsto & (\underline{a} \mapsto < \omega, \underline{a} >) \end{array}$$

Proposition 2.9. *Pour tout diviseur D sur X (y compris $D = 0$) l'application θ induit un isomorphisme*

$$\theta_D : \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K, D) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X(D))^* \ ,$$

où $(\ )^*$ désigne ici la dualité sur $\mathbb{F}_q$.

La démonstration est la même qu'en [6], ch. II, n°9, th. 2, compte tenu de la formeule (4).

2.1.2. *Interprétation géométrique.* L'homomorphisme $\psi : K\backslash\mathbb{A}_K \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ peut s'écrire $\psi = \psi_0(< \omega_0, \cdot >)$, où $\psi : \mathbb{F}_q \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ est un homomorphisme et où $\omega_0 \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) - \{0\}$; on a $\delta = \mathrm{div}\ (\omega_0)$. La formule (3) s'écrit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}\right) = |\underline{a}/\underline{b}| t_1 \left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1} \ \times$$

$$\sum_{\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) - \{0\}} r\left(\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a)\right) \psi_0(< \omega, \underline{z} > \ ,$$

et l'on a

$$\sum_{\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) - \{0\}} r\left(\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a)\right) \psi_0(< \omega, \underline{z} > =$$

$$\sum_{\omega \in (\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) - \{0\})/\mathbb{F}_q^\times} r\left(\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a)\right) \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \psi_0(< \lambda\omega, \underline{z} > \ ,$$

finalement

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}\right) = |\underline{a}/\underline{b}| t_1 \left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1} \ \times \tag{5}$$

$$\Bigg(q \sum_{\substack{\omega \in (\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) - \{0\})/\mathbb{F}_q^\times \\ <\omega, \underline{z}> = 0}} r\left(\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a)\right) \ -$$

$$\sum_{\omega \in (\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) - \{0\})/\mathbb{F}_q^\times} r\left(\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a)\right)\Bigg) \ .$$

Soit Fib_2 les classes d'isomorphie des faisceaux localement libres de rang 2 sur la courbe X, on a vu que

$$\mathrm{GL}(2, K)\backslash\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)/\mathfrak{K} \rightleftarrows \mathrm{Fib}_2 \ .$$

Soit Drap_2 les classes d'isomorphie des couples (E, L), où E est un faisceau sur X localement libre de rang 2 et L un sous-faisceau inversible maximal (pour l'inclusion).

Lemme 2.10. *Soit B le schéma en groupes des matrices inversibles triangulaires supérieure de rang 2. On a*

$$B(K)\backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)/\mathfrak{K} \rightleftarrows \mathrm{Drap}_2$$

par l'application qui à $\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}$, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ dans $\mathbb{A}_K^\times$, $\underline{z}$ dans $\mathbb{A}_K$, associe le couple ainsi construit : le faisceaux inversible L correspond à $\underline{a}$, on note Q celui correspondant à $\underline{b}$, on a

$$\mathrm{Ext}(Q, L) \simeq H^1(X, Q^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} L) \simeq \mathbb{A}_K/\Big(K + \underline{a}^{-1}\underline{b}\mathbb{O}\Big) \tag{6}$$

et le faisceau E est défini par l'extension

$$0 \to L \to E \to Q \to 0 \tag{7}$$

correspondant à $\underline{z}$.

Revenons à la formule (5). Pour que $r\,(\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a)) \neq 0$ il faut $\mathrm{div}\ (\omega) + \mathrm{div}\ (b) - \mathrm{div}\ (a) \geq 0$, c'est à dire

$$\omega \in H^0(X, L^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} Q \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/\mathbb{F}_q})\ .$$

Soit (E, L) un représentant d'un élément de Drap_2, on pose $Q = E/L$ et l'on désigne par $\mathbb{P}(E, L)$ l'espace projectif construit avec le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $H^0(X, L^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} Q \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/\mathbb{F}_q})$ (c'est à dire l'espace des diviseurs positifs linéairement équivalents à $L^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} Q \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/\mathbb{F}_q}$). D'autre part, l'élément de $H^1(X, Q^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} L)$ correspondant dans (6) à l'extension (7) définit par dualité de Serre une forme linéaire sur $H^0(X, L^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} Q \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/\mathbb{F}_q})$, on note $V(E, L)$ la sous-variété projective de $\mathbb{P}(E, L)$ provenant du noyau de cette forme linéaire.

Les fonction de $\mathcal{V}_2$ grâce au lemme 2.10 deviennent des fonctions sur Drap_2 et la formule (5), par suite la formule (3), devient

$$f(E, L) = q^{\deg L - \deg Q} t_1(Q)\Big(q \sum_{D \in V(E,L)} r(D) - \sum_{D \in \mathbb{P}(E,L)} r(D)\Big) \tag{8}$$

avec $Q = E/L$.

Les opérateurs de Hecke agissent sur les fonctions $f : \mathrm{Drap}_2 \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$, la traduction géométrique est en toute place v de K

$$(T_v^1 f)(E, L) = \sum_{E'} f(E', L \cap E') \quad \text{et} \quad (T_v^2 f) = f(E(-v), L(-v)) \tag{9}$$

où dans la première somme E' décrit l'ensemble des modifications inférieures de E en v. Le problème étudié revient à prouver qu'une fonction

$f : \mathrm{Drap}_2 \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ vérifiant la formule (8) et propre pour les opérateurs de Hecke (9) est en fait définie sur Fib_2. C'est fait par Drinfeld par un raisonnement long et complexe ([1]).

2.1.3. *Conclusion.* Soit ρ une représentation de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$, $\rho \in \mathcal{G}_2^0$, soit $\mu : \mathrm{Pic}X \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ correspondant à $\det \rho$ par la théorie du corps de classe (et la description adèlique de $\mathrm{Pic}X$) et choisissons pour t_1 la fonction sur $\mathrm{Pic}X$, $t_1 = q^{-\det}\mu$. Soit $\mathcal{E}$ le système local correspondant à ρ, si $\varphi : X^m \to Sym^m(X) := X^m/S_m$ est le morphisme canonique, on pose $\mathcal{E}^{(m)} = (\varphi_*(\boxtimes^m \mathcal{E}))^{S_m}$. La variété projective $V(E,L)$ peut être vu comme un schéma sur $\mathbb{F}_q$, l'interprétation de ses éléments comme des diviseurs positifs montre que l'on peut écrire l'inclusion entre schémas sur $\mathbb{F}_q$: $V(E,L) \subset Sym^m(X)$ pour $m = \deg E - \deg L + 2g - 2$, où g est le genre de X. Notons $\mathcal{F}$ la restriction de $\mathcal{E}^{(m)}$ à $V(E,L)$, alors Drinfeld montre ([1], prop. 2.1)

Proposition 2.11. *Soit* $(E,L) \in \mathrm{Drap}_2$ *avec* $\deg E - \deg L > 2g-2$, *soit* $f \in \mathcal{V}_2$ *vu comme une fonction sur* Drap_2*, alors*

$$f(E,L) = q^{1+\deg L}\mu(\det E)^{-1}\mu(L)\sum_j (-1)^j \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}, H^j(V(E,L)\otimes \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}, \mathcal{F}))\ .$$

On est alors très proche de voir les fonctions de $\mathcal{V}_2$ comme étant les traces de l'action de l'action de Frobenius sur des faisceaux, ou des complexes de faisceaux ℓ-adiques, définis sur le champ des drapeaux de rang 2 sur X. Cette interprétation porte le nom de “dictionnaire fonctions-faisceaux” de Grothendieck.

Ce résultat fut étendu en tout rang r, pas seulement pour $r = 2$ et en toute caractéristique $p \geq 0$, par Laumon, [4] et [5].

Références

[1] Drinfeld V. G., Two dimensional ℓ-adic representation of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2), Amer. J. of Math. 54, p. 85-114, 1983.

[2] Harder G., Kazhdan D.A., Automorphic forms on GL_2 over function fields (after V.G. Drinfeld), in Proceedings un Symposia in Pure Mathematics, vol. 33, part. 2, p. 357-379, 1979.

[3] Jacquet Hervé, Langlands Robert P., Automorphic forms on GL(2), LN 114, Springer Verlag 1970.

[4] Laumon G., Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, Duke Math. J. 54, n°2, 1987.

[5] Laumon G., Faisceaux automorphes pour GL(n) : la première construction de Drinfeld, arXiv :alg-geom/9511004v1 7 Nov 1995.

[6] Serre J.-P., Groupes algébriques et corps de classes, Hermann paris, 1959.

[7] Weil A., Dirichlet Series and Automorphic Forms, LN 189, Springer Verlag, 1971.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: `marc.reversat@math.univ-toulouse.fr`