L'ÉQUIVALENCE DE SATAKE POUR GL_r.

MARC REVERSAT

Résumé. Ces notes s'inspirent fortement de [6] et [12] pour la première partie, de [1], [8] et [11] pour les autres.

Table des matières

1. L'équivalence locale

1.1. **Préliminaires.** Soient F un corps local, A son anneau de valuation, ϖ l'une de ses uniformisantes et $\mathfrak{k}$ son corps résiduel. Soient $\underline{G} = \mathrm{GL}_r$, $\underline{B}$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, $\underline{T} \subset \underline{B}$ et $\underline{N} \subset \underline{B}$ les tore et sous-groupe unipotent contenus

Date: 30 octobre 2015.

dans $\underline{B}$. L e groupe de Weyl $W = W_{\underline{G}}$ de $\underline{G}$ est par définition le normalisateur de $\underline{T}$ dans $\underline{G}$ quotienté par $\underline{T}$, il est canoniquement isomorphe au groupe $\mathcal{S}_r$ des matrices monomiales. Soit

$$X^* = X^*(\underline{T}) = \mathrm{Hom}_{gr\ alg}(\underline{T}, \mathbb{G}_m) =< \alpha_1, \cdots, \alpha_r >$$

le groupe des caractères de $\underline{T}$, où α_i est le caractère

$$\alpha_i((t_1, \cdots, t_r)) = t_i \ . \tag{1}$$

Le groupe des cocaractères (ou des sous-groupes à un paramètre) de $\underline{T}$ est

$$X_* = X_*(\underline{T}) = \mathrm{Hom}_{gr\ alg}(\mathbb{G}_m, \underline{T}) =< \lambda_1, \cdots, \lambda_r >$$

où λ_i est le cocaractère

$$\lambda_i(*) = (1, \cdots, 1, \underset{\text{place i}}{*}, 1, \cdots, 1) \ . \tag{2}$$

On a l'accouplement

$$\begin{array}{ccccc} X_* \times X^* & \longrightarrow & \mathrm{End}_{gr\ alg}(\mathbb{G}_m) & \simeq & \mathbb{Z} \\ (\lambda, \alpha) & \longmapsto & \alpha \circ \lambda & & \end{array}$$

On fait agir $\underline{G}$ sur son algèbre de Lie $V := \mathfrak{g}l_r = M_r(F)$ par conjugaison, si $\alpha \in X^*$ on désigne par V_α le sous-espace de $V = \mathfrak{g}l_r$ des h tels que, pour tout $t \in \underline{T}$ l'on ait $tht^{-1} = \alpha(t)h$; on a $V = \oplus_{\alpha \in X^*} V_\alpha$, les α tels que $V_\alpha \neq \{0\}$ sont en nombre fini et sont appelés les racines de $\underline{G}$ (relatives au tore $\underline{T}$). L'ensemble des racines de $\underline{G}$ est

$$\Phi = \{\alpha_i/\alpha_j \ , \ 1 \leq i \neq j \leq r\}$$

On choisit pour racines positives l'ensemble

$$\Phi^+ = \{\alpha_i/\alpha_j \ , \ 1 \leq i < j \leq r\}$$

alors l'ensemble des racines a pour base

$$\Delta = \{\alpha_i/\alpha_{i+1} \ , \ 1 \leq i < r\} \ .$$

La chambre de Weyl (positive) est la partie P^+ de X_* définie par

$$P^+ = \Big\{\lambda \in X_* \ / \ < \lambda, \alpha > \geq 0 \ \forall \alpha \in \Phi^+\Big\} \ ,$$

en fait

$$P^+ = \Big\{ \prod_{1 \leq i \leq r} \lambda_i^{n_i} \ / \text{ les } n_i \text{ entiers, } \ n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \Big\} \ . \tag{3}$$

Souvent dans ces définitions on utilise la notation additive, on écrit par exemple $\lambda_i/\lambda_j = \lambda_i - \lambda_j$ et

$$P^+ = \Big\{ \sum_{1 \leq i \leq r} n_i \lambda_i \ / \text{ les } n_i \text{ entiers, } \ n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \Big\} \ , \tag{4}$$

ainsi on pose

$$2\rho = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha = \sum_{1 \leq i \leq r} (r+1-2i)\alpha_i \in X^* \ , \tag{5}$$

on voit que $< \lambda, \rho > \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ pour tout $\lambda \in P^+$.

L'accouplement entre X_* et X^* rappelé plus haut permet de définir les coracines de $\underline{G}$, ce sont les éléments de X_* duaux des racines de $\underline{G}$. Le dual complexe $\underline{G}$ est $G^V = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$; avec des notations évidentes on écrira N^V, T^V, B^V ; l'accouplement permet de définir les données radicielles duales de (X^*, Φ, Δ), qui sont (X_*, Φ^V, Δ^V) et qui sont les données radicielles de G^V car il faut remarquer que par l'accouplement $X_* = X_*(\underline{T})$ est canoniquement isomorphe avec $X^*(T^V)$. Les éléments de Φ^V sont appelées les coracines de $\underline{G}$, ce sont aussi les racines de G^V.

Dans P^+ on définit l'ordre partiel suivant : $\lambda \geq \mu$ si et seulement si $\lambda - \mu$ est une somme de coracines positives.

1.2. **Les représentations.** Soit $\pi : G^V \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G^V. Soit $W_\pi = \oplus V_\rho$ le sous-espace de V obtenu en faisant la somme (directe) des composantes isotypiques de $\pi | U_r$, où U_r est le groupe unitaire, on sait que W_π est dense dans V.

Supposons la dimension de V finie. Il résulte du fait que $X_*(\underline{T}) \simeq X^*(T^V)$ et des rappels 1.5, particulièrement de 1.5.2 et **??**, que les les composantes irréductibles de V sont de poids des éléments de P^+, on écrit

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P^+} V_\lambda \ ,$$

(où seul un nombre fini de V_λ est non nul). Soit $\lambda \in P^+$, $\lambda = \sum_{1 \leq i \leq r} n_i \lambda_i$ (cf (2) et (3)), on a en tant que représentations de T^V

$$V_\lambda = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} V_{\lambda_i} \ ,$$

où V_{λ_i} est la composante de poids λ_i de la représentation V_λ de T^V ; ainsi la trace χ_λ de la représentation V_λ de G^V est

$$\chi_\lambda = \sum_{1 \leq i \leq r} \dim(V_{\lambda_i}) \lambda_i$$

et il faut remarquer que l'action du groupe de Weyl W sur les caractères de G^V, ou sur les cocaractères de $\underline{G}$, permute les $V_{\lambda_i}\lambda_i$, par conséquent les $\dim(V_{\lambda_i})$ ne dépendent pas de i. Il résulte de ceci que

$$\chi_\lambda = \mathrm{trace}(V_\lambda) \in \mathbb{Z}[X^*(T^V)]^W \tag{6}$$

par suite que l'anneau $R(G^V)$ engendré par les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G^V vérifie

$$R(G^V) \simeq \mathbb{Z}[X^*(T^V)]^W \tag{7}$$

1.3. **L'anneau de Hecke.** On pose $K = \underline{G}(A)$, $G = \underline{G}(F)$, $T = \underline{T}(F)$, $N = \underline{N}(F)$ et $B = \underline{B}(F)$. Ce sont des groupes et sous-groupes topologiques, K est un sous-groupe ouvert-compact maximal dans G.

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_G = \mathcal{H}(G, K)$ l'anneau des fonctions définies sur G et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, qui sont localement constantes et à supports compacts, qui de plus sont K-invariantes à droite et à gauche. On muni $\mathcal{H}$ de la convolution

$$f \cdot g(z) = \int_G f(x) g(x^{-1} z dx$$

où dx est la mesure de Haar sur G telle que $\int_K dx = 1$. On vérifie que $f \cdot g$ est bien à valeurs dans $\mathbb{Z}$, que la fonction 1_K indicatrice de K est l'élément neutre de ce produit. Ceci fait de $\mathcal{H}$ un anneau, appelé *l'anneau de Hecke de G.*

Chaque élément f de $\mathcal{H}$ est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de fonctions de la forme 1_{KxK} pour $x \in K \backslash G / K$ et l'on voit avec la décomposition de Cartan que

$$\left\{ c_\lambda := 1_{K\lambda(\varpi)K} \ / \ \ \lambda \in P^+ \right\}$$

est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{H}$.

Soient $\lambda, \mu \in P^+$, posons $c_\lambda \cdot c_\mu = \sum_{\nu \in P^+} n_{\lambda,\mu}(\nu) c_\nu$, avec $n_{\lambda,\mu}(\nu) \in \mathbb{Z}$, et évaluons $n_{\lambda,\mu}(\nu)$. On pose

$$K\lambda(\varpi)K = \coprod_i x_i K \quad \text{et} \quad K\mu(\varpi)K = \coprod_j y_j K \ ,$$

ces deux réunions étant finies. On a

$$\begin{array}{rcl} n_{\lambda,\mu}(\nu) & = & (c_\lambda \cdot c_\mu)(\nu(\varpi)) \\ & = & \int_G c_\lambda(x) c_\mu(x^{-1}\nu(\varpi) dx \\ & = & \sum_i \int_{x_i K} c_\mu(x^{-1}\nu(\varpi) dx \\ & = & \sum_i \int_K c_\mu(k x_i^{-1} \nu(\varpi) dk \\ & = & \sum_i c_\mu(x_i^{-1}\nu(\varpi) \\ & = & \sharp\{(i,j) \ / \ \nu(\varpi) \in x_i y_j K\} \end{array}$$

Il suit que pour tous $\lambda, \mu \in P^+$

$$c_\lambda \cdot c_\mu = c_{\lambda+\mu}$$

(cette relation est particulièrement simple dans le cas de GL_r et beaucoup plus compliquée pour un groupe réductif plus général), ainsi l'anneau de Hecke $\mathcal{H}_G$ est commutatif. On a aussi

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_T & \tilde{\to} & \mathbb{Z}[X_*(\underline{T})] \\ c_\lambda & \mapsto & \lambda \end{array}$$

1.4. **La transformation de Satake.** Soit $\delta_B : B \to \mathbb{R}_{>0}$ le caractère modulaire, c'est à dire, si

$$b = \begin{pmatrix} y_1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & y_2 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_r \end{pmatrix} \in B$$

alors

$$\delta_B(b) = \prod_{1\le i<j\le r} \frac{|y_j|}{|y_i|} = \prod_{1\le i\le r} |y_i|^{2i-r-1} \ .$$

Si $d_L b$ est une mesure de Haar à gauche sur B, $d_R b = \delta_B(b) d_L b$ est une mesure de Haar à droite sur B. On désigne par $\delta^{1/2}$ la racine positive de δ_B.

La transformation de Satake est l'application suivante

(8)
$$\begin{array}{cccc} S: & \mathcal{H}_G & \longrightarrow & \mathcal{H}_T \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}] \simeq \mathbb{Z}[X_*(T)] \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}] \\ & f & \longmapsto & (t \mapsto Sf(t) = \delta(t)^{1/2} \int_N f(tn) dn) \end{array}$$

où dans cette définition dn est la masure de Haar sur N telle que $\int_{N\cap K} dn = 1$. On voit que $S(f)$ est une fonction sur $T/(T\cap K) \simeq X_*(\underline{T})$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$.

Théorème 1.1. *La transformation de Satake induit l'isomorphisme*

$$\mathcal{H}_G \tilde{\to} \left(\mathcal{H}_T \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]\right)^W \simeq \mathcal{R}(G^V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$$

Le deuxième isomorphisme vient de la formule (7). Pour illustrer le premier isomorphisme, qui est la transformation de Satake, calculons $S(c_\lambda)$ pour $\lambda \in P^+$.

On écrit de nouveau $K\lambda(\varpi)K = \coprod x_i K$ avec cette fois $x_i \in B$, puisque $G = BK$, et on pose $x_i = t_i n_i$ avec $t_i \in T$ et $n_i \in N$. On a pour $t \in T$

$$\begin{array}{rcl} S(c_\lambda)(t) & = & \delta(t)^{1/2} \int_N c_\lambda(tn) dn \\ & = & \delta(t)^{1/2} \sum_i \int_{N\cap t^{-1}x_i K} dn \end{array}$$

et l'on voit que $N \cap t^{-1}x_i K \neq \emptyset$ si et seulement si $t^{-1}t_i \in T \cap K$, en fait que

$$\int_{N\cap t^{-1}x_i K} dn = \begin{cases} 1 & \text{si } t^{-1}t_i \in T\cap K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, pour tout $t \in T$

$$S(c_\lambda)(t) = \delta(t)^{1/2} \sharp \Big\{ i \;/\; t^{-1} t_i \in T \cap K \Big\} \tag{9}$$

Plus précisément, évaluons $S(c_\lambda)(\lambda(\varpi))$. On voit que $\lambda(\varpi)^{-1} t_I \in T \cap K$ si et seulement si $x_i = t_i n_i \in \lambda(\varpi) N K \cap K \lambda(\varpi) K$, qu'en fait $\{i \;/\; \lambda(\varpi)^{-1} t_i \in T \cap K\}$ est en bijection avec "$\lambda(\varpi) N K \cap K \lambda(\varpi) K$ modulo la relation d'être dans une même clase $x_i K$", donc

$$\{i \;/\; \lambda(\varpi)^{-1} t_i \in T \cap K\} \rightleftarrows \Big(N \cap \lambda(\varpi)^{-1} K \lambda(\varpi) K \Big) \,/\, (N \cap K) \ . \tag{10}$$

On écrit $\lambda(\varpi) = \mathrm{diag}(\varpi^{m_1}, \cdots, \varpi^{m_r}$ où $m_1 \geq \cdots \geq m_r$ sont des entiers. En les plongeant dans $G/K = BK/K = B/(B \cap K)$ on voit que le membre de droite de (10) est en bijection avec

$$\Big(N \cap \lambda(\varpi)^{-1} K \lambda(\varpi) \Big) \,/\, (N \cap K) \ ,$$

que nous évaluons. Ce dernier est

$$\Big((b_{i,j}) \in N \;/\; |\varpi^{m_i} b_{i,j} \varpi^{-m_j}| \geq 1 \Big) \, (N \cap K) \ ,$$

et le nombre d'éléments de ce dernier ensemble est $q^{\sum_{1 \leq i < j \leq r} m_j - m_i}$. Finalement

$$S(c_\lambda)(\lambda(\varpi)) = \delta(\lambda(\varpi))^{1/2} q^{\sum_{1 \leq i < j \leq r} m_j - m_i} = q^{<\lambda, \rho>} \ . \tag{11}$$

Soient $\lambda = \sum_{1 \leq i \leq r} n_i \lambda_i \in P^+$ (avec $n_1 \geq \cdots \geq n_r$) et V_λ la représentation irréductible de G^V associée. Écrivons $V_\lambda = \oplus_{1 \leq i \leq r} V_i$, où V_i est la composante isotypique en λ_i de V_λ, vu cette fois comme une représentation de T^V. Soit χ_λ la trace de la représentation v_λ de G^V. On a, en tant que représentations de T^V

$$\chi_\lambda = \sum_{1 \leq i \leq r} \dim(V_i) \lambda_i$$

On a, par définition, $\chi_\lambda(\lambda(\varpi)) = 1$.

On a, si $\mu \in P^+$, $S(c_\lambda)(\mu(\varpi)) \neq 0$ implique $\mu \leq \lambda$, ainsi on peut écrire dans $\mathcal{R}(G^V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$

$$S(c_\lambda) = q^{<\lambda, \rho>} \chi_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} a_\lambda(\mu) \chi_\mu \ . \tag{12}$$

En posant $\varphi_\lambda q^{<\lambda, \rho>} \chi_\lambda$ il vient

$$S(c_\lambda) = \varphi_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} b_\lambda(\mu) \varphi_\mu \ . \tag{13}$$

où les $b_\lambda(\mu)$ sant dans $\mathbb{Z}$.

1.5. **Rappels.**

1.5.1. *Les représentations de $\mathfrak{S}_d$.* (cf [13]) Soit G un groupe fini, on pose $\mathbb{C}[G] = \oplus_{g\in G}\mathbb{C}e_g$, c'est une algèbre (l'algèbre du groupe G) pour le produit $e_g e_h = e_{gh}$, une représentation de G dans un espace vectoriel V est simplement un homomorphisme $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$. La *représentation régulière de* G est l'action de $\mathbb{C}[G]$ sur lui-même par multiplication à gauche, elle est notée $\mathcal{R}_G$, donc, en tant qu'espace vectoriel $\mathcal{R}_G = \mathbb{C}[G]$. Rappelons que

$$\mathcal{R}_G \simeq \oplus V_\rho^{m_\rho}$$

où la somme directe est prise suivant un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G.

Le sous-espace

$$W = \Big\{ \sum_{g\in G} x_g e_g \in \mathbb{C}[G] \;/\; \sum_{g\in G} x_g = 0 \Big\}$$

est une sous-représentation de la représentation régulière, appelée la *représentation standard de G*.

(cf [3], lecture 4) $\mathfrak{S}_d$ est le groupe des permutations de $\{1,\cdots,d\}$. Soit $\underline{n} = (n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1)$ une partition de d. Rappelons que si $p(d)$ est le nombre de partitions de d on a

$$\sum_{d\geq 0} p(d)t^d = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-t^2} \;.$$

Le *diagramme de Young associé à la partition* $\underline{n}$ est

$$\begin{pmatrix} n_1: & 1 & 2 & 3 & \cdots & n_1-1 & n_1 \\ n_2: & n_1+1 & n_1+2 & n_1+3 & \cdots & n_1+n_2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ n_k: & * & * & & & & \end{pmatrix}$$

la partition conjuguée est obtenue par symétrie de ce diagramme relativement à la première diagonale.

Soient

$$P = P_{\underline{n}} = \Big\{\sigma \in \mathfrak{S}_d \;/\; \sigma \text{ laisse stable globalement chaque ligne du diagramme}\Big\}$$

$$Q = Q_{\underline{n}} = \Big\{\sigma \in \mathfrak{S}_d \;/\; \sigma \text{ laisse stable globalement chaque colonne du diagramme}\Big\}$$

$$a_{\underline{n}} = \sum_{\sigma\in P} e_\sigma \;,\; b_{\underline{n}} = \sum_{\sigma\in P} \mathrm{sgn}(\sigma)e_\sigma \;\; \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d] \;.$$

Soit V un espace vectoriel, on fait opérer $\mathfrak{S}_d$ sur $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs. On voit alors que cette opération induit celle de $a_{\underline{n}}$ sur

$$\mathrm{Sym}^{n_1}V \otimes \mathrm{Sym}^{n_2}V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{n_k}V \tag{14}$$

c'est à dire que

$$\operatorname{Im}(a_{\underline{n}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Im}\left(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]a_{\underline{n}} \longrightarrow \operatorname{End}(V^{\otimes d})\right)$$

opère sur l'espace défini en (14), ce qui permet d'écrire l'inclusion entre représentations de $\mathfrak{S}_d$

$$\operatorname{Sym}^{n_1}V \otimes \operatorname{Sym}^{n_2}V \otimes \cdots \otimes \operatorname{Sym}^{n_k}V \subset V^{\otimes d} ,$$

où $\mathfrak{S}_d$ opère par permutation des facteurs sur le membre de droite, de la même manière sur le membre de gauche mais via $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]a_{\underline{n}}$.

De même, on a l'inclusion entre représentations de $\mathfrak{S}_d$

$$\bigwedge^{n'_1} V \otimes \bigwedge^{n'_2} V \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{n'_{k'}} V \subset V^{\otimes d} ,$$

où $\underline{n'} = (n'_1 \geq n'_2 \geq \cdots \geq n'_{k'})$ est la partition duale de $\underline{n}$ et où $\mathfrak{S}_d$ opère sur le membre de gauche via $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]b_{\underline{n}}$, cette représentation étant notée $\operatorname{Im}(b_{\underline{n}})$.

Théorème 1.2. *(1) Soit $\gamma_{\underline{n}} = a_{\underline{n}}b_{\underline{n}} \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ le symétriseur de Young, alors $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\gamma_{\underline{n}}$ est une représentation (par la multiplication à droite) irréductible de $\mathfrak{S}_d$, notée $V_{\underline{n}}$.*

(2) Toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_d$ sont de la forme $V_{\underline{n}}$, pour une partition $\underline{n}$ de d.

(3) On a dans $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$

$$\gamma_{\underline{n}}^2 = \delta_{\underline{n}}\gamma_{\underline{n}} \quad \textit{avec} \quad \delta_{\underline{n}} = \frac{d!}{\dim(V_{\underline{n}})} .$$

Exemple 1.3. *(1) Si $\underline{n} = (d)$, alors $a_{\underline{n}} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} e_\sigma$, $b_{\underline{n}} = 1$, $\gamma_{\underline{n}} = a_{\underline{n}}$ et*

$$V_{\underline{n}} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\gamma_{\underline{n}} = \mathbb{C} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} e_\sigma$$

est la représentation triviale.

(2) $\underline{n} = (1 \geq 1 \geq \cdots \geq 1)$, alors $a_{\underline{n}} = 1$, $b_{\underline{n}} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \operatorname{sgn}(\sigma)e_\sigma$, $\gamma_{\underline{n}} = b_{\underline{n}}$ et

$$V_{\underline{n}} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\gamma_{\underline{n}} = \mathbb{C} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \operatorname{sgn}(\sigma)e_\sigma$$

est la signature.

1.5.2. *Les représentations de* $\mathrm{GL}(V)$. ([3], lecture 6) La lettre V désigne un espace vectoriel de dimension finie r. Le groupe $\mathfrak{S}_d$ opère sur $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs : $\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}$ (opération à droite) et cette opération commute avec celle à gauche de $\mathrm{GL}(V)$.

Soit $\underline{n} = (n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1)$ une partition de d. L'image de $\gamma_{\underline{n}}$, le symétriseur de Young, par cette action de $\mathfrak{S}_d$ se note $S_{\underline{n}}V$, cela veut dire que $S_{\underline{n}}V$ est une représentation de $\mathfrak{S}_d$ dont l'espace est $S_{\underline{n}}V = V^{\otimes d}/\ker(\gamma_{\underline{n}})$, qui de plus est muni de l'action de $\mathrm{GL}(V)$. Le foncteur $V \mapsto S_{\underline{n}}V$ s'appelle *le foncteur de Schur*, ou le *module de Weyl*, ou encore *la construction de Weyl*, associé à la partition $\underline{n}$ de d.

Exemple 1.4. *Si* $\underline{n} = (d)$ *alors* $S_{\underline{n}}V = \mathrm{Sym}^d V$.
Si $\underline{n} = (1, \cdots, 1)$ *(avec* $k = d$*) alors* $S_{\underline{n}}V = \bigwedge^d V$.

Remarquons que l'on peut avoir $S_{\underline{n}}V = 0$ si V, par exemple lorsque dans le diagramme de Young le nombre de lignes est plus grand que la dimension de V.

$\mathrm{GL}(V)$ opère sur $S_{\underline{n}}V$, on note $\chi_{S_{\underline{n}}V}(g)$ la trace de $g \in \mathrm{GL}(V)$ opérant sur $S_{\underline{n}}V$.

Le polynôme de symétrique $H_{\underline{n}} = H_{\underline{n}}(x_1, \cdots, x_r)$ *à* $r = \dim V$ *indéterminée et associé à la partition* $\underline{n}$ est par définition $H_{\underline{n}} = \prod_{1 \leq i \leq k} H_{n_i}$, où $H_{n_i} = H_{n_i}(x_1, \cdots, x_r)$ est le polynôme symétrique complet à r indéterminée et de degré n_i, c'est à dire la somme de tous les monômes possibles de degré n_i

Le polynôme de Schur $S_{\underline{n}}(x_1, \cdots, x_r)$ associé à la partition $\underline{n}$ est par définition

$$S_{\underline{n}}(x_1, \cdots, x_r) = \frac{\det\left((x_j^{n_i+k-i})_{i,j}\right)}{\left((x_j^{k-i})_{i,j}\right)} = \frac{\det\left((x_j^{n_i+k-i})_{i,j}\right)}{\Delta}$$

où $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)$.

Exemple 1.5. *Si* $\underline{n} = (d)$ *alors* $\chi_{S_{\underline{n}}V}(g) = H_d(x_1, \cdots, x_r) = S_{(d)}(x_1, \cdots, x_r)$.
Si $\underline{n} = (1, \cdots, 1)$ *(avec* $k = d$*) alors* $\chi_{S_{\underline{n}}V}(g) = H_{(1,\cdots,1)}(x_1, \cdots, x_r) = S_{(1,\cdots,1)}(x_1, \cdots, x_r)$ *et c'est aussi le polynôme symétrique élémentaire de degré* d.

Théorème 1.6. *On a* $S_{\underline{n}}V = 0$ *si* $n_{r+1} \neq 0$ *(où* $r = \dim V$*). Maintenant on écrit donc* $\underline{n} = (n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 0)$.

(1) On a

$$\dim(S_{\underline{n}}V) = S_{\underline{n}}(1, \cdots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{n_i - n_j + j - i}{j - i}$$

(2) *Notons $V_{\underline{n}}$ le représentation irréductible de $\mathfrak{S}_d$ correspondant à la partition $\underline{n}$, et soit $m_{\underline{n}} = \dim V_{\underline{n}}$, alors on a la décomposition en tant que représentation de $\mathfrak{S}_d$ et de $\mathrm{GL}(V)$, comme décrite plus haut :*
$$v^{\otimes d} \simeq \bigoplus_{\underline{n}} S_{\underline{n}}\left(V^{\otimes m_{\underline{n}}}\right)$$
où $\underline{n}$ décrit toutes les partitions de d, avec $n_{r+1} = 0$.

(3) *Pour tout $g \in GL(V)$ la trace $\chi_{S_{\underline{n}}V}(g)$ de g opérant sur $S_{\underline{n}}V$ est*
$$\chi_{S_{\underline{n}}V}(g) = S_{\underline{n}}(x_1, \cdots, x_r)\ .$$

(4) *Chaque $S_{\underline{n}}V$ est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(V)$.*

([3], § 15-3, 15-5) Maintenant on pose $V = \mathbb{C}^r$, on a la représentation det et remarquons que si $k \geq 0$ on a aussi $(\det)^k = (\bigwedge^r V)^{\otimes k}$ et $(\det)^{-k} = \left((\det)^k\right)^*$.

Une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C})$ est de la forme $\Phi_{\underline{a}}$ suivante : soit $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_{r-1}, a_r)$ où les a_i désignent des entiers naturels, $\Phi_{\underline{a}}$ est la sous-représentation de
$$\mathrm{Sym}^{a_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{a_2}\left(\bigwedge^2 V\right) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{a_{r-1}}\left(\bigwedge^{r-1} V\right) \mathrm{Sym}^{a_r}\left(\bigwedge^r V\right)$$
engendrée par le vecteur de plus haut poids, de poids
$$a_1 p_1 + a_2(p_1 + p_2) + \cdots a_{r-1}(p_1 + \cdots + p_{r-1})\ ,$$
qui en fait est le vecteur
$$v = (e_1)^{a_1} \otimes (e_1 \wedge e_2)^{a_2} \otimes \cdots \otimes (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)^{a_r}\ ;$$
dans ces formules $e_1, \cdots, e_r$ désigne la base canonique de $V = \mathbb{C}^r$ et le p_i sont les poids de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}l_r$, c'est à dire que $p(0, \cdots, 0, t_j, 0, \cdots, 0) = t_j \delta_{i,j}$ (voir le paragraphe suivant).

Une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C})$ peut être prolongée à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ de la manière suivante. Soit
$$\underline{n} = (n_1 = a_1 + \cdots + a_r, n_2 = a_2 + \cdots + a_r, \cdots, n_r = a_r)\ ,$$
la représentation $\Phi_{\underline{a}}$ est prolongée à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par la représentation $\Psi_{\underline{n}}$, qui est obtenue par le foncteur de Schur $S_{\underline{n}}V$ appliqué à la représentation standard de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Remarquons que l'on peut étendre ceci aux $n_i \leq 0$ car pour tout entier $k \leq 0$
$$\Psi_{(n_1, \cdots, n_r)} = \Psi_{(n_1 + k, \cdots, n_r + k)} \otimes (\det)^{-k}\ .$$

Proposition 1.7. *Toute représentation complexe irréductible de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est de la forme $\Psi_{\underline{n}}$ avec $\underline{n} = (n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r)$.*

La démonstration utilise le morphisme surjectif

$$\begin{array}{rcc} \mathrm{SL}_r(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \\ (g,z) & \longmapsto & e^z g \end{array}$$

elle est donc spécifique au corps des complexes.

1.5.3. *Racines, etc.* ([2] § 8 et14, pour le point de vue des algébres de Lie [3], lectures 8 et 14) On désigne par F un corps, les espaces vectoriels, les représentations, seront tous sur ce corps, on pose $G = \mathrm{GL}_r(F)$. Soit (ρ, V) une représentation de G dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $\alpha \in X^* = X^*(T)$ soit V_α l'ensemble des $v \in V$ tels que pour tout $t \in T$ l'on ait $\rho(t)v = \alpha(t)v$. On a $V = \oplus_{\alpha \in X^*} V_\alpha$. Les $\alpha \in X^*$ tels que $V_\alpha \neq \{0\}$ s'appellent *les poids de la représentation* ρ. Les poids de G agissant par conjugaison sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l_r(F) = \mathrm{M}_r(F)$ s'appellent *les racines de* G.

Soit $\alpha_i \in X^*$ qui à tout élément t de $T(F)$ associe sa i-ème coordonnée, alors l'ensemble des racine $\mathcal{R}$ de G, appelé aussi système de racines, est

$$\mathcal{R} = \left\{ \alpha_i/\alpha_j \ / \ 1 \leq i \neq j \leq r \right\}$$

Les éléments de

$$\mathcal{R}^+ = \left\{ \alpha_i/\alpha_j \ / \ 1 \leq i < j \leq r \right\}$$

sont appelés les racines positives tandis que

$$\mathcal{R}^- = \left\{ \alpha_i/\alpha_j \ / \ 1 \leq j < i \leq r \right\}$$

est l'ensemble des racines négatives. On appelle base du système de racines

$$\Delta = \left\{ \alpha_i/\alpha_{I+1} \ / \ 1 \leq i < r \right\} .$$

Pour tout racine α, on désigne comme au dessus par $\mathfrak{g}_\alpha$ l'ensemble des éléments g de $\mathfrak{g}$ tels que $tgt^{-1} = \alpha(t)g$, lorsque $\alpha = \alpha_i/\alpha_j$ $\mathfrak{g}_\alpha$ est l'ensemble des matrices dont le seul coefficient non nul est celui d'indice i, j. On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}_\alpha \right) .$$

Soit (ρ, V) une représentation de G, de dimension finie. Écrivons $V = V^T \oplus (\oplus_\alpha V_\alpha)$, la décomposition de V suivant ses espaces de poids. Comme G permute (par conjugaison) ses caractères $\neq 1$, on voit que la dimension de V_α ne dépend pas du poids $\alpha \neq 1$.

Soit encore (ρ, V) comme au dessus ; un élément $v \in V$, $v \neq 0$, qui est un vecteur propre pour l'action de T et qui est dans le noyau des éléments des $\mathfrak{g}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathcal{R}^+$, est appelé un *vecteur de plus haut poids* *dans V*. Par exemple, pour G opérant par conjugaison sur son algèbre de Lie, un vecteur de plus haut poids est une matrice n'ayant qu'un seul coefficient non nul, d'indice i, j avec $i \geq j$ (donc ce coefficient est sous ou sur la première diagonale).

Proposition 1.8. *Soit (ρ, V) une représentation de G, de dimension finie.*

(1) La représentation V possède au moins un vecteur de plus haut poids.
(2) Soit v un vecteur de plus haut poids de V, alors $\sum_{\beta \in \mathcal{R}^-} F\mathfrak{g}_\beta v$ est une sous-représentation irréductible de V.
(3) Si V est irréductible, alors V ne possède qu'un unique vecteur de plus haut poids, à multiple scalaire près.

2. La grassmannienne affine

2.1. **Quelques définitions et propriétés.**

2.1.1. *Les espaces de Tate, définitions.* La lettre k désigne un corps muni de la topologie discrète. Les espaces vectoriels considérés ici sont sur k.

Un *espace de Tate* est un espace vectoriel topologique complet possédant une base de voisinage de 0 formée de sous-espaces commensurables (on dit que les sous espaces U_1 et U_2 sont commensurables si $\dim U_i/(U_1 \cap U_2) < \infty$, $i = 1, 2$).

Un sous-espace P d'un espace de Tate V est dit *borné* si pour tout sous-espace ouvert U de V il existe une famille finie $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ telle que $P \subset U + kv_1, \cdots, kv_n$.

Le *dual topologique* d'un espace de Tate V est l'espace V^* des formes linéaires continues, muni de la topologie telle qu'une base de voisinages ouverts de $0 \in V^*$fst formée par les orthogonaux des sous-espaces bornés. V^* est un spaces de Tate et le morphisme canonique $V^* \to (V^*)^*$ est un isomorphisme (ceci est une conséquences de propriétés montrées plus loin).

Un *c-réseau* de V est un sous-espace ouvert borné ("c" comme compact). Un *d-réseau* de V est un sous-espace discret Γ tel qu'il existe un c-réseau P avec $\Gamma + P = V$ ("d" comme discret).

Si W est un d-réseau (resp. un c-réseau) de V il existe un c-réseau (resp. un d-réseau) W' de V tel que $W \oplus W' = V$. Si W est un d-réseau (resp. un c-réseau) de V, alors $W^\perp$ est encore un d-réseau (resp.

un c-réseau) de V^* et $(W^\perp)\perp = W$ (ceci sera aussi prouvé dasn le paragraphe suivant).

Soit V un espace de Tate et A une algèbre commutative munie de sa topologie discrète et soit $V_A = V\widehat{\otimes}A$. On dit que V_A est un A-module de Tate. Un *c-réseau du A-module de Tate V_A* est un sous-module ouvert et borné (définition semblable à la précédente) P tel que V/P soit projectif sur A. Un *d-réseau du A-module de Tate V_A* est un sous-module Γ tel qu'il existe un c-réseau $P \subset V_A$ avec $\Gamma \cap P = \{0\}$ et que $V/(\Gamma \cap P)$ soit projectif de type fini sur A. Les commentaires précédents sur les espaces de Tate sont encore valables.

2.1.2. *Les espaces de Tate, propriétés.* Soit V un espace de Tate.

(1) Soient P un sous espace borné de V, U un sous-espace ouvert et F un sous-espace de dimension finie tels que

$$P \subset U + F \ ,$$

alors on peut choisir F tel que $F \subset P$.
En effet on peut supposer $U \cap F = \{0\}$ et l'on a

$$P/(U \cap P) \hookrightarrow F/(U \cap F) = F \ ,$$

donc $P = U \cap P + F_1$ où F_1 est un sous-espace de P isomorphe à un sous-espace de F.

(2) Soit P un sous-espace borné d'intérieur non vide, alors il est ouvert, c'est donc un c-réseau.
En effet soient $P^0 \neq \emptyset$ l'intérieur de P et F un sous-espace de P de dimension finie tels que $P = P^0 + F$; on voit que P est ouvert.

(3) L'adhérence d'un sous-espace borné est encore un sous-espace borné. tout sous-espace ouvert de V est borné, c'est donc un c-réseau.

(4) Soient P et Q deux c-réseaux de V, alors $P/(P \cap Q)$ est de dimension finie.
En effet $P + Q \subset Q + F$ où F est un sous-espace de dimension finie, donc

$$P/(P \cap Q) \simeq (P + Q)/Q \hookrightarrow (Q + F)/Q \ .$$

(5) Soient P et Q deux c-réseaux de V, alors (si $(\ )\top$ désigne l'orthogonalité de V dans son dual et $(\ )^*$ la dualité algébrique)

$$P^\perp/(P^\perp \cap Q^\perp) \simeq ((P + Q)/P)^* \ .$$

Eb n effatces espaces sont de dimensions finies et $(P+Q)^\perp = (P\cap Q)^\perp$.
L'application

$$P\perp \to ((P + Q)/P)^* \ , \ f \mapsto f|(P + Q)$$

induit une injection

$$P^\perp/(P^\perp \cap Q^\perp) \hookrightarrow ((P + Q)/P)^*$$

dont il faut prouver qu'elle est surjective. Soit $f \in ((P+Q)/P)^*$. On relève f à $P+Q$, on la prolonge à V par une formule du type $V = (P+Q) \otimes \Gamma$ où Γest un d-réseau et l'on voit que cette dernière est continue.

Lemme 2.1. *Soient A une k-algèbre commutative (munie de sa topologie discrète) et P un c-réseau de $V\widehat{\otimes}A$. Alors il existe deux c-reseaux U_1 et U_2 de V, $U_2 \subset U_1$, tels que*

$$(U_2 \otimes A)^{\mathrm{adh}} \subset P \subset (U_1 \otimes A)^{\mathrm{adh}} \ ,$$

de plus la suite de A-module

$$0 \to (U_2 \otimes A)^{\mathrm{adh}} \to (U_1 \otimes A)^{\mathrm{adh}} \to (U_1/U_2) \otimes A \to 0$$

est exacte (on peut remarquer que (U_1/U_2) est de dimension finie sur k).

Démonstration. Soit U un c-réseau de V, il existe un A-module de type fini $F = \sum_1^N Af_i$ tel que

$$P \subset (U \otimes A)^{\mathrm{adh}} + F \ ,$$

pour tout i soit $g_i \in V \otimes A$ tel que $f_i - g_i \in (U \otimes A)^{\mathrm{adh}}$, clairement

$$P \subset (U \otimes A)^{\mathrm{adh}} + \sum_1^N Ag_i \ ,$$

posons $g_i = \sum_j v_{i,j} \otimes a_{i,j}$, cette somme étant finie, avec $v_{i,j} \in V$ et $a_{i,j} \in A$, soit $U_1 = U + \sum_{i,j} kv_{i,j}$, c'est un c-réseau de V et

$$(U_1 \otimes A)^{\mathrm{adh}} \supset (U \otimes A)^{\mathrm{adh}} + F \supset P \ .$$

Une base de voisinages de $0 \in V\widehat{\otimes}A$ est donnée par les $(U \otimes A)^{\mathrm{adh}}$, où U est un c-résau de V, d'où l'existence de U_2.

Montrons l'exactitude de la suite. L'existence de cette suite provient de la suite exacte

$$0 \to U_2 \otimes A \to U_1 \otimes A \to (U_1/U_2) \otimes A \to 0$$

et la seule difficulté est de montrer l'exactitude en $(U_1 \otimes A)^{\mathrm{adh}}$.
Soit $u_2 \in (U_2 \otimes A)^{\mathrm{adh}}$ et soit $u_2' \in U_2 \otimes A$ suffisamment proche de u_2, comme u_2' donne 0 dans $(U_1/U_2) \otimes A$, il en est de même de u_2.
Soit $u_1 \in (U_1 \otimes A)^{\mathrm{adh}}$ donnant 0 dans $(U_1/U_2) \otimes A$. Soit $u_1' \in U_1 \otimes A$ suffisamment proche de u_1, donc donnat aussi 0 dans $(U_1/U_2) \otimes A$, par suit $u_1' \in U_2 \otimes A$, donc $u_1 \in (U_2 \otimes A)^{\mathrm{adh}}$. □

(6) Soit P un c-réseau de V, alors

$$\left\{ x \in V \ / \ u(x) = 0 \ \forall \ u \in P^{\perp} \right\} = P$$

En effet, soit $x \in V$ tel que $u(x) = 0$ pour tout $u \in P^\perp$, comme $P + kx$ est un c-réseau de V on a

$$((P + kx)/P)^* \simeq P^\perp/(P + kx)^\perp = P^\perp/P^\perp$$

donc $x \in P$.

(7) Montrons que le morphisme naturel $V \to (V^*)^*$ est surjectif. Soit $f : V^* \to k$ linéaire et continue. Si P est un c-réseau de V on pose $f_P = f|P^\perp$. Soit Q un c-réseu de V avec $Q^\perp \in \ker f$ (Q existe car $\ker f$ est ouvert). Alors

$$f_P : P^\perp/(P^\perp \cap Q^\perp) \simeq ((P + Q)/P)^* \longrightarrow k$$

est défini sur un espace de dimension finie, donc il existe $x_P \in P + Q$ tel que $f_P : P^\perp \to k$ soit l'application $u \mapsto u(x_P)$. En fait x_P est défini modulo P, on pose $Z_P = x_P + P$.

Soit $P_1 \subset P_2$ deux c-réseaux de V, montrons $Z_{P_1} \subset Z_{P_2}$. On a $P_2^\perp \subset P_1^\perp$, soit $u \in P_2^\perp$, on a $f(u) = u(x_{P_2}) = u(x_{P_1})$, donc (cf (6)) $x_{P_1} - x_{P_2} \in P_2$.

Écrivons $V = \cup P$, c'est à dire V sous la forme de la réunion de ses c-réseaux (c'est possible, si $x \in V$ et si P est un c-réseu, alors $P+kx$ est encore un c-réseau). La famille $(Z_P)_P$ est une base de filtre de Cauchy, V est complet, donc $\cap_P Z_P \neq \emptyset$ (on peut rearquer que $Z_{P_1} \cap Z_{P_2} \subset Z_{P_1 \cap P_2}$). Soit $x \in \cap_P Z_P$, on a $f(u) = u(x)$ pour tout $u \in V^*$. □

Il est sans doute possible de retrouver ce dernier résultat à l'aide de la remarque suivante ;

Remarque 2.2. *Soit I un ensemble, on dit que deux parties A et B de I sont commensurables si $A - (A \cap B)$ et $B - (A \cap B)$ sont finis. C'est une relation d'équivalence sur les parties de I. Soit $\mathcal{A}$ une classe d'équivalence. les éléments de $\mathcal{A}$ sont dits semi-infinis. Soit $(e_i)_{i \in I}$ un ensemble indexé sur I (sur la réunion de A, $A \in \mathcal{A}$ suffirait)*

$$k((I, \mathcal{A})) = \Big\{ \sum_i c_i e_i \ , \ c_i \in k \ , \ \text{il existe } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } c_i = 0 \text{ si } i \notin A \ \Big\}$$

Pour $A \in \mathcal{A}$ soit $k[[A]] = \{\sum_{i \in A} c_i e_i \ , \ c_i \in k\}$, ces sous-espaces forment un base de voisinages de 0 et font de $k((I, \mathcal{A}))$ un espce de Tate. L'espace duel est $k((I, \mathcal{A}')),$ où $\mathcal{A}'$ est l'ensemble des complémentaires des élément de $\mathcal{A}$.Tout espace de Tate est isomorphe à un $k((I, \mathcal{A}))$.

Montrons la dernière assertion de la remarque. Soient V un espace de Tate et U l'un de ses sous-espaces ouverts. Soit Γ un supplémentaire de U, alors Γ est discret (si $x, y \in \Gamma$, $x \neq y$, on a $(x+U) \cap (y+U) = \emptyset$). Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de U et $(e_j)_{j \in J}$ une base de Γ (avec donc $I \cap J = \emptyset$). Soit U' un autre sous espace ouvert de V. Comme $U \cap U'$ ets de codimension finie dans U il existe une partie finie F de I telle que $\sum_{i \in F} ke_I$ s'envoie surjectivement sur $U/(U\cap U')$. Soit $U''=\sum_{i\in I-F}ke_i$. On a $U''\subset U\cap U'$ et U'' est ouvert car U/U'' est de dimension finie.

Sot $\mathcal{V}$ l'ensemble des $U''\oplus E$, où $U''=\sum_{i\in I-F}ke_i$ pour une certaine partie finie F de I et où $E=\oplus_{j\in H}ke_j$ où H est une certaine partie finie de J. Alors la famille $\mathcal{V}$ forme une base de voisinages ouverts de $0\in V$ et

$$V\simeq k((I\cup J,\{I'\cup J'\}))$$

où $\{I'\cup J'\}$ est la famille des parties de $I\cup J$ telle que $I'\subset I$ et $I-I'$ fini, $J'\subset J$ et $J-J'$ fini.

2.2. **Les ind-schémas.** Le corps de base est toujours noté k et soumis aux mêmes hypothèses.

Un *ind-schéma* X est un k-espace fpqc, c'est à dire un foncteur défini sur la catégorie des k-schémas affines (ou des k-algèbres commutatives et unitaires) munie de la topologie fpqc, à valeur dans la catégorie des ensembles, foncteur qui est représenté par une limite inductive de schémas $\varinjlim X_\alpha$, où (X_α) est une famille inductive de k-schémas quasi-compacts, telle que les morphismes $i_{\alpha,\beta}:X_\alpha\to X_\beta$, $\alpha\leq\beta$, soient des immersions fermées. Lorsque l'ensemble $\{\alpha\}$ est dénombrable on dit que X est un *$\aleph_0$-ind-schéma.* On dit que X est *ind-affine* si les X_α sont affines.

Soit P une propriété des k-schémas stable par restriction aux sous-schémas fermés ; si chaque X_α satisfait P on dit que X satisfait P.

Soit $X_{\text{réd}}=\varinjlim X_{\alpha,\text{réd}}$ (réd comme réduit), on dit que X est réduit si $X=X_{\text{réd}}$.

Un *schéma formel* est un ind-schéma X tel que $X_{\text{réd}}$ soit un schéma ([1]). Un schéma formel X est ind-affine si et seulement si $X_{\text{réd}}$ est affine, on dit alors simplement que X est affine.

On dit que le *ind-schéma X est formellement lisse* si pour toute k algèbre (commutative et unitaire) A et tout idéal nilpotent I de A l'application $X(A)\to X(A/I)$ est surjective. *Un morphisme $u:X\to Y$ de ind-schémas est dit formellement lisse* si pour toute k algèbre (commutative et unitaire) A et tout idéal nilpotent I de A l'application

$$X(A)\longrightarrow Y(A)\underset{Y(A/I)\ \swarrow u}{\times}X(A/I)$$

est surjective.

1. En toute généralité cette définition n'est pas équivalente à celle de Grothendieck, mais les deux notions coïncident dans la situation qui va nous occuper, c'est à dire pour les $\aleph_0$-ind-schémas ind-affines.

Exemple 2.3. *(1) Un ind-schéma ind-affine* $X = \varinjlim X_\alpha$ *est la même chose qu'une pro-algèbre, en effet, on a* $X_\alpha = \mathrm{Spec} R_\alpha$*, pour* $\alpha \leq \beta$ *le morphisme* $R_\beta \to R_\alpha$ *est surjectif et* X *est le spectre formel de* $R = \varprojlim R_\alpha$.

Soit une algèbre topologique complète R *dont la topologie est donnée par des idéaux ouverts* I_α *, elle peut être vue comme "l'algèbre d'un ind-schéma ind-affine" car* $R = \varprojlim R_\alpha$*. Les* $\aleph_0$*-ind-schémas ind-affines sont de cette forme.*

(2) Soit V *un espace de Tate, alors le foncteur* $V : A \mapsto V\widehat{\otimes}A$ *est un ind-schéma ind-affine. Un c réseau de* V *est en fait un espace affine, en effet soit* U_α *un c-réseau de* V *et* U_α^* *son dual, puisque* $U_\alpha = \mathrm{Hom}(U_\alpha^*, k)$ *(*k *est muni de la topologie discrète), si* $R = \varprojlim (\mathrm{Sym} U_\alpha^*)$*, alors le foncteur* V *est le spectre formel de* R.

(3) Soit V *un espace de Tate et notons toujours* V *l'ind-schéma associé ; On désigne par* $\mathcal{G}r(V)$ *l'espace des c-réseaux de* V*, c'est à dire le foncteur qui à toute algèbre* A *associe l'ensemble* $\mathcal{G}r(V)(A) = \mathcal{G}r(V)(\mathrm{Spec} A)$ *des c-réseaux de* $V\widetilde{\otimes}A$*, c'est un ind-schéma ind-propre et formellement lisse, en fait, comme le montre le lemme 2.1 c'est la réunion des grassmanniennes des* U_1/U_2*, pour toutes les paires de c-réseaux* $U_2 \subset U_1$ *de* V*.*

Un autre exemple est donné par le lemme suivant

Lemme 2.4. *On pose* $\mathcal{K} = k((t))$ *et* $\mathcal{O} = k[[t]]$*, où* t *est une indéterminée. Pour tout* k*-ensembel* Y *(i.e. foncteur de la catégorie des* k*-algèbres commutatives et unitaires dans la catégorie des ensembles), on considère les deux* k*-ensembles* $Y(\mathcal{O}) \subset Y(\mathcal{K})$ *ainsi définis*

$$Y(\mathcal{O})(A) = Y(\mathcal{O}\widetilde{\otimes}A) \quad \textit{et} \quad Y(\mathcal{O})(A) = Y(\mathcal{K}\widetilde{\otimes}A)$$

((et remarquons que l'on peut écrire $\mathcal{O}\widetilde{\otimes}A = A[[t]]$*,* $\mathcal{K}\widetilde{\otimes}A = A((t))$*).*

Supposons que Y *soit un schéma affine, alors* $Y(\mathcal{O})$ *est aussi un schéma affine et* $Y(\mathcal{K})$ *est un* $\aleph_0$*-ind-schéma ind-affine. Si* Y *est lisse,* $Y(\mathcal{O})$ *et* $Y(\mathcal{K})$ *sont formellement lisses.*

Démonstration. Posons $Y = \mathrm{Spec} B$.

Soit dans l'algèbre de polynômes $k[T_{b,n}\ ,\ b \in B\ ,\ n \in \mathbb{N}]$ l'idéal I engendré par les relations

$$T_{b_1+b_2,n} - T_{b_1,n} - T_{b_2,n}\ ,\ T_{b_1 b_2,n} - \sum_{i+j=n} T_{b_1,i} T_{b_2,j} \ \text{ pour } \ b_1, b_2 \in B\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } T_{ab,n} - aT_{b,n} \ \text{ pour } \ b \in B\ ,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } a \in k\ .$$

Soit $\mathcal{V}_0 = k[T_{b,n}\ ,\ b \in B\ ,\ n \in \mathbb{N}]/I$, alors pour toute k-algèbre commutative et unitaire A

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{V}_0, A) & \tilde{\to} & \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(B, A[[t]]) \\ f & \mapsto & b \mapsto \sum_{n\geq 0} f(T_{b,n})t^n \end{array}$$

Ainsi $Y(\mathcal{O})$ est le schéma $\mathrm{Spec}\mathcal{V}_0$.

Soit $\lambda : B \to \mathbb{N}$ vérifiant, pour tous $b_1, b_2 \in B$

$$\lambda(b_1b_2) \leq \lambda(b_1) + \lambda(b_2) \ \text{ et } \ \lambda(b_1 + b_2) \leq \max\{\lambda(b_1), \lambda(b_2)\}\ .$$

On écrit $\lambda_1 \geq \lambda_2$ si $\lambda_1(b) \geq \lambda_2(b)$ pourtout $b \in B$. Remarquons que l'ensemble de ces λ possède un plus petit élément, qui est la foction nulle, et qu'il est réticulé : $\lambda_1, \lambda_2 \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Pour l'une de ces fonctions λ on considère l'algèbre de polynômes $k[T_{b,n}\ ,\ n$
$geq - \lambda(b)\ ,\ b \in B]$ et son idéal I défini comme le précédent, soit

$$\mathcal{V}_\lambda = k[T_{b,n}\ ,\ n\ \geq -\lambda(b)\ ,\ b \in B]/I_\lambda$$

où I_λ est l'idéal engendré par les relations

$$T_{b_1+b_2,n} - T_{b_1,n} - T_{b_2,n}\ ,\ T_{b_1b_2,n} - \sum_{i+j=n} T_{b_1,i}T_{b_2,j} \ \text{ pour } \ b_1, b_2 \in B$$

(sous-entendu $T_{b,n} = 0$ si $n < -\lambda(b)$), et

$$T_{ab,n} - aT_{b,n} \ \text{ pour } \ b \in B\ ,\ n \geq -\lambda(b) \text{ et } a \in k\ .$$

(remarquons que pour la fonction $\lambda = 0$ on retrouve bien l'algèbre $\mathcal{V}_0$ précédente). Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ on a une flèche naturelle surjective $\mathcal{V}_{\lambda?1} \twoheadrightarrow \mathcal{V}_{\lambda?2}$, d'où la définition

$$\mathcal{V}_B = \lim_{\leftarrow} \mathcal{V}_\lambda\ .$$

On voit que pour tout algèbre A, par les mêmes calculs qu'au dessus $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{V}_\lambda, A)$ est isomorphe à la sous algèbre des éléments f de $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(B, A((t)))$ tels que pour tout $b \in B$ $f(b)$ soit un série de $A((t))$ dont sont nuls tous les coefficients d'indices strictement inférieurs à $-\lambda(b)$ ($f(b)$ s'écrit $f(b) = \sum_{n\geq -\lambda(b)} a_nt^n$, $a_n \in A$), il vient donc

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{V}_B, A) \simeq \lim_{\rightarrow} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{V}_\lambda, A)\ .$$

$\square$

2.3. **La grassmannienne affine de GL_r.** Ce qui est dit ici est valable pour un groupe réductif général, avec cependant quelquefois des difficultés supplémentaires, nous nous limitons au cas où $G = \mathrm{GL}_r$. On désigne aussi par B, N, T... le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures, le sous-groupe unipotent de B et le tore des matrices diagonales.

Soient $\mathcal{K} = k((t))$ et $\mathcal{O}[[t]]$ où t est une indéterminée. Comme auparavant $G(\mathcal{K})$ et $\mathcal{O}$ désignent les k-ensembles définis sur la catégorie des k-algèbres commutatives et unitaires, qui à A associent $G(\mathcal{K})(A) = G(A\widehat{\otimes}\mathcal{K})$ et $G(\mathcal{O})(A) = G(A\widehat{\otimes}\mathcal{O})$ (où A est muni de sa topologie discrète). *La grassamannienne affine de G* est le quotient fpqc de $G(\mathcal{K})$ par $G(\mathcal{O})$, en particulier, $(G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O}))\,(A)$ est le quotient de $G(\mathcal{K})(A)$ par $G(\mathcal{O})(A)$ dans la catégorie des ensembles. On pose $\mathcal{G}r = \mathcal{G}r_G = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$.

Théorème 2.5. *Le fpqc quotient $\mathcal{G}r = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ est un ind-schéma de type ind-fini, formellement lisse et ind-propre. La surjection canonique $G(\mathcal{K}) \to \mathcal{G}r$ admet une section localement pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. Beaucoup résulte directement du paragraphe précédent, pour $B = k[T_{i,j}, 1 \leq i,j \leq r, 1/\det(T_{i,j})]$ (en particulier, cf le lemme 2.4). juste quelques mots pour préciser la ind-propreté de $\mathcal{G}r$. En fait $\mathcal{G}r$ est le k-ensemble défini sur la catégorie des k-algèbres (commutatives et unitaires), qui à A associe l'ensemble des c-réseaux d'un espce de Tate (cf lemme 2.1 et la partie (3) de 2.3). Soit

$$V = \mathcal{K}^r = \oplus_1^r \mathcal{K} e_i = \sum_{\gamma \in G(\mathcal{K})} k\gamma(e)$$

avec par exemple $e = e_1$. Sur V on considère la topologie dont une base de voisinages de 0 est donnée par les

$$\delta \in T(\mathcal{K})\ ,\ U_\delta = \sum_{\gamma \in G(\mathcal{O})sG(\mathcal{O})} k\gamma(e)\ ,$$

cette topologie fait de V un espace de Tate et le foncteur $G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ en classifie les c-réseaux. □

Dans la suite *on désignera par $\mathcal{G}r_\lambda$ l'image de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{V}_\lambda)$ *par la surjection canonique* $G(\mathcal{K}) \to \mathcal{G}r$ (cf le lemme 2.4 et sa démonstration). On a $\mathcal{G}r = \cup_\lambda \mathcal{G}r_\lambda$. On peut remarquer aussi que $\mathcal{G}r_\lambda \simeq \mathcal{V}_\lambda/J$, où J est l'idéal engendré par les $T_{b,n}$, $n \geq 0$ et $b \in B = k[G]$.

2.3.1. *Action de $G(\mathcal{O})$ sur $\mathcal{G}r$.* La décomposition de Cartan nous dit que $G(\mathcal{K}) = \coprod_\delta G(\mathcal{O})\delta G(\mathcal{O})$, où δ décrit *l'ensemble T^+ des éléments de $T(\mathcal{K})$ de la la forme* $\delta = \mathrm{diag}(t^{m_1}, \cdots, t^{m_1})$ *avec* $m_1 \geq \cdots \geq m_r$, c'est à dire que $T^+ = \{\lambda(t), \lambda \in P^+\}$, où P^+ est la chambre de Weyl positive (cf. les formules (3) et (6)). Ainsi $G(\mathcal{K})$ et $\mathcal{G}r$ sont munis d'une action à gauche de $G(\mathcal{O})$, cette action sur $G(\mathcal{K})$ est compatible avec l'écriture $G(\mathcal{K}) = \lim\limits_{\leftarrow} \mathrm{Spec}(\mathcal{V}_\lambda)$, donc avce la décomposition $\mathcal{G}r = \cup_\lambda \mathcal{G}r_\lambda$ puisque le morphisme canonique $G(\mathcal{K}) \to \mathcal{G}r$ est équivariant. Les orbites de

$\mathcal{G}r$ s'écrivent $O_\delta := G(\mathcal{O})\delta$ avec $\delta \in T^+$ et il est facile de vérifier que l'adhérence de Zariski $\overline{O_\delta}^{\mathrm{Zar}}$ de O_δ vérifie

$$\overline{O_\delta}^{\mathrm{Zar}} = \bigcup_{\delta' \geq \delta} O_{\delta'}$$

où, si $\delta = \mathrm{diag}(t^{m_1}, \cdots, t^{m_1})$ et $\delta' = \mathrm{diag}(t^{m'_1}, \cdots, t^{m'_1})$, la notation $\delta' \geq \delta$ signifie que $m'_i \geq m_i$ pour tout i.

Ainsi les orbites O_δ, $\delta \in T^+$, forment une stratification de $\mathcal{G}r$, compatible avec la décomposition $\mathcal{G}r = \bigcup_\lambda \mathcal{G}r_\lambda$.

Lemme 2.6. *Soit $\delta \in T^+$, $\delta = \lambda(t) = \mathrm{diag}(t^{m_1}, \cdots, t^{m_1})$ avec $m_1 \geq \cdots \geq m_r$ et donc $\lambda \in P^+$, alors O_δ est un k-schéma de dimension $2\rho(\lambda)$ (cf la formule (7)).*

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_{i,j}) \in G(\mathcal{O})$, la condition $\alpha\delta \in \delta G(\mathcal{O})$ s'écrit $\alpha_{i,j} \in t^{m_i - m_j} G(\mathcal{O})$ pour tous i, j, ou encore en posant $m_{i,j} = \max(0, m_i - m_j)$, $\alpha_{i,j} \in t^{m_{i,j}} G(\mathcal{O})$. On voit que si l'on désigne par $k[[t]][T_{i,j}\ ,\ 1 \leq i, j \leq r\ ,\ 1/\det(T_{i,j})_{i,j}]$ l'algèbre de $G(\mathcal{O})$, celle ,du k-schéma O_δ notée $k[O_\delta]$, est engendrée par les $t^{\ell_{i,j}} T_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq r$ et $0 \leq \ell_{i,j} < m_{i,j}$, soumis aux conditions $\det(t^{\ell_{i,j}} T_{i,j})_{i,j} \in k[O_\delta]^*$. On constate que $k[O_\delta]$ est un schéma sur k de dimension

$$\sum_{1 \leq i,j \leq r} m_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq r} (r + 1 - 2i) m_i$$

(cf la formule (7)). □

2.3.2. *Faisceaux sur $\mathcal{G}r$.* Soit F un corps ℓ-adique, avec ℓ différent de la caractéristique de k. Chaque fois que ce sera nécessaire, on supposera que $F = \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Étant donné un k-schéma Z, par exemple $Z = \mathcal{G}r$ ou bien Z est l'un des $\mathcal{G}r_\lambda$, muni d'une stratification $\underline{S}$, on note $D_c^b(Z, F)$ *la catégorie des complexes bornés et constructibles de F-faisceaux sur Z.* Rappelons que si $\mathcal{F}$ est un complexe de F-faisceaux sur Z, on dit qu'il est constructible (S-constructible) si

1: pour tout entier $m \neq 0$, $H^m(Z, \mathcal{F}) = 0$,

2: pour tout entier m et tout élément S de la stratification $\underline{S}$, le faisceau $H^m(\mathcal{F})|S$ est un système local.

On note $P(Z, F)$ *la catégorie des F-faisceaux pervers sur Z*, c'est à dire la sous-catégorie pleine de $D_c^b(Z, F)$ formée par les objets $\mathcal{F}$, qui pour tout $i : S \hookrightarrow Z$, où S est un élément de $\underline{S}$, vérifient

3: le faisceau $H^m(i^*\mathcal{F})$ est nul pour $m > -\dim S$,

4: le faisceau $H^m(i^!\mathcal{F})$ est nul pour $m < -\dim S$

(ainsi la perversité est l'auto-duale). Rappelons que $i_! : D^b_c(S,F) \to D^b_c(Z,F)$ et le prolongement par 0 et que $i^!$ est l'adjoint à droite de $i_!$. Si S est fermé dans Z, alors $i_! : D^b_c(Z,F) \to D^b_c(S,F)$ associe à tout faisceau, celui de ses sections à supports dans S.

On suppose que Z est muni de l'action d'un F-groupe algébrique H, c'est à dire que l'on a un F-morphisme

$$\alpha : H \times_F Z \longrightarrow Z \ .$$

Un faisceau pervers $\mathcal{F}$ est dit H-équivariant s'il existe un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D^b(H \times_k Z, F)$

$$\varphi : \alpha^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{F}$$

qui restreint à $\{1\} \times Z$ est l'identité (p_2 est la deuxième projection $H \times_F Z \to Z$). Un tel morphisme, s'il existe, est unique. On désigne par $P_H(Z,F)$ la sous-catégorie pleine de $P(Z,F)$ dont les objets sont les complexes de faisceaux équivariants. C'est une catégorie abélienne et F-linéaire ([11] lem. A.2 qui renvoie à [7]).

Avec la stratification donnée par les orbites O_δ, $\delta \in T^+$, ces considérations conduisent à la définition de la catégorie $P(\mathcal{G}r, F)$ des faisceaux pervers sur $\mathcal{G}r$, aux définitions des catégories $P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r_\lambda, F)$ des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$-équivariants sur les $\mathcal{G}r_\lambda$ et à poser par définition

$$P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F) = \lim_{\to} P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r_\lambda, F) \ .$$

Proposition 2.7. *Les catégories $P(\mathcal{G}r, F)$ et $P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F)$ sont équivalentes.*

Démonstration. Comme $\mathcal{G}r_\lambda$ est fermé et affine, s'il contient une strate 0_δ il contient son adhérence $\overline{O_\delta}$, qui est donc affine. Il suffit alors de remarquer que les systèmes locaux sur un espace affine sont des faisceaux constants. □

Cette catégorie $P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F)$ s'appelle *la catégorie de Satake.*

2.3.3. *Le produit tensoriel.* Soit le produit de convolution (appelé aussi de fusion)

$$P(\mathcal{G}r, F) \times P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F) \xrightarrow{*} D^b_c(\mathcal{G}r, F)$$

ainsi défini. Considérons

$$\mathcal{G}r \times \mathcal{G}r \xleftarrow{p} G(\mathcal{K}) \times \mathcal{G}r \xrightarrow{q} G(\mathcal{K}) \times_{G(\mathcal{O})} \mathcal{G}r \xrightarrow{m} \mathcal{G}r \tag{15}$$

où le troisième terme est $G(\mathcal{K}) \times \mathcal{G}r$ quotienté par l'action de $G(\mathcal{O})$ à droite sur le $G(\mathcal{K})$ et à gauche, par l'inverse, sur l'autre facteur, où p et q sont les applications canoniques (en fait des $G(\mathcal{O})$-torseurs). Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux faisceaux pervers sur $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}_2$ étant supposé $G(\mathcal{O})$-équivariant. Alors $\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2$ est un faisceau pervers sur $\mathcal{G}r \times \mathcal{G}r$, $p^*(\mathcal{A}_1 \boxtimes$

$\mathcal{A}_2$) est $G(\mathcal{O})$-équivariant, cette action de $G(\mathcal{O})$ étant suffisamment régulière il existe un faisceau $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur $G(\mathcal{K}) \times_{G(\mathcal{O})} \mathcal{G}r$ tel que $q^*\widetilde{\mathcal{A}} = p^*(\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2)$. On pose

$$\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2 = m_*\widetilde{\mathcal{A}} \ .$$

Ceci s'appelle *le produit de convolution des faisceaux $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.*

Théorème 2.8. *Supposons que le corps de base k soit séparablement clos, alors le produit de convolution défini un bifoncteur*

$$P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F) \times P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F) \longrightarrow P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F)$$

qui fait de $P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F)$ une catégorie tensorielle.

Rappelons que F désigne un corps de caractéristique résiduelle ℓ différente de la caractéristique de k. Soit $\widehat{G}_{/F}$ le dual de Langlands de G, c'est à dire le schéma en groupes sur F (à isomorphisme près) admettant le système de racines dual de celui de G, donc ici on a $\widehat{G}_{/F} = (\mathrm{GL}_r)_{/F}$. Soit $\mathrm{Rep}(\widehat{G}_{/F})$ la catégorie es représentations de $\widehat{G}_{/F}$ rationnelles sur F et de dimensions finies.

Théorème 2.9. *Les catégorie tensorielles $P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F)$ et $\mathrm{Rep}(\widehat{G}_{/F})$ sont équivalentes. Plus précisément, le foncteur*

$$\omega(\cdot) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R^i(\mathcal{G}r, \cdot) : P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F) \longrightarrow \mathrm{Vect}(F)$$

(où $\mathrm{Vect}(F)$ est la catégorie des F-espaces vectoriels de dimensions finies) respecte les produits tensoriels et induit via le formalisme tannakien cette équivalence de catégories, c'est à dire que le groupe des automorphisme de ω est isomorphe au groupe $\widehat{G}_{/F}$.

Quelques mots sur la démonstration : Á VENIR.

Soit Δ le disque formel, c'est à dire le spectre formel de $\mathcal{O} = k[[t]]$, le groupe $\mathrm{Aut}(\Delta)$ agit naturellement sur $\mathcal{G}r$.

Corollaire 2.10. *Les objets de $P_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, F)$ sont invariants sous l'action du groupe $\mathrm{Aut}(\Delta)$.*

3. La correspondance géométrique

On s'inspire ici beaucoup de [8], [5] et [11].

La lettre k désigne un corps de caractéristique p, soit $\mathbb{F}_q$, soit l'une de ses clôtures algébriques $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$. Soit F un corps ℓ-adique avec $\ell \neq p$, mais pas nécessairement de caractéristique 0.. Soit X une courbe sur k, projective, lisse et géométriquement connexe. Dans le paragraphe précédent nous étudiions la correspondance au dessus d'un point fixé de cette courbe, nous allons maintenant faire varier ce point.

On écrit toujours $G = \mathrm{GL}_r$. Pour toute k-algèbre R (commutative et unitaire) on pose comme d'habitude $X_R = X \times_k R$.

3.1. **La grassmannienne de Beilinson-Drinfeld.**

Soit $\mathcal{D}$ le foncteur défini sur la catégorie $k - \mathrm{Alg}$ des k-algèbres R (commutative et unitaire) et à valeurs dans la catégorie des ensembles, qui à R associe l'ensemble des diviseurs de Cartier effectifs sur X_R. C'est un faisceau fppf, représentable par $\coprod_{n\geq 1} X^n/S_n$, les quotients étant fppf, S_n désignant le groupe symétrique agissant sur X^n par permutation des coordonnées.

Définition 3.1. *On appelle grassmannienne de Beilinson-Drinfeld le foncteur $\mathcal{G}r_X$ défini sur la catégorie $k - \mathrm{Alg}$ et à valeurs dans la catégorie des ensembles, qui à R associe l'ensemble des classes d'isomorphisme des triplets $(D, \mathcal{F}, \beta)$ tels que*

$$\begin{cases} D & \text{est un objet de } \mathcal{D}(R) \\ \mathcal{F} & \text{est un } G\text{-fibré principal sur } X_R \\ \beta & \text{est une trivialisation de } \mathcal{F} \text{ sur } X_R - D \end{cases}$$

On a le morphisme de foncteurs $\mathcal{G}r_X \to \mathcal{D}$, $(D, \mathcal{F}, \beta) \mapsto D$.

Au lieu de parler de G-fibrés principaux on pouvait dire fibrés vectoriels de rang r, puisque $G = \mathrm{GL}_r$, mais ainsi énoncée cette définition s'applique aux groupes réductifs, ainsi d'ailleurs que le lemme suivant

Lemme 3.2. *La grassmannienne $\mathcal{G}r_X$ de Beilinson-Drinfeld est représentable par un ind-schéma ind-propre sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Soit $(D, \mathcal{F}, \beta)$ un objet de $\mathcal{G}r_X(R)$, alors $\mathcal{F}$ est en fait un fibré vectoriels de rang r trivial sur $X_R - D$, il existe donc un entier $m > 0$ tel que

$$\mathcal{O}_{X_R}(-mD) \subset F \subset \mathcal{O}_{X_R}(mD) \ ,$$

on voit donc que

$$\mathcal{G}r_X \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathcal{G}r_m$$

où $\mathcal{G}r_m(R)$ classifie les sous-faisceaux cohérents et R-plats de

$$\mathcal{O}_{X_R}(mD)/\mathcal{O}_{X_R}(-mD) \ ,$$

pour D décrivant les objets de $\mathcal{D}(R)$. Il s'agit d'un isomorphisme de faisceaux fpqc. Les foncteurs $\mathcal{G}r_m$ sont représentables par des schémas propres sur $\mathcal{D}$ (Hilbert) et pour $m_1 < m_2$ le morphisme naturel $\mathcal{G}r_{m_1} \to \mathcal{G}r_{m_2}$ est une immersion fermée. □

Soient D un objet de $\mathcal{D}(R)$, c'est à dire un diviseur de Cartier effectif sur X_R et $\widehat{D}$ le complété formel de X_R le long de D, D est un sous-schéma fermé de $\widehat{D}$, on désigne par $\widehat{D}^0$ le complémentaire de D dans $\widehat{D}$. Le faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{D}}$ de $\widehat{D}$ est en fait une R-algèbre. On définit les deux foncteurs de la catégorie $k-\mathrm{Alg}$ dans celle des ensembles

$$\mathcal{L}G : R \longmapsto \{(g, D) \ / \ g \in G(\mathcal{O}_{\widehat{D}}(\widehat{D}^0)) \ , \ D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(R))\} \ ,$$

$$\mathcal{L}^+G : R \longmapsto \{(g, D) \ / \ g \in G(\mathcal{O}_{\widehat{D}}(\widehat{D})) \ , \ D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(R))\} \ ,$$

appelés respectivement *groupe (global) des lacets et groupe (global) des lacets positifs.*

Lemme 3.3. *(1) Le groupe des lacets $\mathcal{L}G$ est isomorphe au foncteur qui à une algèbre R associe les classes d'isomorphisme des quadruplets $(D, \mathcal{F}, \beta, \sigma)$ où*

$$\begin{cases} D & \text{est un objet de } \mathcal{D}(R) \\ \mathcal{F} & \text{est un } G\text{-fibré principal sur } X_R \\ \beta & \text{est une trivialisation de } \mathcal{F} \text{ sur } X_R - D \\ \sigma & \text{est une trivialisation de } \mathcal{F} \text{ sur } \widehat{D} \end{cases}$$

$\mathcal{L}G$ est représentable par par un ind-schéma en groupes sur $\mathcal{D}$.

(2) Le groupe des lacets positifs $\mathcal{L}^+G$ est un sous-foncteur de $\mathcal{L}G$, il est représentable par un schéma en groupes affine sur $\mathcal{D}$ à fibres géométriquement connexes.

(3) Le morphisme naturel $\mathcal{L}G \to \mathcal{G}r_X$, $(D, \mathcal{F}, \beta, \sigma) \mapsto (D, \mathcal{F}, \beta)$ est un $\mathcal{L}^+G$-torseur, il induit un isomorphisme de faisceaux fpqc sur $\mathcal{D}$

$$\mathcal{L}G/\mathcal{L}^+G \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}r_X \ .$$

Démonstration. Comme nous nous limitons au cas $G = \mathrm{GL}_r$, il est facile de donner *une idée* de la démonstration. Les représentations de $\mathcal{L}G$ et $\mathcal{L}^+G$ par respectivement un ind-schéma et un schéma affine se montrent comme dans le lemme 2.4, sauf que le support du diviseur D n'est pas réduit à un point, cf aussi la remarque suivante.

La description de $\mathcal{L}G$ est ainsi : à l'objet (g, D) de $\mathcal{L}G(R)$ on associe le quadruplet $(D, \mathcal{F}, \mathrm{Id}, g)$, où $\mathcal{F}|(X_R - D) = \mathcal{O}^r_{X_R - D}$ et $\mathcal{F}|\widehat{D} = g^{-1}\mathcal{O}^r_{\widehat{D}}$ Les objets de $\mathcal{L}^+G(R)$ donnent les quadruplets avec $g \in G(\mathcal{O}_{\widehat{D}}(\widehat{D}))$.

Si $(D, \mathcal{F}, \beta, \sigma_1)$ et $(D, \mathcal{F}, \beta, \sigma_2)$ sont deux objets de $\mathcal{L}G(R)$, alors $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{O}^r_{\widehat{D}}$, donc un élément de $G(\mathcal{O}_{\widehat{D}})$. Ceci explique l'assertion (3). □

Remarque 3.4. *Soit $x \in X(k)$ un point k-rationnel de la courbe X, il peut être considéré comme un diviseur de Cartier, comme un objet*

D_x de $\mathcal{D}(k)$. On a, si t désigne un paramètre local de la courbe en x, $\widehat{D}_x = \mathrm{Spec} k[[t]]$, $\widehat{D}^0_x = \mathrm{Spec} k((t))$. On retrouve la grassmannienne affine du paragraphe précédent en considérant la fibre $(\mathcal{G}r_X)_{D_x}$ de $\mathcal{G}r_X$.

On voit avec le dernier lemme que $\mathcal{L}^+G$ agit à gauche sur $\mathcal{G}r_X$, action qui est entre $\mathcal{D}$-champs et que l'on note pour toute k-algèbre R

$$\mathcal{L}^+G(R) \times_{\mathcal{D}} \mathcal{G}r_X \to \mathcal{G}r_X \ , \ ((g,D),(D,\mathcal{F},\beta)) \mapsto (D, g\mathcal{F}, g\beta)$$

et l'on a un lemme analogue à celui obtenu avec la grassmannienne affine

Lemme 3.5. *Les orbites de $\mathcal{G}r_X$ sous l'action de $\mathcal{L}^+G$ sont de type fini et lisses sur $\mathcal{D}$.*

3.2. **Le produit de convolution.**

Définition 3.6. *Soit $b \geq 1$ un entier. La b-grassmannienne (de Beilinson-Drinfeld) $\mathcal{G}r_{X,b}$ est l'ensemble qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des classes d'isomorphie des uplets $((D_i,\mathcal{F}_i,\beta_i)_{1\leq i\leq b})$ tels que pour $1 \leq i \leq b$*

$$\begin{cases} D_i & \text{est un diviseur de Cartier sur } X_R \\ \mathcal{F}_i & \text{est un } G \text{ fibré principal sur } X_R \\ \beta_i : & \mathcal{F}_i|_{X_R - D_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{i-1}|_{X_R - D_i} \end{cases}$$

où (dans la troisième ligne) $\mathcal{F}_0$ est le fibré trivial.

L'application naturelle

$$\mathcal{G}r_{X,b} \to \mathcal{D}^{\times b} \ , \ ((D_i,\mathcal{F}_i,\beta_i)_{1\leq i\leq b}) \mapsto (D_i)_{1\leq i\leq b}$$

est un morphisme (de foncteurs).

Lemme 3.7. *La b-grassmannienne $\mathcal{G}r_{X,b}$ est représentable par un ind-schéma ind-propre sur $\mathcal{D}^{\times b}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur b. Pour $b = 1$ on a $\mathcal{G}r_{X,1} = \mathcal{G}r_X$. Considérons pour $k > 1$ le morphisme naturel

$$\mathcal{G}r_{X,b} \to \mathcal{G}r_{X,b-1} \times \mathcal{D}$$

qui au dessus de la k-algèbre R est défini par

$$((D_i,\mathcal{F}_i,\beta_i)_{1\leq i\leq b}) \mapsto ((D_i,\mathcal{F}_i,\beta_i)_{1\leq i\leq b-1}, D_b)$$

La fibre au dessus de $((D_i,\mathcal{F}_i,\beta_i)_{1\leq i\leq b-1}, D_b)$ est

$$\mathcal{F}_{b-1} \times^G (\mathcal{G}r_X(R) \times_{X_R} D_b) \ ,$$

en effet, les éléments de la fibre sont les $(D_b,\mathcal{F},\beta)$, avec $\beta : \mathcal{F}|_{X_R-D_b} \simeq \mathcal{F}_{b-1}|_{X_R-D_b}$, donc les $(\mathcal{F}_{b-1},(D_b,\mathcal{F},\beta))$, avec $\beta : \mathcal{F}|_{X_R-D_b} \simeq \mathcal{F}_0|_{X_R-D_b}$, $\mathcal{F}_{b-1}$ et $\mathcal{F}$ devenant isomorphes sur $X_R - D_b$ après l'action diagonale de G. On voit que cette fibre est un ind-schéma ind-propre. $\square$

Considérons le morphisme

$$m_b : \mathcal{G}r_{X,b} \longrightarrow \mathcal{G}r_X \tag{16}$$

ainsi défini : au dessus de la k-algèbre R

$$((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b}) \longmapsto (D, \mathcal{F}_b, \beta_1|_{X_R - D} \circ \cdots \circ \beta_b|_{X_R-D})$$

où $D = D_1 \cup \cdots \cup D_b$. Il suit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}r_{X,b} & \xrightarrow{m_b} & \mathcal{G}r_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^{\times b} & \xrightarrow{\text{réunion}} & \mathcal{D} \end{array}$$

Le groupe de lacets $\mathcal{L}^+G$ agit sur $\mathcal{G}r_{X,b}$ de la manière suivante : soient $((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b})$ un objet de $\mathcal{G}r_{X,b}(R)$ avec $d = \cup_i D_i$, on a

$$((g, D), ((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b})) \mapsto \Big((D_i, g\mathcal{F}_i, g\beta_i g^{-1})_{1\le i\le b}\Big)$$

Lemme 3.8. *Le morphisme $m_b : \mathcal{G}r_{X,b} \longrightarrow \mathcal{G}r_X$ est $\mathcal{L}^+G$-équivariant.*

3.2.1. *Le diagramme de convolution.* Soit $(\mathcal{L}G)_b$ le foncteur (ou l'espace) qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des classes d'isomorphie des uplets $((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b}, (\sigma_i)_{2\le i\le b})$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ll} D_i & \text{est un objet de } \mathcal{D}(R)\ ,\ 1 \le i \le b \\ \mathcal{F}_i & \text{est un } G \text{ fibré principal sur } X_R\ ,\ 1 \le i \le b \\ \beta_i : & \mathcal{F}_i|_{X_R - D_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0|_{X_R-D_i}\ ,\ 1 \le i \le b \\ \sigma_i : & \mathcal{F}_0|_{\widehat{D}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i|_{\widehat{D}_i}\ ,\ 2 \le i \le b \end{array}\right.$$

où $\mathcal{F}_0$ est toujours le G-fibré trivial. Soit

$$\begin{array}{rcl} p_b\ :\ (\mathcal{L}G)_b & \longrightarrow & \mathcal{G}r_X^{\times b} \\ ((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b}, (\sigma_i)_{2\le i\le b}) & \longmapsto & ((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b}) \end{array}$$

qui pour l'action sur les σ est un $\Big(\mathcal{D}^{\times b} \times_{\mathcal{D}^{\times b-1}} (\mathcal{L}^+G)^{\times b-1}\Big)$-torseur. Soit

$$\begin{array}{rcl} q_b\ :\ (\mathcal{L}G)_b & \longrightarrow & \mathcal{G}r_{X,b} \\ ((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b}, (\sigma_i)_{2\le i\le b}) & \longmapsto & ((D_i, \mathcal{F}'_i, \beta'_i)_{1\le i\le b}) \end{array}$$

où $\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}_1$ et pour $i \ge 2$ le G-fibré $\mathcal{F}'_i$ est défini en recollant $\mathcal{F}_i|_{X_R-D_i}$ et $\mathcal{F}'_{i-1}|_{\widehat{D}_i^0}$ par $\sigma|_{\widehat{D}_i^0} \circ \beta|_{\widehat{D}_i^0}$. Le morphisme q_b est aussi un $\Big(\mathcal{D}^{\times b} \times_{\mathcal{D}^{\times b-1}} (\mathcal{L}^+G)^{\times b-1}\Big)$-torseur, par

$$(((D_i, \mathcal{F}_i, \beta_i)_{1\le i\le b}, (\sigma_i)_{2\le i\le b})\,, ((D_i)_{1\le i\le b}, (\sigma_i)_{2\le i\le b})) \longmapsto$$

$$\Big((D_1, \mathcal{F}_1, \beta_1), (D_i, g_i^{-1}\mathcal{F}_i, g_i^{-1}\beta_i)_{2\le i\le b}, (\sigma_i g_i)_{2\le i\le b}\Big)\ .$$

Définition 3.9. *Le diagramme suivant*

$$\mathcal{G}r_X^{\times b} \xleftarrow{p_b} (\mathcal{L}G)_b \xrightarrow{q_b} \mathcal{G}r_{X,b} \xrightarrow{m_b} \mathcal{G}r_X$$

de ind-schémas sur $\mathcal{D}$ (parfois via le morphisme de réunion $\mathcal{D}^{\times b} \to \mathcal{D}$) est appelé le diagramme de convolution de niveau b.

En se restreignant à un diviseur réduit à un unique point de $X(k)$ et pour $b = 2$ on retrouve le diagramme (15).

3.3. **Filtration par les degrés des diviseurs.** Nous commençons par définir une filtration par les degrés du foncteur $\mathcal{D}$ des diviseurs de Cartier effectifs. Rappelons que si R est une k-algèbre (commutative er unitaire) alors

$$\mathcal{D}(R) = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Sch}}\left(\mathrm{Spec}(R), \coprod_{n\geq 1} X^{(n)}\right) ,$$

avec $X^{(n)} = X^n/S_n$. *Les éléments de* $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(R), X^{(n)}) = X^{(n)}(R)$ *sont appelés les diviseurs de Cartier effectifs de degré n sur X_R.*

Soit $n \geq 1$ un entier. On introduit le degré des diviseurs de Cartier dans la définition 3.1. Soit $\mathcal{G}r_X^{(n)}$ le foncteur défini sur la catégorie $k-$Alg et à valeurs dans la catégorie des ensembles, qui à R associe l'ensemble des classes d'isomorphisme des triplets $(D, \mathcal{F}, \beta)$ tels que

$$\begin{cases} D & \text{est un objet de } X^{(n)}(R) \\ \mathcal{F} & \text{est un } G\text{-fibré principal sur } X_R \\ \beta & \text{est une trivialisation de } \mathcal{F} \text{ sur } X_R - D \end{cases}$$

Clairement $\mathcal{G}r_X = \coprod_{n\geq 1} \mathcal{G}r_X^{(n)}$.

On peut continuer en introduisant les degrés des diviseurs de Cartier dans toutes les définitions du § 3.1, ainsi pour tout entier $n \geq 1$ définir de même $(\mathcal{L}G)^{(n)}$ et $(\mathcal{L}^+G)^{(n)}$. Les résultats de ce paragraphe aussi s'étendent, le sous-faisceau fpqc $(\mathcal{L}G)^{(n)}/(\mathcal{L}^+G)^{(n)}$ de $(\mathcal{L}G)/(\mathcal{L}^+G) \simeq \mathcal{G}r_X$ s'identifie à $\mathcal{G}r_X^{(n)}$ et ce dernier est muni d'une action à droite de $(\mathcal{L}^+G)^{(n)}$, action dans la catégorie des $X^{(n)}$-champs.

Soit $\underline{n} = (n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s)$ une partition de l'entier $n \geq 1$ et désignons par $\Sigma_n$le morphisme naturel (de faisceaux, de champs)

$$\Sigma_n : X^{(n_1)} \times \cdots \times X^{(n_s)} \longrightarrow X^{(n)} ,$$

soit $X_0^{(\underline{n})}$ l'ouvert de $X^{(n_1)} \times \cdots \times X^{(n_s)}$ dont les objets (sur toute k-algèbre R) sont à supports deux à deux disjoints. On a l'isomorphisme

$$(17)\quad X_0^{(\underline{n})} \times_{X^{(n)}} \mathcal{G}r_X^{(n)} \simeq X_0^{(\underline{n})} \times_{(X^{(n_1)}\times\cdots\times X^{(n_s)})} \left(\mathcal{G}r_X^{(n_1)} \times \cdots \times \mathcal{G}r_X^{(n_s)}\right)$$

et il faut remarquer que les actions des $(\mathcal{L}^+G)^{(n)}$ et $(\mathcal{L}^+G)^{(n_i)}$, $i = 1, \cdots, s$, sont compatibles avec cet isomorphisme.

Par analogie avec ce qui a été fait pour la grassmannienne affine

Définition 3.10. *On note $P_{(\mathcal{L}^+G)^{(n)}}(\mathcal{G}r_X^{(n)})$ la catégorie des faisceaux pervers sur $\mathcal{G}r_X^{(n)}$ qui sont $(\mathcal{L}^+G)^{(n)}$-équivariants.*

Le lemme suivant est une conséquence de l'existence du diagramme de convolution, cf définition 3.9, appliqué pour $b = 2$ et filtré par les degrés des diviseurs.

Lemme 3.11. *Soit n, n_1 et n_2 trois entiers positifs non nuls, $n = n_1 + n_2$. Alors il existe un foncteur de convolution*

$$P_{(\mathcal{L}^+G)^{(n_1)}}(\mathcal{G}r_X^{(n_1)}) \times P_{(\mathcal{L}^+G)^{(n_2)}}(\mathcal{G}r_X^{(n_2)}) \longrightarrow P_{(\mathcal{L}^+G)^{(n)}}(\mathcal{G}r_X^{(n)}) \ .$$

3.4. **Le champ de Hecke.** On considère les diviseurs de degré 1, on a $X^{(1)} = X$ et un morphisme

$$s : \mathcal{G}r_X^{(1)} \longrightarrow X$$

dont la fibre au dessus d'un point x de $X(R)$ vérifie $(\mathcal{G}r_X^{(1)}(R))_x \simeq \mathcal{G}r(R)$ où comme précédemment $\mathcal{G}r(R)$ désigne la grassmannienne affine au dessus de l'algèbre R.

Il suit du théorème 2.9 et de son corollaire qu'à tout objet V de $\mathrm{Rep}(\widehat{G}_{/F})$ se trouve associé (de manière non canonique) un faisceau pervers P_V objet de $P_{(\mathcal{L}^+G)^{(1)}}(\mathcal{G}r_X^{(1)})$.

Soit Bun_X le champ sur X des G-fibrés principaux. Le champs de Hecke $\mathcal{H}_X$ est une version relative sur Bun_X de la grassmannienne $\mathcal{G}r_X^{(1)}$ de Beilinson-Drinfeld.

Définition 3.12. *Le champs de Hecke $\mathcal{H}_X$ est le foncteur défini sur la catégorie des k-algèbres et à valeurs dans la catégorie des ensembles, qui à R associe l'ensemble des quadruplets $(x, \mathcal{F}, \mathcal{F}', \beta)$, où $x \in X(R)$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des objets de Bun_X et $\beta : \mathcal{F}|_{X_R - \{x\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'|_{X_R - \{x\}}$.*

On désigne par $\overleftarrow{h}$, resp $\overrightarrow{h}$, le morphisme de champs $\mathcal{H}_X \to \mathrm{Bun}_X$ qui à $(x, \mathcal{F}, \mathcal{F}', \beta)$, où $x \in X(R)$, associe $\mathcal{F}'$, resp. $\mathcal{F}$.

On a le diagramme de champs

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Bun}_X & \xleftarrow{\overleftarrow{h}} & \mathcal{H}_X & \xrightarrow{\overrightarrow{h} \times s} & \mathrm{Bun}_X \times X \\ \mathcal{F}' & & (x, \mathcal{F}, \mathcal{F}', \beta) & & (\mathcal{F}, x) \end{array}$$

On peut aussi voir $\mathcal{H}_X$ comme une fibration sur Bun_X de fibre $\mathcal{G}r_X^{(1)}$, en effet, au dessus d'une k-algèbre R le morphisme $\overleftarrow{h}(R)$, $(x,\mathcal{F},\mathcal{F}',\beta)\mapsto \mathcal{F}'$ a pour fibre

$$\left\{(x,\mathcal{F}'\otimes_{X_R}\mathcal{G},\mathcal{F}',\mathrm{Id}\otimes\beta)\ ,\ \text{où } \beta \text{ est une trivialisation de } \mathcal{G}|_{X_R-\{x\}}\right\}$$

et ceci est en bijection avec $\left\{(x,\mathcal{G},\beta)\right\}$.

Ces considérations permettent de définir les morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_X\times \mathrm{Gr}_X^{(1)} & \xrightarrow{q} & \mathcal{H}_X \\ (\mathcal{F},(x,\mathcal{G},\beta)) & \longmapsto & (x,\mathcal{F}\otimes\mathcal{G},\mathrm{Id}\otimes\beta) \end{array}$$

Définition 3.13. *Pour tout $\mathcal{S}$ objet de $D(\mathrm{Bun}_X)$ et tout objet P de $D(\mathcal{G}r_X^{(1)}$, leur produit extérieur tordu est*

$$P\widetilde{\boxtimes}\mathcal{S} := q_*\left(P\boxtimes\mathcal{S}\right)\ ,$$

c'est un élément de $D(\mathcal{H}_X)$.

Le foncteur de Hecke est

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}(\widehat{G}_{/F})\times\mathrm{Bun}_X & \xrightarrow{H} & D(\mathrm{Bun}_X\times X) \\ (V,\mathcal{S}) & \longmapsto & H(V,\mathcal{S}) = (\overrightarrow{h}\times s)_!(P_V\widetilde{\boxtimes}\mathcal{S}) \end{array}$$

et rappelons que P_V est l'objet de $D(\mathcal{G}r_X^{(1)})$ associé à la représentation V. On peut itérer cette définition : si V_1, ..., V_n sont des objets de $\mathrm{Rep}(\widehat{G}_{/F})$ *on définit*

$$H(V_1\boxtimes\cdots\boxtimes V_n,\mathcal{S})\in D(\mathrm{Bun}_X\times X^n)\ .$$

Les complexes de faisceaux $H(V_1\boxtimes\cdots\boxtimes V_n,\mathcal{S})\in D(\mathrm{Bun}_X\times X^n)$ possèdent une propriété forte relativement à la projection $\mathrm{Bun}_X\times X^n\to X^n$, appelée ULA (Universal Local Acyclicity). Nous renvoyons à [4] et aussi à [11].

La proposition suivante n'est pas difficile à prouver (pour l'assertion (2) en particulier il faut remarquer que $P_V = V\otimes_F F_X[1]$, puisque $G=\mathrm{GL}_r$).

Proposition 3.14. *Soient V_1 et V_2 deux objets de* $\mathrm{Rep}(\widehat{G}_{/F})$ *(au dessus d'une certaine k-algèbre).*

(1) Soit τ la permutation des coordonnées de $X\times X$, alors on a un isomorphisme, fonctoriel en V_1 et V_2 et de carré l'identité

$$\tau^*\left(H(V_1\boxtimes V_2,\mathcal{S})\right)\simeq H(V_2\boxtimes V_1,\mathcal{S})\ .$$

(2) Soit Δ_X la diagonale de $X\times X$. La restriction de $H(V_1\boxtimes V_2,\mathcal{S})$ à $\mathrm{Bun}_X\times\Delta_X$ s'identifie avec $H(V_1\otimes V_2,\mathcal{S})[1]$.

Il suit de cette proposition la possibilité de définir la notion de faisceaux propres pour les foncteurs de Hecke. Voir [5], après sa prop. 2.8.

Références

[1] Beilinson A., Drinfeld V., Quantization of Hitchin integrable system and Hecke eigensheaves, prépublication.

[2] Borel Armand, Linear Algebraic Groups, second ed., Springer Verlag 1991.

[3] Fulton William, Harris Joe, Representation Theory, Springer Verlag 2004.

[4] Gaitsgory Denis, On a vanishing conjecture appearing in the geometric Langlands correspondence, math. AG/0204081.

[5] Gaitsgory Denis, On de Jong's Conjecture, Israel J. Math. 157, p. 155-191, 2007.

[6] Gross Benedict, On the Satake Isomorphism,

[7] Laszlo Y., Olsson M., Perverse t-structure on Artin stacks, Math. Z. 261-4, p. 737-748, 2009.

[8] Mirković I., Vilonen K., Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, Annals of Math. 166 , p. 95-143, 2007.

[9] Ngô Bao Châu, Preuve d'une conjecture de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen, arXiv :math/9801109v1.

[10] Ngô Bao Châu, Polo Patrick, Résolutions de Demazure affines et formule de Casselmann-Shalika géométrique, J. Algebraic Geometry 10, p. 515-547, 2001.

[11] Richarz T., A new approach to the geometric Satake equivalence,

[12] Satake

[13] Serre jean-Pierre, Représentations des groupes finis, Hermann, 1967

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: marc.reversat@math.univ-toulouse.fr