LA THÉORIE DU CORPS DE CLASSES REVISITÉE (EN CAR. > 0)

MARC REVERSAT

Résumé. Le but de cette note est de donner une idée des travaux récents de Vincent Lafforgue ([10]) par l'exemple du rang 1 (des représentations). On s'inspire du séminaire de Benoît Stroh ([11]).

Table des matières

1. Notations, définitions

Soient
— k un corps fini à q éléments,

Date: 31 décembre 2018.

— X une courbe définie sur k, projective, lisse et géométriquement irréductible,
— K_X le corps des fonctions rationnelles sur X, $\mathbb{A}_X$ l'anneau des adèles de K_X, $\mathbb{A}_X^\times$ le groupe des idèles de K_X et si $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau de valuation du complété K_v de K_X en la place $v \in |X]$, $\mathbb{O}_X = \prod_{v\in|X]} \mathcal{O}_v$, $\mathbb{O}_X^\times = \prod_{v\in|X]} \mathcal{O}_v^\times$,
— $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe abélien des classes d'isomorphisme des fibrés inversibles sur X (on utilsera aussi cette notation pour d'autres k-schémas), c'est un groupe fini, $\mathrm{Pic}(X)$ s'identifie avec $K_X^\times \backslash \mathbb{A}_X^\times / \mathbb{O}_X^\times$,
— Ξ un réseau de $\mathrm{Pic}(X)$, discret (dans le sens de l'identification précédente), $\mathrm{Pic}(X)^\Xi = \mathrm{Pic}(X)/\Xi = K_X^\times \backslash \mathbb{A}_X^\times / \Xi \mathbb{O}_X^\times$.

La théorie du corps de classes fournit un revêtement fini étale galoisien de X de groupe d'automorphismes le groupe fini $\mathrm{Pic}(X)^\Xi$ (le Ξ-corps de classes de Hilbert) unique à K_X-isomorphisme près. L'inverse de cette association est aussi vrai.

Définition 1.1. *Soit* Pic_X *le foncteur, défini sur la catégorie des k-schémas et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, qui à S associe* $\mathrm{Pic}(X_S)/{\mathrm{pr}_2}^*(\mathrm{Pic}(S))$, *où* $X_S = X \times S \overset{\mathrm{pr}_2}{\to} S$ *(lorsque l'on écrit des produits fibrés sur le corps k on ne le précise pas).*

Le foncteur Pic_X est représentable par un schéma en groupes abéliens localement de type fini sur k, c'est la réunion disjointe indexée sur $\mathbb{Z}$ de copies d'une variété abélienne Pic_X^0, définie sur k, la composante d'indice $n \in \mathbb{Z}$ correspondant aux faisceaux inversibles de degrés n, sur $\mathrm{Pic}_X(S)$ lorsque S est le spectre d'un corps extension de k.

Définition 1.2. *Soit*

$$\alpha : X \times X \longrightarrow \mathrm{Pic}_X^0$$

le morphisme (de foncteurs) donné sur les S-points par

$$((x, y) : S \to X \times X) \longmapsto \mathcal{O}_{X\times S}(x - y) \ .$$

Dans cette définition, $x - y$ est un diviseur de Cartier. Expliquons ceci. Pour ce faire détaillons par exemple le diviseur de Cartier associé à $x : S \to X$: le noyau du morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{X\times_{\mathrm{Id},X,x}S} \longleftarrow \mathcal{O}_{X\times S}$$

est localement en engendré par un seul élément.

Soit $x_0 \in X(k)$, la restriction de α à $X \times \{x_0\}$ est l'usuel morphisme d'Abel-Jacobi.

Définition 1.3. *(L'isogénie de Lang) Soit G un schéma en groupes commutatifs défini sur k. L'isogénie de Lang de G est*

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & \mathrm{Frob}_G(g)g^{-1} \end{array}$$

(Frob_G *est le morphisme de Frobenius de G, il élève à la puissance q les fonctions sur G et laisse fixe les points). Cette isogénie est étale (car la différentielle du morphisme de Frobenius est nulle), par suite elle est surjective lorsque G est connexe. Son noyau est $G(k)$.*

Lemme 1.4. *Soit $\lambda : \mathrm{Pic}_X \to \mathrm{Pic}_X$ l'isogénie de Lang. Alors, pour tout schéma S sur k, λ envoie $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X \times S)$ sur ${}^\tau\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ modulo l'image inverse de* $\mathrm{Pic}(S)$*, où ${}^\tau\mathcal{L} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{L}$.*

Démonstration. Soient Y et S deux schémas sur k, l'image de $s \in Y(S)$, $s : S \to Y$, par Frob_Y est $\mathrm{Frob}_Y \circ s = s \circ \mathrm{Frob}_S$. Pour $Y = \mathrm{Pic}_X$ et si $\mathcal{L}$ représente dans $\mathrm{Pic}(X \times S)$ un élément s de $\mathrm{Pic}_X(S)$, on a $s \circ \mathrm{Frob}_S(\mathcal{L}) = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{L}$. □

Comme le morphisme de Frobenius laisse les points fixes, on a $\deg \circ \mathrm{Frob}_{\mathrm{Pic}_X} = \deg$, il suit que *l'image de l'isogénie de Lang est dans Pic^0_X, donc égale à Pic^0_X.*

Définition 1.5. *On désigne par Z le schéma défini par le produit cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Z & \to & \mathrm{Pic}_X \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ X \times X & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Pic}^0(X) \end{array}$$

C'est un schéma sur $X \times X$ localement de type fini.

Lemme 1.6. *(description de Z) pour tout schéma S sur k on a*

$$Z(S) = \Big\{(x, y, \mathcal{L}) \ / \ x, y \in X(S), \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_X(S) \text{ et il existe un isomorphisme } {}^\tau\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_{X\times S}(x - y) \text{ modulo l'image inverse de } \mathrm{Pic}(S)\Big\} .$$

Un objet $(x, y, \mathcal{L})$ de $Z(S)$ s'appelle *un chtouca à deux pattes sur S pour le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ et la représentation $\mathbb{G}_m^2 \to \mathbb{G}_m$, $(a, b) \mapsto ab^{-1}$, les deux pattes sont les points x et y de $X(S)$.*

Suivant la définition des chtoucas donnée par Drinfeld ([2], [3]) et reprise par L. Lafforgue ([7], [8], [9]), ce chtouca $(x, y, \mathcal{L})$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(-x) & \to & \mathcal{L} \\ & \nearrow & \\ \mathcal{L}(-y) & & \end{array}$$

les flèches étant des inclusions, avec la propriété que $\mathcal{L}(-y)$ soit $\mathcal{O}_{X\times S}$-isomorphe à ${}^\tau(\mathcal{L}(-x))$.

Définition 1.7. *Soit* $Y = Z/\Xi$ *(sur* Z *il y a une action libre de* $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Ker}(\lambda)$*, donc en particulier* Z *n'est pas de type fini sur* k*). Le* k*-schéma* Y *est de type fini.*

Soit

$$\pi : Y \longrightarrow X \times X$$

le morphisme venant de la définition de Z*, alors* π *est un revêtement fini et étale, de groupe d'automorphismes* $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\Xi$*. La restriction de* π *à la diagonale* $X \hookrightarrow X \times X$ *est le revêtement trivial*

$$X \times \mathrm{Pic}^{\Xi}(X) \longrightarrow X \ .$$

2. Automorphe vers Galois

2.1. **Le lemme de Drinfeld.** Soit S/k un schéma de type fini muni d'un point géométrique $\overline{s} \to S$ et d'un faisceau ℓ-adique lisse $\mathcal{F}$. Il vient alors une action du groupe fondamental étale $\pi_1(S, \overline{s})$ sur la fibre $\mathcal{F}_{\overline{s}}$. Un mot pour décrire cette dernière : soit U un revêtement étale localement en le point $\overline{s}$ de S, on peut écrire la fibre de $\overline{s}$ dans ce revêtement de manière ensembliste par $\{s_i \ / \ i \in I\}$ où pour un point s de cette fibre chaque s_i s'écrit $\sigma(s)$, σ décrit $\pi_1(S, \overline{s})$ et cette écriture n'étant pas unique ; alors la fibre $\mathcal{F}_{\overline{s}}$ s'écrit $\oplus_{i \in I} \mathbb{Q}_\ell^\sharp s_i$ avec l'action donnée par celle sur les s_i.

Soient S' et $\mathcal{F}'$ comme au dessus et de plus $i : S \hookrightarrow S'$ une immersion fermée telle qu'il existe un isomorphisme $i^*\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}$. Alors l'action de $\pi_1(S, \overline{s})$ sur $\mathcal{F}_{\overline{s}}$ est munie d'un prolongement à $\pi_1(S', \overline{s})$ via le morphisme $i_* : \pi_1(S, \overline{s}) \to \pi_1(S', \overline{s})$ (cf remarque 3.4).

On applique ceci à $S = X \overset{\Delta}{\hookrightarrow} S' = X \times X$, où Δ est le morphisme diagonal, à $\mathcal{F}' = \pi_*(\mathbb{Q}_\ell)$, $\mathcal{F} = \Delta^*(\mathcal{F}')$ et à $\overline{s} = \Delta(\overline{\eta})$ où $\overline{\eta}$ est un point géométrique générique de X. Comme π est donné sur X un revêtement trivial de groupe $\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)$, on a $\mathcal{F}_{\Delta(\overline{\eta})} = \mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$, qui de plus est muni de l'action triviale de $\pi_1(X, \overline{\eta}) = \pi_1(\Delta(X), \Delta(\overline{\eta}))$.

Les commentaires précédents donnent donc une action de $\pi_1(X \times X, \Delta(\overline{\eta}))$ sur $\mathbb{Q}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$ telle que sa composée avec

$$\Delta_* : \pi_1(X, \overline{\eta}) \longrightarrow \pi_1(X \times X, \Delta(\overline{\eta}))$$

soit triviale. Maintenant on cherche à étendre cette action de $\pi_1(X \times X, \Delta(\overline{\eta}))$ en une action de $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$.

D'abord on précise la différence entre $\pi_1(X \times X, \Delta(\overline{\eta}))$ et $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$.

Soient X_1 et X_2 deux schémas sur un corps séparablement clos K, de type fini, propres et connexes, munis de points rationnels $x_i \in X_i(K)$. Les deux projections $\mathrm{pr}_i : X_1 \times_K X_2 \to X_i$ induisent un morphisme canonique

$$\pi_1(X_1 \times_K X_2, (x_1, x_2)) \longrightarrow \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2) \ ,$$

qui daprès l'identité de Künneth (pour le groupe fondamental) est une isomorphisme.

Lorsque K n'est pas séparablement clos, les autres hypothèses demeurant, la situation se révèle assez différente. Soit $\overline{K}$ une clôture séparable de K, on écrit pour $x_1 \in X_1(\overline{K})$

$$\pi_1^{\text{géo}}(X_1, x_1) = \pi_1(X_1 \times_K \overline{K}, x_1)$$

et de même pour X_2 et $X_1 \times_K X_2$. On a les suites exactes

$$0 \to \pi_1^{\text{géo}}(X_1, x_1) \to \pi_1(X_1, x_1) \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to 0$$

$$0 \to \pi_1^{\text{géo}}(X_2, x_2) \to \pi_1(X_2, x_2) \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to 0$$

$$0 \to \pi_1^{\text{géo}}(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \to \pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to 0$$

Ce sont des suites exactes de fibrations car par exemple la fibre géométrique de $X_1 \to \mathrm{Spec}(K)$ en $\mathrm{Spec}(\overline{K})$ est $X_1 \times_K \mathrm{Spec}(\overline{K})$. Il suit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_1^{\text{géo}}(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \pi_1^{\text{géo}}(X_1, x_1) \times \pi_1^{\text{géo}}(X_2, x_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) & \longrightarrow & \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) & \overset{\text{diag}}{\longrightarrow} & \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{\times 2} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

les lignes verticales étant exactes. Donc, lorsque K n'est pas séparablement clos, la flèche du milieu n'est jamais un isomorphisme, la différence étant mesurée parle morphisme diagonal $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{\times 2}$.

Lorsque K est fini, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est engendré par le Frobenius. *Il manque donc un Frobenius pour que le milieu du diagramme soit un isomorphisme.* Donc si $\mathcal{F}$ est un système local sur $X_1 \times X_2$, il manque un Frobenius pour qu'il puisse s'écrire $\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$. Ceci est la motivation du lemme de Drinfeld donné un peu plus bas, après quelques définitions et précisions.

Sur $X \times X$ soient $\mathrm{Frob}_1 = \mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Frob}_2 = \mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$, ce sont les morphismes de Frobenius partiels.

En général, si $\mathcal{G}$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-système local sur un k-schéma Y (que l'on peut supposer de type fini, propre), il existe un isomorphisme canonique $\mathrm{Frob}_\mathcal{G} : \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_Y^* \mathcal{G}$.

Pour tout $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-système local $\mathcal{F}$ sur $X \times X$, on a des isomorphismes $\mathrm{Frob}_{i,\mathcal{F}} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frob}_i^* \mathcal{F}$ et l'on a les relations $\mathrm{Frob}_{1,\mathcal{F}} \circ \mathrm{Frob}_{2,\mathcal{F}} = \mathrm{Frob}_{2,\mathcal{F}} \circ \mathrm{Frob}_{1,\mathcal{F}} = \mathrm{Frob}_\mathcal{F}$.

Soit $v \in |X|$, rappelons que la dimension $[k(v) : k]$ s'appelle le degré de v ; un plongement $k(v) \hookrightarrow \overline{k}$ étant choisi, on note $\overline{v} \to v$ le point géométrique correspondant.. Soit $\overline{K_v}$une clôture séparable du complété en v du corps K_X des fonctions rationnelles sur X, et $\overline{\eta} \to \overline{v}$ une flèche de spécialisation, venant du choix d'un plongement $\overline{K_X} \hookrightarrow \overline{K_v}$. Il suit des morphismes

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k(v)) = \pi_1(v, \overline{v}) \to \pi_1(X, \overline{v}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \overline{\eta})$$

et l'on note $\mathrm{Frob}_v \in \pi_1(X, \overline{\eta})$ l'image du Frobenius arithmétique de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k(v)) = \pi_1(v, \overline{v})$.

Pour tout système local $\mathcal{F}$ sur $X \times X$ on a un isomorphisme $\mathcal{F}_{\Delta(\overline{v})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\Delta(\overline{\eta})}$. Si $\mathcal{F}$ est muni de Frobenius partiels ceci permet de transporter $\mathrm{Frob}_{i,\mathcal{F}}|\Delta(\overline{v})$ en un endomorphisme $\mathrm{Frob}_{i,\mathcal{F},v}$ de $\mathcal{F}|\Delta(\overline{\eta})$.

Lemme 2.1. *(Drinfeld) Le foncteur qui à tout système local $\mathcal{F}$ sur $X \times X$ associe la fibre $\mathcal{F}|\Delta(\overline{\eta})$ induit une équivalence de catégorie entre*

(1) la catégorie des $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ systèms locaux constructibles sur $X \times X$ munis de Frobenius partiels,

(2) la catégorie des représentations continues de $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$ sur des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type finis.

Cette équivalence est caractérisée pa le fait qu'elle envoie u système local de la forme $\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$ muni de ses Frobenius partiels canoniques sur la représentation $(\mathcal{F}_1 \mid \overline{\eta}) \boxtimes (\mathcal{F}_2 \mid \overline{\eta})$ de $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$.

Via cette équivalence, pour tout $v \in |X|$ de degré d, l'action de $(\mathrm{Frob}_v, 1) \in \pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$ sur $\mathcal{F}|\Delta(\overline{\eta})$ est donnée par l'action de $\mathrm{Frob}_{1,\mathcal{F},v}^d$, celle de $(1, \mathrm{Frob}_v)$ par $\mathrm{Frob}_{2,\mathcal{F},v}^d$.

2.2. **Application du lemme de Drinfeld.**

Lemme 2.2. *On a un isomorphisme canonique entre Y et le produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} \sharp & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times X & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_1} & X \times X \end{array}$$

Cet isomorphisme respecte la projection vers $X \times X$*, donc induit un endomorphisme* $\mathrm{Frob}_{1,Y}$ *de* Y *au dessus de* Frob_1.

Démonstration. On construit $\mathrm{Frob}_{1,Y} : Z \to$ produit fibré avec Z. Sur le k-schéma S c'est l'application

$$(x, y, \mathcal{L}) \longmapsto (x, y, \mathcal{L}(x)) \ ,$$

comme l'on a ${}^{\tau}\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_{X\times S}(x-y)$ il vient

$$^{\tau}\left(\mathcal{L}(x)\right) \otimes \left(\mathcal{L}(x)\right)^{-1} \simeq \mathcal{O}_{X\times S}\left(\mathrm{Frob}_X(x) - y\right) \ .$$

$\square$

Le lemme de Drinfeld donne alors une action canonique de $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$ sur $\pi_* \overline{\mathbb{Z}}_\ell | \Delta(\overline{\eta})$, donc sur $\pi_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \left[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)\right]$, qui est triviale restreinte à $\pi_1(X, \overline{\eta})$ plongé diagonalement dans $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$.

2.3. **Les opérateurs d'excursion. Automorphe vers Galois.** L'espace des formes automorphes pour $\mathbb{G}_m$, paraboliques (à supports compacts, mais cette précision est inutile pour $\mathbb{G}_m$) est

$$\mathcal{C}\left(K_X^* \backslash \mathbb{A}_X^* / (\Xi \cdot \mathbb{O}_X^*) \ , \ \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*\right)$$

Définition 2.3. *Soit* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$. *On désigne par* S_γ *l'endomorphisme de* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]$ *obtenus par la composition des isomorphismes suivants et de l'action canonique de* $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$ *(cf le lemme de drinfeld)*

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)] \xrightarrow{\sim} \pi_* | \Delta(\overline{\eta}) \xrightarrow{\gamma} \pi_* | \Delta(\overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)] \ .$$

Soit $\mathcal{B}$ *la sous* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-algèbre de* $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\left(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)]\right)$ *engendrée par les* S_γ*, munie de la topologie* ℓ*-dique.*

Lemme 2.4. *On a les propriétés*

(1) Pour tous γ *et* γ' *dans* $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2}$*, on a* $S_{\gamma\gamma'} = S_\gamma \circ S_{\gamma'}$.
(2) Le morphisme $\pi_1(X, \overline{\eta})^{\times 2} \to \mathcal{B}$ *est continu.*
(3) L'algèbre $\mathcal{B}$ *est commutative.*

Curieusement la démonstration de ce lemme demande d'étendre (à quatre pattes) le notion de chtouca (à deux pattes) comme rappelée auparavant.

Lemme 2.5. *Soit* $\overline{\chi} : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *un morphisme de* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-algèbres. On définit la fonction* $\chi : \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^{\Xi}(X)] \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *par*

$$\chi(\gamma) = \overline{\chi}(S_{(\gamma,1)}) \ ,$$

alors χ *est un morphisme de groupes, continu et à valeurs dans* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

Finalement, à tout $f \in \mathcal{C}\left(K_X^*\backslash\mathbb{A}_X^*/(\Xi\cdot\mathbb{O}_X^*)\ ,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*\right)$, vecteur propre pour l'action de $\mathcal{B}$, définissant ainsi un caractère $\overline{\chi}:\mathcal{B}\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on associe le morphisme $\chi:\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathrm{Pic}^\Xi(X)]\to\mathbb{Q}_\ell^*$ du lemme précédent.

Ceci est le sens automorphe vers Galois de la théorie du corps de classes, c'est à dire de la correspondance de Langlands pour le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$*.*

2.4. **Les opérateurs de Hecke.** Il reste à préciser l'algèbre $\mathcal{B}$. Soit $v\in|X|$, le morphisme $T_v : Z\to Z$ est défini au essus de $X\times X$ par la formule $T_v(x,y,\mathcal{L})=(x,y,\mathcal{L}(v))$ (il faut remarquer que l'on a canoniquement ${}^\tau(\mathcal{O}_{X\times S}(v))\simeq{}^\tau(\mathcal{O}_{X\times S})(v)$. Il suit un morphisme $T_v:Y\to Y$ au dessus de π, puis un morphisme sur $X\times X$ de faisceaux étales $T_v:\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell\to\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, enfin en passant aux fibres un morphisme $T_v:\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\overline{\eta})}\to\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\overline{\eta})}$ commutant à l'action de $\pi_1(X,\overline{\eta})^2$ venant du lemme de Drinfeld. Finalement on a un morphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire

$$T_v:\overline{\mathbb{Q}}_\ell\left[\mathrm{Pic}^\Xi(X)\right]\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell\left[\mathrm{Pic}^\Xi(X)\right]\ .$$

Cet endomorphisme est en fait induit par $\mathcal{L}\mapsto\mathcal{L}(v)$ de $\mathrm{Pic}^\Xi(X)$ dans lui même, donc

Lemme 2.6. *Le* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-endomorphisme* T_v *de* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\left[\mathrm{Pic}^\Xi(X)\right]$ *commute avec les éléments de* $\mathcal{B}$*.*

Rappelons que l'on note $\mathrm{Frob}_v\in\pi_1(X,\overline{\eta})$ l'image du Frobenius arithmétique de $\pi_1(v,\overline{v})=\mathrm{Gal}(\overline{k},k(v))$ (cf des commentaires avant le lemme de Drinfeld).

Lemme 2.7. *Pour tout* $v\in|X|$

$$T_v=S_{(\mathrm{Frob}_v,1)}\in\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\left(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\left[\mathrm{Pic}^\Xi(X)\right]\right)\ .$$

Démonstration. (On reprend la preuve donnée dans [11]) On suppose pour simplifier que le de gré de v est 1. l'endomorphisme $S_{(\mathrm{Frob}_v,1)}$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\left[\mathrm{Pic}^\Xi(X)\right]=\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\Delta(\overline{\eta})}$ est défini par $\mathrm{Frob}_v\in\pi_1(X,\overline{\eta})$ et ce dernier vient de $\mathrm{Frob}_{1,\overline{\mathbb{Q}}_\ell,v}$, qui lui provient de $\mathrm{Frob}_{1,Y}Y\mapsto Y$. Ce morphisme, pour tout k-schéma S envoie $(x,y,\mathcal{L})\in Y(S)$ sur $(\mathrm{Frob}_X(x),y,\mathcal{L}(x))\in Y(S)$ et sa fibre en $\Delta(v)$ envoie donc $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}(v)$, qui est bien T_v. □

On conclut de ce lemme que $\mathcal{B}$ est égal à l'algèbre $\mathcal{T}$ des opérateurs de Hecke.

2.5. **À plusieurs pattes.** La définition des chtoucas donnée par Drinfeld pour GL_2 et reprise pour GL_r par L. Lafforgue est la suivante.

Les notations sont habituelles, voir le début de cette note.

Définition 2.8. *(*[4], [8] *et* [9]*) Soient S un schéma et $r>0$ un entier, un chtouca à droite (resp. à gauche) sur S de rang r est la donnée*

(1) d'un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur $X\times S$ de rang r,

(2) d'un diagramme

$$\underline{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}'' \quad (\text{ resp. } \mathcal{E} \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'') \tag{1}$$

où $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont deux faisceaux localement libres sur $X\times S$ de rang r, où j et t sont deux morphismes injectifs dont les conoyaux sont respectivement supportés par les graphes de deux morphismes ∞, $0 : S\to X$ appelés pôle et zéro, ces conoyaux en tant que $\mathcal{O}_S$-modules étant localement libres de rang 1 (on dit aussi que le diagramme (1) est une modification à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{E}$),

(3) d'un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{E} := (\mathrm{Id}_X\times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E} \overset{\sim}{\to} \mathcal{E}''$.

Soit $N=\mathrm{Spec}\mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ un niveau, c'est à dire un sous-schéma fermé et fini de X. Une structure de niveau N sur le chtouca $\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''$ de rang r sur le schéma S, dont le pôle et le zéro évitent N, consiste en la donnée d'un isomorphisme

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N = \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}}\mathcal{O}_{N\times S} \overset{u}{\overset{\sim}{\to}} \mathcal{O}^r_{N\times S}$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N & \overset{\sim}{\leftarrow} & \mathcal{E}''\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N \\
\wr\uparrow & & \uparrow\wr \\
\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N & & {}^\tau\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N \\
u\searrow & & \swarrow {}^\tau u \\
 & \mathcal{O}^r_{N\times S} &
\end{array}$$

Les schémas de modules ou les champs de ces chtoucas permirent d'établir la correspondance de Langlands d'abord pour GL_2 puis pour GL_r (op. cit.).

Cette notion de chtoucas fut étendue à tous les groupes réductifs par Varshavsky ([12]) et reprise par V. Lafforgue ([10]) dans sa démonstration du sens “automorphe vers Galois” de la correspondance de Langlands en caractéristique positive. pour un groupe réductif quelconque.

Soit G un groupe réductif connexe sur K_X, que l'on se contente de supposer déployé. On note $\widehat{G}$ son dual de Langlands, c'est à dire le groupe défini par le système de racines dual de celui de G et supposé déployé sur $\mathbb{Q}_\ell$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ de $\mathbb{Q}_\ell$ et on appelle E une extension intermédiaire finie contenant une racine carré de $q = \sharp(k)$.

Pour tout schéma S sur k et tout G-torseur $\mathcal{G}$ sur $X \times S$ on pose ${}^\tau\mathcal{G} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{G})$. Si x est un S-point de X on note Γ_x son graphe.

Définition 2.9. *Soient I un ensemble fini et $(I_1 \cdots I_m)$ une partition ordonnée de I. La grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld est l'ind-schéma $\mathrm{Gr}_I^{(I_1\cdots I_m)}$ sur X^I dont les S points (pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$) classifient les*

$$\Big((x_i)_{i\in I}\ ,\ \mathcal{G}_0 \stackrel{\phi_1}{\to} \mathcal{G}_1 \stackrel{\phi_2}{\to} \cdots \stackrel{\phi_{m-1}}{\to} \mathcal{G}_{m-1} \stackrel{\phi_m}{\to} \mathcal{G}_m \stackrel{\sim}{\to} G_{X\times S}\Big)$$

où $\mathcal{G}_i$ est un G torseurs sur $X \times S$, ϕ_i un isomorphisme sur $X - \cup_{j\in I_i}\Gamma_{x_j}$ et où la dernière application à droite est une trivialisation de $\mathcal{G}_m$.

Soit W une représentation irréductible de $\widehat{G}^I$. On définit la strate fermée $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1\cdots I_m)}$ comme étant le sous-schéma fermé réduit de $\mathrm{Gr}_I^{(I_1\cdots I_m)}$ ainsi défini : soit U un ouvert (non vide) de X^I sur lequel les x_i sont distincts, alors sur U, $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1\cdots I_m)}$ est le produit des grassmanniennes usuelles, puis on définit $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1\cdots I_m)}$ comme l'adhérence de Zariski de ce dernier dans $\mathrm{Gr}_I^{(I_1\cdots I_m)}$.

Selon [1], $\mathrm{Gr}_I^{(I_1\cdots I_m)}$ peut être défini de la manière suivante : c'est l'ind-schém dont les S-points classifient les

$$\Big((x_i)_{i\in I}\ ,\ \mathcal{G}_0 \stackrel{\phi_1}{\to} \mathcal{G}_1 \stackrel{\phi_2}{\to} \cdots \stackrel{\phi_{m-1}}{\to} \mathcal{G}_{m-1} \stackrel{\phi_m}{\to} \mathcal{G}_m \stackrel{\sim}{\to} G_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}\Big) \tag{2}$$

où les $\mathcal{G}_i$ sont des G-torseurs sur le voisinage formel $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ de la réunion des graphes des x_i, ϕ_i étant un isomorphisme sur $\Gamma_{\sum \infty x_i} - \cup_{j\in I_i}\Gamma_{x_j}$.

Définition 2.10. *Soient I un ensemble fini, $(I_1 \cdots I_m)$ une partition ordonnée de I et W une représentation irréductible de $\widehat{G}^I$, on pose $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ où W_i est une représentation irréductible de $\widehat{G}$. Soit $N \hookrightarrow X$ un niveau (un sous-schéma fermé fini).*

On note $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1\cdots I_m)}$ le champ de Deligne-Mumford réduit dont les points sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$ classifient les

$$\Big((x_i)_{i\in I}\ ,\ (\mathcal{G}_0,\psi_0) \stackrel{\phi_1}{(} \to \mathcal{G}_1,\psi_1) \stackrel{\phi_2}{\to} \cdots \stackrel{\phi_{m-1}}{\to} (\mathcal{G}_{m-1},\psi_{m-1}) \stackrel{\phi_m}{\to} ({}^\tau\mathcal{G}_0, {}^\tau\psi_0)\Big)$$

où

(1) $(x_i)_{i\in I} : S \to (X-N)^I$,

(2) pour tout $j = 1, \cdots, m$, $\psi_j : \mathcal{G}_i|N \times S \xrightarrow{\sim} G|N \times S$ *est une trivialisation (avec* $(\mathcal{G}_m, \psi_m)$ *en posant* $({}^\tau\mathcal{G}_0, {}^\tau\psi_0)$*),*

(3) pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\phi_j : \mathcal{G}_{j-1}|_{(X\times S)-(\uplus_{i\in I_j}\Gamma_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j|_{(X\times S)-(\uplus_{i\in I_j}\Gamma_i)}$$

est un isomorphisme tel que la position relative de $\mathcal{G}_{j-1}$ *par rapport à* $\mathcal{G}_j$ *en* x_i*, pour* $i \in I_j$*, soit bornée par le copoids dominant de* G *correspondant au poids dominant de* W_i*,*

(4) les ϕ_j *respectent les structures de niveau.*

Les objets classifiés pas ce champ s'appelle des chtoucas sur X de niveau N, on dit que les x_i sont les pattes du chtouca . Cette nouvelle définition a été introduite pour faciliter la complétion des champs de chtoucas ([12]).

Expliquons la troisième hypothèse. Reprenons la version de [1] de la grassmannienne affine et notons $G_{\sum \infty x_i}$ la restriction de Weil de G de $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ à S, elle agit sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1 \cdots I_m)}$ et $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1 \cdots I_m)}$ par changement de l'isomorphisme de droite de 2. On a un morphisme naturel

$$\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1 \cdots I_m)} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1 \cdots I_m)}/G_{\sum \infty x_i}$$

La troisième assertion des la dernière définition peut être énoncée ainsi : $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1 \cdots I_m)}$ est l'image inverse de $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1 \cdots I_m)}/G_{\sum \infty x_i}$ par le morphisme naturel

$$\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1 \cdots I_m)} \longrightarrow \mathrm{Gr}_I^{(I_1 \cdots I_m)}/G_{\sum \infty x_i}$$

Remarque 2.11. *Pour* $G = \mathrm{GL}_r$*,* $I = \{1, 2\}$ *et* $W = St \boxtimes St^*$ *où* St *est la représentation de Steinberg,* $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{\{1\},\{2\}}$ *et* $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{\{2\},\{1\}}$ *sont les champs de chtoucas, à droite et à à gauche, introduits par Drinfeld (sous le nom de* F*-faisceaux) et repris par L. Lafforgue, les pattes* x_1 *et* x_2 *en sont le pôle et le zéro.*

3. Appendice : Le groupe fondamental de Grothendieck

Soit S un schéma connexe. On note (Ét$/S$) la catégorie des revêtements finis étales de S, ses flèches étant aussi des revêtements étales. Rappelons que par définition un morphisme étale $\varphi : X \to S$ est plat, surjectif et tel que la fibre en chaque point $s \in S$ soit une $\kappa(s)$-algèbre étale finie. Soient Ω un corps algébriquement clos et $\overline{s}$: Spec $\Omega \hookrightarrow S$ un point géométrique de S.

Soit $F_{\overline{s}}$ le foncteur qui à tout objet $X \to S$ de $(\text{Ét}/S)$ associe (l'ensemble égal à) la fibre $X \times_S \text{Spec}\Omega$.

Chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous écrirons F au lieu de $F_{\overline{s}}$.

Soit $\pi_1(S, \overline{s})$ le groupe des automorphismes du foncteur F. C'est *le groupe fondamental de Grothendieck, ou étale, du schéma S.*

Théorème 3.1. *(Grothendieck) Soient S un schéma connexe et $\overline{s}$: $\text{Spec}\Omega \hookrightarrow S$ l'un de ses points géométriques.*

(1) Le groupe $\pi_1(S, \overline{s})$ est profini, son action sur tout objet de $(\text{Ét}/S)$ est continue.
(2) Le foncteur F induit une équivalence de catégorie entre $(\text{Ét}/S)$ et la catégorie des ensembles finis sur lesquels $\pi_1(S, \overline{s})$ agit continuement.

Le foncteur F est proreprésentable. Il existe un système projectif $(P_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$ dans $(\text{Ét}/S)$ et un isomorphisme fonctoriel en X

$$\varinjlim \text{Hom}(P_\alpha, X) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

Suivant Grothendieck, on peut choisir pour le système $(P_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$ tous les revêtemements galoisiens de S, c'est à dire tous les objets $P \to S$ de $(\text{Ét}/S)$ tels que le groupe des S-automorphismes de P (dans $(\text{Ét}/S)$) agisse transitivement sur les fibres géométriques de $P \to S$. Il faut remarquer que la preuve de ceci suppose des choix : pour tout revêtement galoisien P de S on choisit un $p \in F(P)$ et on impose que $\varphi_{P,P'}(p) = p'$.

Exemple 3.2. *(1) On suppose que $S = \text{Spec}k$ où k est un corps, $\overline{s} : \text{Spec}\overline{k} \to \text{Spec}k$, alors $\pi_1(S, \overline{s}) = \text{Gal}(\overline{k}/k)$.*
(2) On suppose que S est un schéma de type fini sur le corps $\mathbb{C}$ et que $\overline{s} : \text{Spec}\mathbb{C} \to S$, alors, canoniquement

$$\widehat{\pi_1^{top}(S, \overline{s})} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S, \overline{s})$$

où à gauche se trouve la complétion profinie du groupe fondamental topologique.

Remarque 3.3. *Le foncteur F peut être caractérisé par une suite de propriétés, dont il ressort qu'il est unique à isomorphisme près. Ainsi le groupe fondamental $\pi_1(S, \overline{s})$ ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix du point géométrique $\overline{s}$.*

La liste des propriétés caractérisant F est la suivante, où X, Y et Z sont des objets de $(\text{Ét}/S)$.

(1) $F(X) = \emptyset$ *si et seulement si* $X = \emptyset$.

(2) $F(S)$ *est un ensemble à un élément.*

(3) $F(X \times_Z Y) = F(X) \times_{F(Z)} F(Y)$.

(4) $F(X \coprod Y) = F(X) \coprod F(Y)$.

(5) Si $\varphi : X \to Y$ *est un épimorphisme effectif (et une flèche de* $(\mathrm{\acute{E}t}/S)$*), alors* $F(u) : F(X) \to F(Y)$ *est surjectif.*

(6) Soit $\mathfrak{g}$ *un groupe fini de* S*-automorphisme de* X *(dans* $(\mathrm{\acute{E}t}/S)$*), alors* $\mathfrak{g}$ *agit sur* $F(X)$ *par*

$$\mathrm{Spec}\Omega \to X \stackrel{\sigma\in\mathfrak{g}}{\longrightarrow} X\ ,$$

l'application naturelle $\eta : X \to X/\mathfrak{g}$ *définit une surjection* $F(\eta) : F(X) \to F(X/\mathfrak{g})$ *qui induit une bijection*

$$\overline{\eta} : F(X)/\mathfrak{g} \stackrel{\sim}{\to} F(X/\mathfrak{g})\ .$$

(7) Soit $u : X \to Y$ *une flèche de* $(\mathrm{\acute{E}t}/S)$ *telle que* $F(u) : F(X) \to F(Y)$ *soit une bijection, alors* u *est un isomorphisme.*

Une catégorie munie d'un tel foncteur est dite galoisienne.

Remarque 3.4. *Soient* S, $\overline{s} : \mathrm{Spec}\ \Omega \to S$ *et* S', $\overline{s'} : \mathrm{Spec}\ \Omega \to S'$ *deux schémas connexes munis de points géométriques, soit* $\Phi : S' \to S$ *un morphisme de schémas tel que* $\overline{s} \circ \Phi = \overline{s'}$*. On a pour tout objet* X *de* $(\mathrm{\acute{E}t}/S)$ $F_{\overline{s}}(X) = F_{\overline{s'}}(X \times_S S')$*, il suit un homomorphisme de groupes*

$$\Phi_* : \pi_1(S', \overline{s'}) \longrightarrow \pi_1(S, \overline{s})\ .$$

Proposition 3.5. *Soit* S *un schéma sur le corps* k*, quasi-compact et géométriquement intègre. Soient* $\overline{k}$ *une clôture algébrique de* k *et* k_s *la fermeture séparable de* k *dans* $\overline{k}$*. Soient*

$$\overline{S} = S \times_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}k_s \quad et \quad \overline{s} : \mathrm{Spec}\overline{k} \to \overline{S}$$

un point géométrique de $\overline{S}$*. Alors les applications* $\overline{S} \to S$ *et* $S \to \mathrm{Spec}k$ *induisent la suite exacte*

$$1 \to \pi_1(\overline{S}, \overline{s}) \to \pi_1(S, \overline{s}) \to \mathrm{Gal}(k_s/k) \to 1$$

Le groupe $\pi_1(S, \overline{s})$ agit sur son sous groupe normal $\pi_1(\overline{S}, \overline{s})$ par automorphisme intérieurs, d'où un homomorphisme

$$\Phi_S : \pi_1(S, \overline{s}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_1(\overline{S}, \overline{s}))\ .$$

Considérant le sous-groupe $\mathrm{Int}((\pi_1(\overline{S}, \overline{s}))$ de $\mathrm{Aut}((\pi_1(\overline{S}, \overline{s}))$ des automorphismes intérieurs il vient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & Aut((\pi_1(\overline{S}, \overline{s}) & \to & \pi_1(S, \overline{s}) & \to & \mathrm{Gal}(k_s/k) & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mathrm{Int}((\pi_1(\overline{S}, \overline{s})) & \to & \mathrm{Aut}((\pi_1(\overline{S}, \overline{s})) & \to & \mathrm{Out}((\pi_1(\overline{S}, \overline{s})) & \to & 1
\end{array}$$

dont il suit une représentation importante

$$\rho_S : \mathrm{Gal}(k_s/k) \longrightarrow \mathrm{Out}((\pi_1(\overline{S}, \overline{s}))$$

appelée *la représentation galoisienne extérieure.*

Exemple 3.6. *Soit S/k une courbe de genre g, lisse et propre sur le corps k, soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k.Le pro-ℓ-quotient maximal de $\pi_1(S \times_k \overline{k}, \overline{s})$ est isomorphe au module de Tate ℓ-adique $T_\ell(\overline{J})$ de la jacobienne de $S \times_k \overline{k}$ (on ne dit rien de la preuve de cette affirmation, qui n'est pas évidente). De la suite exacte précédente il vient une extension du groupe* $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ *par $T_\ell(\overline{J})$, d'où une représentation galoisienne*

$$\mathrm{Gal}(k_s/k) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T_\ell(\overline{J})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell) \ .$$

C'est la représentation usuelle fabriquée avec les points de ℓ-torsion de la jacobienne. Les représentations galoisiennes extérieures en sont donc des généralisations non abéliennes.

4. Salmigondis.

4.1. **La catégorie $D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.** Soit X un schéma de type fini sur le corps fini ou algébriquement clos k. Soient ℓ un nombre premier inversible dans k, E une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, $\mathcal{O}_E$ son anneau de valuation et ϖ l'une de ses uniformisantes. Notons $D_{c,p}(X, \mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E)$ la catégorie dérivée de celle des complexes parfaits constructibles de faisceaux sur X.

Précisons les mots "complexe parfait et constructible". Une partie constructible d'un espace topologique U est de la forme $U_1 \cap (U - U_2)$, où U_1 et U_2 sont des ouverts quasi-compacts de U. Soit X un schéma, un faisceau de A-modules F sur X est dit constructible si pour tout ouvert affine U de X il existe une famille finie surjective d'immersions $\{U_i \to U\}$ dont les images sont des parties constructibles de U, et telle que pour tout i $F|U_i$ soit localement constant de type fini. Un complexe de faisceaux du type précédent est constructible si ses faisceaux de cohomologie sont constructibles.

La catégorie $D_c(X, \mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E)$ est la catégorie dérivée de celle des complexes de faisceaux constructibles sur X et à valeurs dans celle des $\mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E$-modules. Les complexes parfaits de cette catégorie sont ceux qui sont quasi-isomorphes à des $\mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E$-complexes plats et bornés (c'est à dire que les composantes de ces complexes sont des $\mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E$-modules plats et qu'elles sont presque toutes nulles). Ils forment la sous-catégorie $D^b_{c,p}(X,\mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E)$.

Notons que l'on a les morphismes

$$\begin{array}{ccc} D^b_{c,p}(X,\mathcal{O}_E/\varpi^{r+1}\mathcal{O}_E) & \longrightarrow & D^b_{c,p}(X,\mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E) \\ K^\cdot & \longmapsto & K^\cdot \otimes_{\mathcal{O}_E/\varpi^{r+1}\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E \end{array}$$

qui permettent de définir

$$D^b_{c,p}(X,\mathcal{O}_E) = \varprojlim D^b_{c,p}(X,\mathcal{O}_E/\varpi^r\mathcal{O}_E)\ ,$$

puis par localisation $D^b_c(X,E)$ et enfin

$$D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \varprojlim D^b_c(X,E)\ ,$$

cette dernière limite étant suivant les sous-extensions de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ finies sur $\mathbb{Q}_\ell$.

On voit donc que la catégorie $D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est plus compliquée qu'une simple catégorie dérivée.

Cette construction vaut pour différentes cohomologies sur sur des catégories de faisceaux, ou de complexes de faisceaux, sur X.

4.2. **Dualité.** Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas sur le corps k, X étant de type fini, et ℓ un nombre premier inversible dans k.

Rappelons que le foncteur "sections à supports propres

$$Rf_! : D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D^b_c(S,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

possède un adjoint à droite

$$f^! : D^b_c(S,\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})\ ,$$

ainsi on a l' isomorphisme fonctoriel en $L \in D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ et $M \in D^b_c(S,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$

$$\mathrm{Hom}_{D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})}(L,f^!(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b_c(S,\overline{\mathbb{Q}_\ell})}(Rf_!(L,)M)\ .$$

Le complexe $K_X := f^!((\overline{\mathbb{Q}_\ell})_S)$ est le complexe dualisant dans la catégorie $D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Si L est un objet de $D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$, son dual de Verdier est par définition

$$D_X(L) := R\mathcal{H}om(L,K_X)\ .$$

4.3. **Les faisceaux pervers.** Soit X un schéma sur un corps k qui est algébriquement clos ou fini. On note $\mathcal{H}^{\cdot}(\ )$ les faisceaux de cohomologie des éléments de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Soient
${}^pD^{\leq 0}(X)$ la sous-catégorie de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ dont les objets sont les P tels que $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{H}^{-i}(P) \leq i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,
${}^pD^{\geq 0}(X)$ la sous-catégorie de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ dont les objets sont les P tels que $\dim \operatorname{supp}(\mathcal{H}^{-i}(D(P)) \leq i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (où $D(P)$ est le dual de Verdier pour le morphisme $X \to \operatorname{Spec}(k)$).
Ceci est un cas particulier de la définition d'une t-structure, son coeur est

$$\operatorname{Perv}(X) = {}^pD^{\leq 0}(X) \cap {}^pD^{\geq 0}(X)\ ,$$

dont les éléments s'appellent les faisceaux pervers sur X.

Expliquons cette t-structure. Pour cela nous suivons [6] ch. III. Supposons X de type fini sur k et pour simplifier posons $D(X) = D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Soit K un objet de $D(X)$ alors il existe un ouvert U de X, dense et essentiellement lisse tel que $K|U$ ait ses faisceaux de cohomologie lisses (on dit que le complexe est lisse). L'ouvert U est dit essentiellement lisse sur k si $U \times_k (\overline{k})_{\mathrm{red}}$ est lisse, et puisque dans notre cas le corps k est fini ou algébriquement clos cette condition équivaut à U_{red} lisse. Ainsi

$$D(X) = \bigcup D(U)\ , \text{où } U \text{ décrit les ouverts denses essentiellement lisses de } X\ .$$

mais il faut expliquer cette réunion, cela est fait un peu plus bas.

On est donc ramené au cas ou $X_{/k}$ est de type fini et essentiellement lisse, que l'on suppose de plus équidimensionel de dimension d. Alors le complexe dualisant de X est de la forme $\overline{\mathbb{Q}_\ell}[2d](d)$, et si K est un objet de $D(X)$

$$\mathcal{H}^{\nu}(DK) \simeq \mathcal{H}^{-\nu-2d}(K)\check{}(d)$$

(op. cit. prop III.2.1). Il suit (moyennant quelques raisonnements parfois délicats, op. cit.) que la définition de la t-structure donnée au début de ce paragraphe se ramène à

$$P \in {}^pD^{\leq 0}(X) \Leftrightarrow \mathcal{H}^{\nu} = 0\ \forall \nu > -\dim(X)$$

$$P \in {}^pD^{\geq 0}(X) \Leftrightarrow \mathcal{H}^{\nu} = 0\ \forall \nu < -\dim(X)$$

ainsi dans cette situation la t structure est celle qui est dite standard, décalée par $\dim(X)$. Ainsi, si $X_{/k}$ est de type fini, essentiellement lisse et équidimensionel, les objets P de $\operatorname{Perv}(X)$ s'écrivent

$$P = \mathcal{P}[\dim(X)]$$

où $\mathcal{P}$ est un faisceau lisse sur X, et les faisceaux de cohomologie de P sont triviaux en dehors de degré $-\dim(X)$.

Maintenant on explique la “réunion”

$D(X) = \bigcup D(U)$, où U décrit les ouverts denses essentiellement lisses de X .

On suppose toujours X de type fini sur un le corps fini ou algébriquement clos k. Soient $j : U \hookrightarrow X$ et $i : Y = (X - U) \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert et son complémentaire. Soient $T(U)$ et $T(Y)$ des sous-catégories pleines triangulées de respectivement $D(U)$ et $D(Y)$, que l'on suppose munies de t-structures telles que pour tout $A \in T(U)$ l'on ait $i^*Rj_*A \in T(Y)$. Pour ce qui suit ici il n'est d'ailleurs pas gênant de supposer $T(Y) = D(Y)$.

Soit

$$T(X,U) = \{B \in D(X) \ / \ j^*B \in D(U),\ i^*B \in D(Y),\ i^!B \in D(Y)\}$$

Selon nos hypothèses sur $T(U)$ et $T(Y)$, aussi parce que $i^!Rj_* = 0$, on a

$$B \in T(U) \Rightarrow Rj_*B \in T(X,U) \ .$$

La t-structure recollement est alors définie par

(1)

$$B \in T^{\leq 0}(X,U) \Leftrightarrow \left(j^*B \in T^{\leq 0}(U),\ i^*B \in T^{\leq 0}(Y)\right)$$

(2)

$$B \in T^{\geq 0}(X,U) \Leftrightarrow \left(j^*B \in T^{\geq 0}(U),\ i^!B \in T^{\geq 0}(Y)\right)$$

Naturellement, ceci demande des explications,que nous ne donnons pas ici, cf [6], III-3, itou pour le lemme suivant

Lemme 4.1. *Soient $j : U \hookrightarrow X$ et $i : Y = (X - U) \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert et son complémentaire, on a pour tout objet B de $D(X)$*

(1)

$$B \in {}^pD^{\leq 0}(X,U) \Leftrightarrow \left(j^*B \in D^{\leq 0}(U),\ i^*B \in D^{\leq 0}(Y)\right)$$

(2)

$$B \in {}^pD^{\geq 0}(X,U) \Leftrightarrow \left(j^*B \in D^{\geq 0}(U),\ i^!B \in D^{\geq 0}(Y)\right)$$

On conclut que la t-structure énoncée au début de ce paragraphe en est effectivement une en choisissant pour un ouvert dense U la sous-catégorie pleine de $D(U)$ formée par les complexes à faisceaux de cohomologie lisses. Ainsi

$T(X,U) = \{P \in D(X) \ / \ j^*P$ est sur U à faisceaux de cohomologie lisses$\}$.

Ceci explique la “réunion” précédente.

4.4. **Les foncteurs cohomologiques.** Soit X une courbe sur le corps fini ou algébriquement clos k et $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$; le paragraphe précédant permet de définir

$$\mathrm{Perv}(X) = {}^pD^{\leq 0}(X) \bigcap {}^pD^{\geq 0}(X)$$

On pose comme d'habitude ${}^pD^{\leq n}(X) = {}^pD^{\leq 0}(X)[-n]$, ${}^pD^{\geq n}(X) = {}^pD^{\geq 0}(X)[-n]$. L'inclusion ${}^pD^{\leq n}(X) \subset D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ (resp. ${}^pD^{\geq n}(X) \subset D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$) admet un adjoint à droite $\tau_{\leq n}$ (resp. un adjoint à gauche $\tau_{\geq n}$), ce sont *les translations*, qui correspondent à ce que l'on attend pour une catégorie de complexes munie de sa t-structure triviale.

On a les foncteurs

$${}^pH^\nu : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow \mathrm{Perv}(X)$$

définis par

$${}^pH^0(A) = \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0}A \in \mathrm{Perv}(X)$$

et pour tout entier ν

$${}^pH^\nu(A) = \tau_{\leq \nu}\tau_{\geq \nu}A[\nu] \in \mathrm{Perv}(X)$$

avec pour tout triangle distingué (A, B, C) donné une longue suite exacte dans $\mathrm{Perv}(X)$

$$\cdots \to {}^pH^{-1}(C) \to {}^pH^0(A) \to {}^pH^0(B) \to {}^pH^0(C) \to {}^pH^1(A) \to \cdots$$

4.5. **Les extensions intermédiaires.** Soit X une courbe sur le corps fini ou algébriquement clos k, $j : U \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert et $i : Y = X - U \hookrightarrow X$.

Soit P un faisceau pervers sur U. *Un faisceau pervers $\overline{P}$ sur X est appelé une extension de P à X si $j^*\overline{P} = P$.* Notons que le triangle suivant est alors distingué

$$\overline{P} \to Rj_*P \to i_*i^!\overline{P}[1] \to \overline{P}[1]$$

Il existe une unique extension (à quasi-isomorphisme près) $\overline{P} \in \mathrm{Perv}(X)$ tel que $\overline{P}$ n'ait ni quotient, ni sous-objet de la forme i_*A, avec $A \in \mathrm{Perv}(Y)$. C'est *l'extension intermédiaire, notée $j_{!*}P$*. Ceci définit un foncteur $j_{!*} : \mathrm{Perv}(U) \to \mathrm{Perv}(X)$, qui, le corps de base étant fini, envoie les faisceaux pervers mixtes dans les faisceaux pervers mixtes.

On peut caractériser l'extension intermédiaire comme étant, à isomorphisme près, l'unique faisceau pervers $\overline{P} \in \mathrm{Perv}(X)$ tel que

$$j^*\overline{P} = P \ , \ {}^pH^0(i^*\overline{P}) = {}^pH^0(i^!\overline{P}) = 0$$

(plus de détails dans [6], III-5).

4.6. **La restriction de Weil.** Soient $S \to T$ des schémas et X un S-schéma. On appelle restriction de Weil de S à T de X le schéma, s'il existe, qui représente le foncteur

$$\begin{array}{ccc} T\text{-schémas} & \longrightarrow & Ens \\ Y & \longmapsto & X(Y \times_T S) \end{array}$$

On le note $Res_{S/T}(X)$. c'est l'adjoint à droite (s'il existe) du foncteur produit fibré

$$\begin{array}{ccc} T\text{-schémas} & \longrightarrow & S\text{-schémas} \\ Y & \longmapsto & Y \times_T S \end{array}$$

c'est à dire que fonctoriellemnt en les T-schémas Y on a

$$\mathrm{Hom}_{T-\mathrm{Sch}}(Y, Res_{S/T}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{S-\mathrm{Sch}}(Y \times_T S, X) \ .$$

Par exemple, si $T = \mathrm{Spec}(k)$ et $S = \mathrm{Spec}(L)$, où L/k est une extension de corps, si

$$X = \mathrm{Spec} L[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m) \ \text{ alors } \ Res_{L/k}(X) = \mathrm{Spec} k[y_{i,j}]/(g_{\ell,r})$$

avec

$$L = ke_1 \oplus \cdots \oplus e_s \ , \ x_i = \sum_{j=1}^{s} y_{i,j} \ , \ f_\ell = \sum_{r=1}^{s} g_{\ell,r} e_r \ .$$

Il y a beaucoup de situations où les restrictions de Weil existent, par exemple, toujours avec les corps k et L, si X est un schéma en groupes commutatifs, auquel cas sa restriction de Weil est de même.

Références

[1] Beauville A., Laszlo Y., Un lemme de descente, C.R.A.S. Paris, I Math. 320, p.335-340, 1995.

[2] Drinfeld V. G., Two dimensional ℓ-adic representation of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2), Amer. J. of Math. 54, p. 85-114, 1983.

[3] Drinfeld V. G., Langlands conjecture fr GL(2) over function fields, Proceedings of the International Congress of Math., Helsinki 1978, vol. 2, p. 565-574.

[4] Drinfeld V. G., Varieties of modules of F-sheaves, Func. Analysis 21-2, 1987.

[5] Grothendieck Alexandre, Revêtements étales et groupe fondamental, SGA 1, LN 224 Springer verlag 1971, nouvelle édition par la SMF en 2003.

[6] Kiehl R., Weissauer R., Weil Conjectures, Perverse sheaves and ℓ-adic Fourier Transform, Springer Verlag, A Series of Modern Surveys in Math., vol 42.

[7] Lafforgue L., Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, J. of the Amer. Math. Soc., vol. 11, n° 4, p.1001-1036, 1998.

[8] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, IHES, Octobre 2000.

[9] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, Invent. Math. 147, 2002.

[10] Lafforgue V., Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale. arXiv : 1209.5352v5 [math. AG] 17 sep 2015.

[11] Stroh B., Séminaire Bourbaki 1110, janvier 2016.

[12] Varshavsky Y., Moduli spaces of principal F-bundles, Selecta math. (new sery), 10, p.131-166, 2004.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: `marc.reversat@math.univ-toulouse.fr`