UNE INTRODUCTION AUX CHTOUCAS DE DRINFELD.

MARC REVERSAT

Résumé. Ces notes sont une tentative pour expliquer comment la notion de chtouca est née à partir des modules de Drinfeld, puis les constructions de leurs champs modulaires données par Laurent Lafforgue. Dans de prochaines notes nous aborderons la correspondance de Langlands pour GL_r établie par ce dernier. Nous essaierons aussi d'expliquer le travail de Vincent Lafforgue, généralisant pour le sens "automorphe vers Galois" ce résultat à tous les groupes réductifs.

Table des matières

Date: 21 janvier 2016.

Première partie 1. **Des modules de Drinfeld aux chtoucas.**

1. Le théorème principal.

Soient un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et X une courbe sur définie sur $\mathbb{F}_q$, lisse, complète et géométriquement irréductible. On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X, où des places du corps K des fonctions rationnelles sur X ; si v est une place de K, c'est à dire un point fermé de X, on désigne par K_v, $\mathcal{O}_v$, ϖ_v et $\mathbb{F}_q(v)$ le complété de K en cette place v, l'anneau valuation de K_v, une de ses uniformisantes et son corps des restes. Soient $\infty \in |X|$ un point fermé de X, $\alpha = [\mathbb{F}_q(\infty) : \mathbb{F}_q]$ et $A = H^0(X - \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$. Si $a \in A$, $a \neq 0$, on définit $\deg a$ par la formule $q^{\deg a} = \sharp(A/aA)$.

Si B est une $\mathbb{F}_q$-algèbre (commutative et unitaire, elles le seront toutes) on écrira $X \otimes B$ au lieu de $X \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q} \mathrm{Spec}B$, de même si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$ on écrira $X \times S$ pour le produit fibré au dessus de $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$, si s est un point de S on pose $X \times s = X \times \{s\}$ où $\{s\}$ est le sous-schéma de S défini par s. On désignera par Frob_S le morphisme de Frobenius sur S qui est l'identité sur les points de S et l'élévation à la puissance q sur le faisceau $\mathcal{O}_S$.

Soit B une algèbre et σ l'un de ses endomorphismes, on désigne par $B\{\sigma\}$ l'anneau des polynômes en σ muni de l'addition usuelle et de la multiplication définie par $\sigma \cdot \sigma^n = \sigma^{n+1}$ et $\sigma \cdot b = \sigma(b)\sigma$, où n est un entier naturel et $b \in B$. On utilisera ceci en particulier lorsque B est une $\mathbb{F}_q$-algèbre sur laquelle agit l'endomorphisme τ de Frobenius de $\mathbb{F}_q$.

Rappelons les définitions suivantes, dues à Drinfeld ([5], [8] et [9]).

Définition 1.1. *Soient S un schéma et $r > 0$ un entier. Un module de Drinfeld de rang r sur S est la donnée d'un fibré en droites L sur S et d'un morphisme d'anneaux $\phi : A \to \mathrm{End}_S(L)$ tel que, localement* *sur un ouvert de Zariski U sur lequel L est trivial, ϕ soit de la forme*

$$\phi : a \mapsto \phi_a = \sum_{1 \leq i \leq m} a_i \tau^i$$

avec $a_i \in \mathcal{O}_S(U)$, $m = r \deg a$ et $a_m \in \mathcal{O}_S(U)^\times$.

Un tel module de Drinfeld sera noté (L, ϕ) ou $(L, \phi)_{/S}$.

Le recollement des applications $a \mapsto a_0$ définit un morphisme γ_ϕ : $A \to \mathcal{O}_S$ appelé le morphisme caractéristique, son noyau s'appelle la (ϕ,A)-caractéristique de S.

Soient (L, ϕ) et (L', ϕ') deux modules de Drinfeld sur S, une isogénie $u : (L, \phi) \to (L', \phi')$ est un morphisme de faisceaux et de A-modules, c'est à dire que sur tout ouvert U de S trivialisant L et L' il existe $u_0, \cdots, u_d \in \mathcal{O}_S(U)$ tels que $u = \sum_{1 \leq i \leq d} u_i \tau^i$ et bien sûr $u\phi_a = \phi'_a u$ dans $\mathcal{O}_S(U)\{\tau\}$, pour tout $a \in A$. Les isogénies $(L, \phi) \to (L', \phi')$ forment un A-module, noté $\mathrm{Hom}_A((L, \phi), (L', \phi'))$.

Remarquons que le morphisme caractéristique γ_ϕ fait de S un A-schéma.

Soient (L, ϕ) un module de Drinfeld de rang r sur le schéma S et I un idéal non nul de A, on pose

$${}_I\phi = \bigcap_{a \in I} \mathrm{Ker}(L \overset{\phi_a}{\to} L) \ ,$$

on peut montrer (par des calculs classiques) que ${}_I\phi$ est un groupe algébrique fini et plat, de rang égal à $\sharp(I^{-1}/A)^r$; si $\gamma(S) \cap V(I) = \emptyset$ (γ est le morphisme caractéristique, vu comme $\gamma : S \to \mathrm{Spec}A \subset X$, et $V(I)$ est le fermé de $\mathrm{Spec}A$ défini par I) alors ${}_I\phi$ est étale sur S et, localement pour la topologie étale, isomorphe au faisceau constant $(I^{-1}/A)^r$ sur S.

Les structures de niveaux des modules de Drinfeld. Un fibré en droites peut être vu comme un schéma, pas seulement comme un faisceau inversible. Soit L un fibré en droites sur S, soit U un ouvert de S sur lequel L est trivial, on a

$$L|U \simeq_U \mathbb{A}^1_U = U \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[X] \ .$$

Soit L un schéma, le faisceau $\mathcal{K}_L$ sur L est associé au préfaisceau qui à tout ouvert affine U non vide associe l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_L(U)$. Un diviseur de Cartier sur L est une section globale du faisceau $\mathcal{K}_L^\times/\mathcal{O}_L^\times$.

Définition 1.2. *Soient (L, ϕ) un module de Drinfeld de rang r sur le schéma S et N un idéal non nul de A, une structure de niveau N sur (L, ϕ) est la donnée d'un morphisme*

$$\ell : (N^{-1}/A)^r \longrightarrow {}_N\phi$$

de A-modules et de faisceaux sur S, qui

(1) *lorsque N ne rencontre pas la A-caractéristique de S, est un isomorphisme*

(2) *en général, induit une égalité de A-modules*

$$({}_N\phi) = \sum_{\alpha\in(N^{-1}/A)^r} (\ell(\alpha))$$

entre, à gauche, l'ensemble des diviseurs de Cartier sur L induits par $\{\phi_a\ ,\ a \in N\}$ et à droite l'ensemble de ceux induits par les sections globales de l'image de ℓ.

Définition 1.3. *(Drinfeld* [9], *voir aussi* [19]*) Soient S un schéma et $r > 0$ un entier, un chtouca à droite (resp. à gauche) sur S de rang r est la donnée*

(1) *d'un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ de rang r,*

(2) *d'un diagramme*

$$\underline{\mathcal{E}} := \mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}'' \quad (\ \textit{resp.}\ \mathcal{E} \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'') \tag{1}$$

où $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont deux faisceaux localement libres sur $X\times S$ de rang r, où j et t sont deux morphismes injectifs dont les conoyaux sont respectivement supportés par les graphes de deux morphismes ∞, $0 : S \to X$ appelés pôle et zéro, ces conoyaux en tant que $\mathcal{O}_S$-modules étant localement libres de rang 1 (on dit aussi que le diagramme (1) est une modification à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{E}$),

(3) *d'un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{E} := (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$.*

Un morphisme de chtoucas à droite sur S de rang r

$$(f, f', f'') : (\mathcal{E}_1 \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_1' \overset{t_1}{\hookleftarrow} \mathcal{E}_1'' \overset{\sim}{\leftarrow} {}^\tau\mathcal{E}_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2 \overset{j_2}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_2' \overset{t_2}{\hookleftarrow} \mathcal{E}_2'' \overset{\sim}{\leftarrow} {}^\tau\mathcal{E}_2)$$

est la donnée de trois morphismes de faisceaux sur $X \times S$, $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$, $f' : \mathcal{E}_1' \to \mathcal{E}_2'$ et $f'' : \mathcal{E}_1'' \to \mathcal{E}_2''$, compatibles avec les données précédentes, c'est à dire tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{E}_1 & \overset{j_1}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}_1' & \overset{t_1}{\hookleftarrow} & \mathcal{E}_1'' & \overset{\sim}{\leftarrow} & {}^\tau\mathcal{E}_1 \\
f\downarrow & & f'\downarrow & & f''\downarrow & & {}^\tau f\downarrow \\
\mathcal{E}_2 & \overset{j_2}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}_2' & \overset{t_2}{\hookleftarrow} & \mathcal{E}_2'' & \overset{\sim}{\leftarrow} & {}^\tau\mathcal{E}_2
\end{array}$$

Un morphisme de chtoucas à gauche admet une définition analogue.

Dorénavant on appellera simplement chtouca les chtoucas à droite.

Définition 1.4. *Soit* $N = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ *un niveau, c'est à dire un sous-schéma fermé et fini de* X. *Une structure de niveau* N *sur le chtouca* $\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''$ *de rang* r *sur le schéma* S, *dont le pôle et le zéro évitent* N, *consiste en la donnée d'un isomorphisme*

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}} \mathcal{O}_{N\times S} \overset{u}{\underset{\sim}{\to}} \mathcal{O}^r_{N\times S}$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N & \overset{\sim}{\leftarrow} & \mathcal{E}'' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \\ \wr\uparrow & & \uparrow\wr \\ \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N & & {}^{\tau}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \\ u\searrow & & \swarrow {}^{\tau}u \\ & \mathcal{O}^r_{N\times S} & \end{array}$$

Avant d'énoncer la théorème principal de cette partie il est nécessaire de faire quelques remarques sur les chtoucas.

Remarque 1.5. *(1) Soit* $f : S' \to S$ *un morphisme de schémas, alors l'image inverse d'un chtouca* $\underline{\mathcal{E}}$ *sur* S *est un chtouca sur* S', *noté* $f^*\underline{\mathcal{E}}$, *ses zéro et pôle étant* f^*0 *et* $f^*\infty$. *On a une construction analogue pour les chtoucas à gauche.*

(2) Soit $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}'' \simeq {}^{\tau}\mathcal{E})$ *un chtouca sur le schéma* S, *alors*

$${}^*\underline{\mathcal{E}} := (\mathcal{E}' \overset{{}^*t}{\hookleftarrow} {}^{\tau}\mathcal{E} \overset{{}^*j}{\hookrightarrow} {}^{\tau}\mathcal{E}' = {}^{\tau}\mathcal{E}')$$

où ${}^*j = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*j$ *et* ${}^*t : {}^{\tau}\mathcal{E} \overset{\sim}{\to} \mathcal{E}'' \overset{t}{\to} \mathcal{E}'$, *est un chtouca à gauche de zéro et pôle* 0 *et* $\mathrm{Frob}_S \circ \infty$.

De même, si $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'' \simeq {}^{\tau}\mathcal{E})$ *est un chtouca à gauche sur le schéma* S,

$${}^*\underline{\mathcal{E}} := (\mathcal{E}' \overset{{}^*j}{\hookrightarrow} {}^{\tau}\mathcal{E} \overset{{}^*t}{\hookleftarrow} {}^{\tau}\mathcal{E}' = {}^{\tau}\mathcal{E}')\ ,$$

où ${}^*j : \mathcal{E}' \overset{j}{\to} \mathcal{E}'' \overset{\sim}{\to} {}^{\tau}\mathcal{E}$ *et* ${}^*t = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*t$, *est un chtouca dont les zéro et pôle sont* $\mathrm{Frob}_S \circ 0$ *et* ∞.

L'application en suivant de ces deux procédés donne l'image inverse des chtoucas (ou des chtoucas à gauche) par $S \xrightarrow{\mathrm{Frob}_S} S$.

(3) Le déterminant d'un chtouca est un chtouca de rang 1 *de mêmes zéro et pôle.*

(4) Soient $\mathcal{M}$ *un faisceau inversible sur* X *et* $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}$ *son image inverse par la première projection* $\mathrm{pr}_1 : X \times S \to X$, *soit* $\underline{\mathcal{E}}$ *un chtouca (resp. chtouca à gauche) sur* S, *alors* $\underline{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{X\times S}} \mathrm{pr}_1^*\mathcal{M}$ *donne un chtouca (resp.un chtouca à gauche) de mêmes zéro et pôle.*

(5) *Les trois premières remarques s'appliquent aux chtoucas (ou chtoucas à gauche) munis de structures de niveau, on obtient les nouvelles structures de niveaux que l'on devine. Ceci est encore vrai pour la quatrième remarque, sous réserve que la restriction de $\mathcal{M}$ à la structure de niveau soit triviale.*

Théorème 1.6. *Soient S un $\mathbb{F}_q$-schéma et $r > 0$ un entier. La catégorie des modules de Drinfeld sur S de rang r est équivalente à la catégorie des chtoucas $\underline{\mathcal{E}}$ sur S de rang r tels que*

(1) *le zéro de $\underline{\mathcal{E}}$ est un morphisme $0 : S \to \mathrm{Spec}A \subset X$,*

(2) *le pôle de $\underline{\mathcal{E}}$ a pour image $\infty(S) = \{\infty\}$,*

(3) *on a un isomorphisme canonique (provenant de l'identité sur $\underline{\mathcal{E}}$, avec $\alpha = [\mathbb{F}_q(\infty) : \mathbb{F}_q]$)*
$$(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S^{r\alpha})^* \underline{\mathcal{E}} \simeq \underline{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times S}} \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_X(\infty) \ .$$

(4) *Pour tout point s de S, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{E}_s)$ de la restriction $\mathcal{E}_s$ de $\mathcal{E}$ à $X \times s$ est nulle : $\chi(\mathcal{E}_s) = 0$.*

Soit N un idéal non nul de A. On a la même équivalence entre d'une part la catégorie des modules de Drinfeld ϕ de rang r munis d'une structure de niveau N ne rencontrant pas (ϕ,A)-caractéristique de S, et d'autre part la catégorie des chtoucas vérifiant les assertions (1) à (4), qui de plus sont munis d'une structure de niveau N.

La preuve de ce théorème est assez longue et est l'objet des trois paragraphes suivants.

1.1. **Modules de Drinfeld et FH-modules.**

Définition 1.7. *Soient B une $\mathbb{F}_q$-algèbre, $S = \mathrm{Spec}B$ et $r > 0$ un entier. Un FH-B-module (ou un FH-S-module) de rang r est la donnée d'un $A \otimes B$ module M et d'une suite croissante $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de sous-B-modules de M tels que*

(1) *$M = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,*

(2) *$M_{-1} = 0$ et M_i/M_{i-1} est B-libre de rang 1, pour tout $i \geq 0$,*

(3) *pour tout $a \in A - \{0\}$ et tout i, $aM_i \subset M_{i+r\deg a}$ et la multipication par a induit un isomorphisme de B-modules*
$$M_i/M_{i-1} \xrightarrow{\sim} M_{i+r\deg a}/M_{i-1+r\deg a} \ ,$$

(4) *il existe une application A-linéaire $\phi : M \to M$ vérifiant*

(a) $\phi(bm) = b^q\phi(m)$ *pour tous* $b \in B$ *et* $m \in M$,

(b) $\phi(M_i) \subset M_{i+1}$ *pour tout* i, *de plus* ϕ *induit pour* $i \geq 0$ *un isomorphisme* $M_i/M_{i-1} \xrightarrow{\sim} M_{i+1}/M_i$ *qui est* Frob_B*-linéaire (cf (a)).*

Un morphisme $(M, (M_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \to (M', (M'_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ *consiste en une collection* $f_i : M_i \to M'_i$ *de* B*-homomorphismes compatibles avec toutes les données.*

Pouquoi cette expression “FH-module” ? Les chtoucas ont d'abord été appelés F-faisceaux par Drinfeld ([9]), Harder et Kazhdan ont proposé le nom de “FH-faisceaux”, avec FH pour rappeler Frobenius et Hecke ([13]). Aujourd'hui le terme chtouca s'est imposé, on rencontrera au paragraphe suivant les faisceaux elliptiques, une notion due à Drinfeld ([8]), et l'on pourra constater qu'il eût été plus juste, plutôt que FH-module, d'utiliser le terme de module elliptique, mais c'est ainsi que Drinfeld désigna ce qui maintenant s'appelle les modules de Drinfeld et le risque de confusion eût été trop grand. D'où le choix du terme FH-module.

Théorème 1.8. *Soient* B *une* $\mathbb{F}_q$*-algèbre,* $S = \mathrm{Spec} B$ *et* $r > 0$ *un entier. La catégorie des modules de Drinfeld sur* S *de rang* r *est équivalente à la catégorie des FH-*S*-modules de rang* r.

Démonstration. Soit $\varphi : A \to B[\tau]$, un module de Drinfeld de rang r, on pose $M = B\{\tau\}$, $M_i = \{u \in B\{\tau\},\ \deg_\tau u \leq i\}$ pour $i \geq 0$ et $M_i = 0$ pour $i < 0$. On définit $\Phi : M \to M$ comme étant la multiplication à gauche par τ. Il est clair que toutes les propriétés voulues sont vérifiées.

Inversement soit la donnée de M, (M_i) et ϕ, on pose $M_0 = M_0/M_{-1} = Bm_0$, on voit que l'on a les isomorphismes de B-modules

$$M \simeq \oplus_{i\geq 0} B\phi^i(m_0) \simeq B\{\phi\}\ .$$

et alors $M_0 \simeq B\mathrm{Id}$, $M_i \simeq \{u \in B\{\phi\},\ \deg_\phi u \leq i\}$. Soit $a \in A$, $a \neq 0$, posons $\varphi_a = a\mathrm{Id} \in aM_0 \subset M_{r\deg a}$, comme la multiplication par a induit un isomorphisme $M_0 \simeq M_{r\deg a}/M_{r\deg a-1}$ on a $\deg_\phi \varphi_a = r\deg a$; φ est un module de Drinfeld sur B de rang r.

Les vérifications concernant les morphismes sont immédiates. □

1.2. **FH-modules et faisceaux elliptiques.**

Définition 1.9. *Soit* S *un* A*-schéma, on appelle faisceau elliptique sur* S *de rang l'entier* $r > 0$ *les données suivantes :*

— *une suite croissante* $(F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *de faiceaux localement libres de rang* r *sur* $X \times S$,
— *des morphismes* $t_i : (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* F_i \to F_{i+1}$ *commutant aux inclusions* $F_{i-1} \subset F_i$,

possédant les propriétés suivantes

(1) $F_i(\infty) = F_{i+\alpha r}$ *pour tout* i,
(2) *pour tout* i *les faisceaux* $(pr_2)_*(F_{i+1}/F_i)$, *où* $pr_2 : X \times S \to S$ *est la deuxième projection, sont des* $\mathcal{O}_S$*-modules localement libres de rang* 1,
(3) *pour tout* i *et tout* $s \in |S|$ *la restriction de* F_i *à* $X \times s$ *est de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à* $i+1$,
(4) *il existe un morphisme* $S \to \mathrm{Spec}A$ *tel que son graphe soit pour tout* i *égal au support du conoyau de* t_i.

Un tel faisceau elliptique se note $(F_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, *il est dit de rang* r. *Étant donné deux faisceaux elliptiques* $(F_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $(F'_i, t'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *sur* S, *un morphisme* $(F_i, t_i)_{i\in\mathbb{Z}} \to (F'_i, t'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *est la donnée d'une collection de morphismes de faisceaux* $f_i : F_i \to F'_i$ *compatibles aux inclusions et avec les* t_i *et* t'_i, *c'est à dire tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{f_i} & F'_i \\ \cap & & \cap \\ F_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & F'_{i+1} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}_S)^* F_i & \xrightarrow{(\mathrm{Id}\times\mathrm{Frob}_S)^*(f_i)} & (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob}_S)^* F'_i \\ t_i \downarrow & & \downarrow t'_i \\ F_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & F'_{i+1} \end{array}$$

soient commutatifs.

Théorème 1.10. *Soient* B *une* $\mathbb{F}_q$*-algèbre,* $S = \mathrm{Spec}B$ *et* $r > 0$ *un entier. La catégorie des FH-*B*-modules de rang* r *est équivalente à la catégorie des faisceaux elliptiques de rang* r *sur* S.

Démonstration. Soit donc $(F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ un faisceau elliptique de rang r sur S, on pose

$$M = H^0((X - \infty) \otimes B, F_i) \quad \text{et} \quad M_i = H^0(X \times B, F_i) ,$$

le premier terme ne dépend pas de i. On a de manière évidente $aM_i \subset M_{i+r\deg a}$ pour tout élément non nul a de A.

D'abord un lemme auxiliaire.

Lemme 1.11. *Soient* B *une* $\mathbb{F}_q$*-algèbre,* $S = \mathrm{Spec}B$ *et* F *un faisceau cohérent sur* $X \times B$, *alors*

(1) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ *de* B *il existe un sous* B*-module* T *de* $H^1(X \times S, F \otimes_B \mathfrak{m})$ *tel que l'on ait la suite exacte de* B*-modules*

$$0 \to H^0(X\times S, F)\otimes_B B/\mathfrak{m} \to H^0(X\times S, F\otimes_B B/\mathfrak{m}) \to T\otimes_B B/\mathfrak{m} \to 0\ ,$$

(2) on a un isomorphisme de B*-modules (provenant du morphisme naturel* $F \to F \otimes_B B/\mathfrak{m}$*)*

$$H^1(X \times S, F) \otimes_B B/\mathfrak{m} \simeq H^1(X \times S, F \otimes_B B/\mathfrak{m})\ .$$

Démonstration. La ssuite exacte de B-modules

$$0 \to \mathfrak{m} \to B \to B/\mathfrak{m} \to 0$$

donne la suite exacte de faisceaux cohérents sur $X \times S$

$$0 \to F \otimes_B \mathfrak{m} \to F \to F \otimes_B B/\mathfrak{m} \to 0\ ,$$

d'où la suite exacte de cohomologie (de faisceaux sur $X \times S$)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \to & H^0(F \otimes_B \mathfrak{m}) & \to & H^0(F) & \to & H^0(F \otimes_B B/\mathfrak{m}) \\ & \to & H^1(F \otimes_B \mathfrak{m}) & \to & H^1(F) & \to & H^1(F \otimes_B B/\mathfrak{m}) \\ & \to & H^2(F \otimes_B \mathfrak{m}) & \to & H^2(F) & \to & 0 \\ & \to & H^3(F \otimes_B \mathfrak{m}) & \to & H^3(F) & \to & 0 \text{ etc.} \end{array}$$

On a $H^i(F \otimes_B B/\mathfrak{m}) = 0$ pour tout $i \geq 2$ car $F \otimes_B B/\mathfrak{m}$ peut être vu comme un faisceau sur la courbe $X \times B/\mathfrak{m}$ définie sur le corps $B/\mathfrak{m}$. Les cohomologies de F et $F \otimes_B \mathfrak{m}$ peuvent être calculées à l'aide de complexes de Čech pour des ouverts affines de $X \times S$, puisque $X \times S \to S$ est séparé, on voit donc que les morphismes déduits de la suite exacte précédente

$$H^i(F \otimes_B \mathfrak{m}) \otimes_B B/\mathfrak{m} \to H^i(F) \otimes_B B/\mathfrak{m}$$

sont nuls. Il suit que pour tout $i \geq 2$ on a $H^i(F) \otimes_B B/\mathfrak{m} = 0$ ceci est vrai pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, donc pour tout $i \geq 2$ on a $H^i(F) = 0$ (c'est clair si B n'est pas local, sinon on raisonne avec $B \oplus B$), et de même on a $H^i(F \otimes_B \mathfrak{m}) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

En appliquant $\cdot \otimes_B B/\mathfrak{m}$ à la suite exacte de cohomologie il vient donc les suites exactes

$$H^0(F \otimes_B \mathfrak{m}) \otimes_B B/\mathfrak{m} \xrightarrow{0} H^0(F) \to T_1 \to 0$$

où $T_1 = Im(H^0(F) \to H^0(F \otimes_B B/\mathfrak{m})$,

$$0 \to T_1 \to H^0(F \otimes_B B/\mathfrak{m}) \to T_2 \otimes_B B/\mathfrak{m} \to 0$$

où $T_2 = Im(H^0(F \otimes_B B/\mathfrak{m}) \to H^1(F \otimes_B \mathfrak{m})$,

$$T_2 \otimes_B B/\mathfrak{m} \to H^1(F \otimes_B \mathfrak{m}) \otimes_B B/\mathfrak{m} \xrightarrow{0} T_3 \otimes_B B/\mathfrak{m} \to 0$$

où $T_3 = Im(H^1(F \otimes_B \mathfrak{m}) \to H^1(F)$ et où l'on voit que $T_3 \otimes_B B/\mathfrak{m} = 0$,

$$0 = T_3 \otimes_B B/\mathfrak{m} \to H^1(F) \otimes_B B/\mathfrak{m} \to H^1(F \otimes_B B/\mathfrak{m}) \to 0\ .$$

On en déduit les résultats cherchés avec $T = T_2$. □

Remarque 1.12. *Le B-module T de ce lemme est probablement un module* $\mathrm{Tor}_1^B(\cdot)$*, cf* [2]*, § 4, n° 7, cor 1.*

Montrons que si (F_i) est un faisceau elliptique sur B, on a

$$H^0(X \otimes B, F_{-1}) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(X \otimes B, F_{-1}) = 0\ . \tag{2}$$

En effet le lemme 1.11 montre que cette assertion est équivalente à

$$H^0(X \times s, (F_{-1})_s) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(X \times s, (F_{-1})_s) = 0 \tag{3}$$

pour tout $s \in \mathrm{Spec}B$, fermé.

Pour ce faire précisons d'abord que, pour tout i et pour tout point s de S, fermé, l'inclusion $F_i \subset F_{i+1}$ et l'application t_i induisent des injections de $H^0(X \times s, (F_i)_s)$ dans $H^0(X \times s, (F_{i+1})_s)$. En effet, les faisceaux F_i étant localement libres, on voit que l'application $(F_i)_s \to (F_{i+1})_s$ qui se déduit de l'inclusion est injective ; si $(t_i)_s : (F_i)_s \to (F_{i+1})_s$ désigne l'application induite par t_i, on voit avec l'assertion (4) de la définition des faisceaux elliptiques que $\mathrm{supp}(\mathrm{Coker}(t_i)_s) \neq X \times s$, donc $(F_i)_s$ et $(F_{i+1})_s$ ont même rang, d'où l'injection cherchée puisque $X \times s$ est une courbe.

Montrons la relation (3). On sait que $\chi((F_{-1})_s) = 0$, supposons $H^0(X \times s, (F_{-1})_s) \neq 0$. Soit j le plus grand des entiers négatifs tels que $H^0(X \times s, (F_{j-1})_s) = 0$ et soit $z \in H^0(X \times s, (F_j)_s)$, $z \neq 0$. Considérons les applications $t : (id_X \times \mathrm{Frob}_S)^* F_i \to F_{i+1}$ (t est un élément de la la collection des t_i de la définition, dont par commodité on oublie l'indice i), on a pour tout $m > 0$

$$t^m z \in H^0(X \times s, (F_{j+m})_s) \quad \text{et} \quad t^m z \notin H^0(X \times s, (F_{j+m-1})_s)\ ,$$

en effet, à cause de l'injection précisée au dessus, $t^m z \in H^0(X \times s, (F_{j+m-1})_s)$ implique $z \in H^0(X \times s, (F_{j-1})_s)$ ce qui est faux.

Donc, $z, tz, \cdots, t^m z$ sont dans $H^0(X \times s, (F_{j+m})_s)$ et linéairement indépendants (sur $B/\wp$, où $\wp$ est l'idéal correspondant à s), donc

$$\dim_{B/\wp} H^0(X \times s, (F_{j+m})_s) \geq m + 1\ ,$$

or pour m suffisamment grand on a $H^1(X \times s, (F_{j+m})_s) = 0$, donc pour un tel m il vient

$$\chi((F_{j+m})_s) = j + m + 1 \geq m + 1\ ,$$

par suite $j \geq 0$, ce qui est faux. La relation (2) est donc démontrée.

On a,

(4) $\quad H^0(X \times B, F_i) = 0 \ \forall \ i \leq -1 \quad , \quad H^1(X \times B, F_i) = 0 \ \forall \ i \geq -1 \ .$

En effet, les suites exactes

$$0 \to (F_i)_s \to (F_{i+1})_s \to (F_{i+1})_s/(F_i)_s \to 0$$

montrent que ces relations sont vraies pour les faisceaux $(F_i)_s$, on les obtient pour les faixceaux F_i avec le lemme 1.11.

Montrons que les modules M et M_i définis au début de cette démonstration forment un FH-module. On a donc $M_i = 0$ pour $i \leq -1$. Soit $i \geq 0$, il suit des résultats précédents la suite exacte de B-modules

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to H^0(X \otimes B, F_i/F_{i-1}) \to 0 \ ,$$

par hypothèse le terme de droite est un B-module projectif de rang 1, donc cette suite est scindée et l'on voit que M_{i-1} projectif implique M_i projectif ; cette récurrence se complète en remarquant que $M_0 = M_0/M_{-1} = H^0(X \otimes B, F_0/F_{-1})$ est projectif. Donc, pour $i \geq -1$, les B-modules M_i sont projectifs , il résulte alors de la propriété (3) des faisceaux elliptiques (et des relations précédemment établies) que M_i est de rang $i+1$ ($i \geq -1$). Pour finir précisons que l'application ϕ est celle induite par les t_i sur les $H^0(X \times S, F_i)$.

Réciproquement, soit $(M, (M_i))$ un FH-B-module de rang r. Pour $i \leq -1$ on pose $F_i = 0$. Pour $i \geq 0$, on pose $F_i|\,((X - \infty) \otimes B) = \widetilde{M}$ et, si ϖ est un paramètre local de X au point ∞, si U est un ouvert affine de X ne rencontrant le lieu singulier de ϖ qu'en l'∞, on pose $F_i|(U \otimes B) = \mathcal{O}_U \boxtimes \widetilde{M_i}$ ($\widetilde{M_i}$ est un faisceau sur S). Cela définit un faisceau sur $X \otimes B$, on a bien $\widetilde{M} = \mathcal{O}_U \boxtimes \widetilde{M_i}$ sur

$$((X - \infty) \otimes B) \bigcap (U \otimes B) = (U - \infty) \otimes B \ .$$

Les applications $t_i : (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* F_i \to F_{i+1}$ sont données par ϕ, cf la définition des FH-modules. Déterminons le support du conoyau de t_i, pour cela il faut reprendre les remarques faites plus haut, en particulier que si $M_0 = Bm_0$, alors $M = \oplus_{i \geq 0} B\phi^i(m_0)$. On voit déjà que ce support contient le graphe de l'application $\gamma : S \to \mathrm{Spec} A$ qui à $a \in A$ associe la coordonnée de la composante dans $M_0 = Bm_0$ de am_0. Soit s un point de S représenté par l'idéal $\wp$, soit

$$\psi : (M_i)_\wp \xrightarrow{\phi} (M_{i+1})_\wp \twoheadrightarrow (M_{i+1})_\wp / \wp (M_{i+1})_\wp \ ,$$

alors $\ker \psi = \phi^{-1}(\wp(M_{i+1})_\wp) \supset \wp(M_i)_\wp$, d'autre part l'écriture des M_i rappelée plus haut permet de montrer que ψ est surjectif. Donc t_i induit un morphisme surjectif

$$((\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* F_i)_{(\infty,s)} \twoheadrightarrow (F_{i+1})_{(\infty,s)} \quad .$$

On a pouvé que le support du conoyau de t_i est égal au graphe de l'application γ.

Les autres propriétés demandées sont aisées à établir. Par exemple de la suite exacte

$$0 \to F_i \to F_{i+1} \to F_{i+1}/F_i \to 0$$

on déduit, en l'examinant au voisinage du point (∞, s) de $X \times B$, que $pr_1^*(F_{i+1}/F_i)|X \times s \simeq (M_{i+1}/M_i) \otimes_B B/\wp$ est de rang 1. Par exemple aussi, la suite exacte

$$0 \to F_i|X \times s \to F_{i+1}|X \times s \to (F_{i+1}/F_i)|X \times s \to 0$$

donne $\chi(F_{i+1}|X \times s) = \chi(F_i|X \times s) + 1$, qui avec le fait que $F_{-1} = 0$ donne $\chi(F_i|X \times s) = i + 1$ pour $i \geq 0$. $\square$

1.3. **Faisceaux elliptiques et chtoucas.** Nous montrons que la catégorie des faisceax elliptiques est équivalente à celle des chtoucas du type énoncé dans le théorème 1.6.

Soit (F_i, t_i) un faisceau elliptique. On pose $\sigma = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)$, pour chaque i on désigne par j_i l'inclusion $F_i \subset F_{i+1}$ et l'on a un chtouca

$$F_i \xrightarrow{j_i} F_{i+1} \xleftarrow{t_i} \sigma^* F_i \tag{5}$$

dont on déduit avec l'assertion (2) de la remarque 1.5 le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \sigma^* F_i & \xrightarrow{\sigma^* j_i} & \sigma^* F_{i+1} & \xleftarrow{\sigma^* t_i} & \sigma^* \sigma^* F_i \\ t_i \downarrow & & \downarrow t_{i+1} & & \downarrow \sigma^* t_i \\ F_{i+1} & \xrightarrow{j_{i+1}} & F_{i+2} & \xleftarrow{t_{i+1}} & \sigma^* F_{i+1} \end{array}$$

qui indique comment l'on peut espérer retrouver F_{i+2} à partir de F_{i+1} et F_i, ce que nous faisons maintenant.

Montrons que l'on a la suite exacte de $\mathcal{O}_{X \times S}$-modules

$$0 \to \sigma^* F_i \xrightarrow{(\sigma^* j_i) \times t_i} \sigma^* F_{i+1} \times F_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1} - j_{i+1}} F_{i+2} \to 0 \tag{6}$$

On a $F_{i+1} = F_{i+2}$ sur $(X - \infty) \times S$ et le support du conoyau de t_{i+1} ne rencontre pas $\infty \times S$, donc $F_{i+2} = F_{i+1} + t_{i+1}(\sigma^* F_{i+1})$, ce qui prouve que $t_{i+1} - j_{i+1}$ est surjectif. En examinant les caractéristiques d'Euler-poincaré on voit que pour tout point s de S la suite

$$0 \to \sigma^*(F_i)_s \to \sigma^*(F_{i+1})_s \times (F_{i+1})_s \to (F_{i+2})_s \to 0$$

est exacte, ainsi, si Q désigne le noyau de $t_{i+1} - j_{i+1}$, alors Q_s contient $\sigma^*(F_i)_s$ pour tout s. Les faisceaux F_i et F_{i+1} étant localement libres et de type fini (de plus il suffit d'examiner (6) au voisinage de chaque $\infty \times s$) il suit que la suite (6) est exacte.

En ajoutant aux considérations précédentes la relation $F_{i-r\alpha} = F_i(-\infty)$, on voit que le chtouca (5) pour un i fixé determine l'ensemble du faisceau elliptique. Ceci donne l'équivalence de catégorie cherchée.

Le théorème 1.6 est démontré.

1.4. **Les structures de niveau.** Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E})$ un chtouca sur S de rang r, avec ${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}$. Soit $D \subset X$ un sous-schéma fermé, fini, évitant les pôle et zéro de $\underline{\mathcal{E}}$. On pose

$$\mathcal{E}_D = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times S}} \mathcal{O}_{D \times S} \ ,$$

on a un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ provenant de j et t. Soit $\mathrm{pr}_2 : D \times S \to S$ la deuxième projection, alors $(\mathrm{pr}_2)_*\mathcal{E}_D$ est un faisceau localement libre et de dimension finie sur S, il est muni d'un isomorphisme

$$\varphi : (\mathrm{Frob}_S)^*(\mathrm{pr}_2)_*\mathcal{E}_D \xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_2)_*\mathcal{E}_D \tag{7}$$

provenant de l'isomorphisme précédant.

Définition 1.13. ([9]) *Un φ-faisceau sur S est un $\mathcal{O}_S$-module de dimension finie $\mathcal{F}$, localement libre et muni d'un homomorphisme φ : $(\mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$.*

Un faisceau $\mathcal{F}$ sur S possède un endomorphisme venant de Frob_S, plus précisément, on a $(\mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S$, où dans ce produit tensoriel la structure de $\mathcal{O}_S$-module de $\mathcal{O}_S$ est donnée par $(\mathrm{Frob}_S)^\sharp$; d'où le morphisme $(\mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Lorque le faisceau $\mathcal{F}$ est localement libre, on en déduit par $\mathcal{O}_S$-dualité un morphisme

$$\mathrm{Frob} : \mathcal{F}^* \to (\mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F}^* \ . \tag{8}$$

Si $\mathcal{F}$ est un φ-faisceau on pose (où $()^*$ désigne encore la $\mathcal{O}_S$-dualité)

$$\mathcal{G}r(\mathcal{F}) = \ker(\varphi^* - \mathrm{Frob}) \ .$$

Proposition 1.14. *(1) $\mathcal{G}r$ est un foncteur contravariant et exact de la catégorie des φ-faisceaux dans celles des schémas en groupes sur S. Si $\mathcal{F}$ est un φ-faisceau de dimension r alors l'ordre de $\mathcal{G}r(\mathcal{F})$ est q^r.*

(2) Soit $\mathcal{F}$ un φ-faisceau, alors $\mathcal{G}r(\mathcal{F})$ est étale sur S si et seulement si φ est un isomorphisme.

(3) *Soient $\mathcal{F}$ un φ-faisceau et $e : S \to \Omega^1_{\mathcal{G}r(\mathcal{F})/S}$ la section nulle, alors les faisceaux $e^*(\Omega^1_{\mathcal{G}r(\mathcal{F})/S})$ et* $\mathrm{coker}((\mathrm{Frob}_S)_*(\mathcal{F}) \overset{\varphi}{\to} \mathcal{F})$ *sont isomorphes sur S.*

Démonstration. Au moins localement on a $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_S^r$, et $S = \mathrm{Spec}B$, si $(b_{i,j})$ est alors la matrice de $(\mathrm{Frob}_S)_*(\mathcal{F}) \overset{\varphi}{\to} \mathcal{F}$, alors $\mathcal{G}r(\mathcal{F})$ est le sous-schéma

$$\mathcal{G}r(\mathcal{F}) = \mathrm{Spec}\left(B[X_1, \cdots, X_r]/(x_j^q - \sum_{1\le i\le r} b_{i,j}X_i)_{1\le j\le r}\right)$$

$$\overset{\text{notation}}{=} \mathrm{Spec}B[x_1, \cdots, x_r]$$

de $\mathbb{G}^r_{a/B} = \mathrm{Spec}B[X_1, \cdots, X_r]$. Il suit de ceci les assertions (1) et (2). Montrons (3). Soit

$$I = \ker B[x_1, \cdots, x_r] \otimes_B B[x_1, \cdots, x_r] \overset{\text{mult.}}{\to} B[x_1, \cdots, x_r] \ ,$$

$$I = (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i)_{1\le i\le r} \ ,$$

la section nulle e correspond au morphisme $e^\sharp : B[x_1, \cdots, x_r] \to B$ qui envoie les x_i sur 0, donc

$$e^*(\Omega^1_{\mathcal{G}r(\mathcal{F})/S}) = \Omega^1_{B[x_1,\cdots,x_r]/B} \otimes_{B[x_1,\cdots,x_r]} B = \sum_{1\le i\le r} Bdx_i$$

et les dx_i ne sont pas indépendants, ils sont liés par les relations

$$d\left(x_j^q - \sum_{1\le i\le r} b_{i,j}x_i\right) = -\sum_{1\le i\le r} b_{i,j}dx_i \ ;$$

d'autre part le conoyau de φ est le faisceau sur S

$$\mathrm{coker}\varphi = B[X_1, \cdots, X_r]/(\sum_{1\le i\le r} b_{i,j}X_i)_{1\le j\le r} \ ,$$

d'où l'isomorphisme cherché. □

Soient de nouveau le chtouca $\underline{\mathcal{E}}$ précédent, l'application φ de (7) et l'application Frob de (8) pour $(\mathrm{pr}_2)_*\mathcal{E}_D$, on pose

(9) $$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}) = \mathcal{G}r((\mathrm{pr}_2)_*\mathcal{E}_D) = \ker(\varphi^* - \mathrm{Frob}) \ .$$

D'une manière naturelle, $\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}})$ est un $(A_D := H^0(D, \mathcal{O}_D))$-module.

Proposition 1.15. *Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et D un sous schéma fini fermé de X. Soit $\underline{\mathcal{E}}$ un chtouca sur S de rang r et dont le pôle ne rencontre pas D, alors*

(1) *$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}})$ est un schéma en groupe fini d'ordre $q^r|D|$ (où $|D|$ est l'ordre de D),*

(2) *$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}})$ est étale sur S si et seulement si les pôle et zéro de $\underline{\mathcal{E}}$ ne rencontrent pas D,*

(3) *la donnée d'une structure de niveau D sur S équivaut à celle d'un isomorphisme de schémas en groupes compatible avec l'action de $A_D = H^0(D, \mathcal{O}_D)$*

$$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}) \simeq S \times (A_D^*)^r$$

où A_D^* est le dual vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de A_D.

Démonstration. L'assertion (1) résulte directement de la proposition précédente. Montrons (2). Il suffit de le faire lorsque $S = \mathrm{Spec} F$ où F est un corps algébriquement clos, car $\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}})$ est un schéma fini. $\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}) \otimes F$ est un groupe et un $(H^0(D \otimes F, \mathrm{pr}_* \mathcal{E}_D) = H^0(D \otimes F, \mathcal{E}_D \otimes F))$-module. On a

$$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}) \otimes F \subset (\mathcal{E}_D)^* \otimes F$$

(à droite c'est la dualité sur $\mathcal{O}_S = F$), dont on déduit par dualité sur F et en examinant les dimensions

$$H^0(D \otimes F, \mathcal{E}_D \otimes F) = (\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}))^* \otimes F$$

(où cette fois c'est à droite la dualité sur $\mathbb{F}_q$). Puisque à gauche de cette dernière fomule on a un $A_D \otimes F$-module libre de rang r, il suit que $\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}})$ est un A_S-module libre de rang r.

Montrons l'assertion (3). On a localement $(\mathrm{pr}_2)_* \mathcal{E}_D \simeq \mathcal{O}_S \otimes A_D^r$ et l'on a aussi $\mathcal{G}r(\mathcal{O}_S \otimes A_D^r) \simeq S \times (A_D^*)^r$ puisque φ^* est bijectif. □

La proposition suivante termine la démonstration du théorème 1.6.

Proposition 1.16. *Soient $S = \mathrm{Spec} B$ un schéma sur $\mathbb{F}_q$, ϕ un module de Drinfeld de rang r sur S et N un idéal non nul de A ne rencontrant pas la A-caractéristique de S. Soit $\underline{\mathcal{E}}$ le chtouca donné par ϕ. Alors il existe un isomorphisme de schémas en groupes compatible avec l'action de A/N*

$$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}) \simeq S \times ((A/N)^*)^r \ ,$$

où $(\ )^*$ désigne la dualité vectorielle sur $\mathbb{F}_q$.

Démonstration. Soient $M = B\{\tau\}$ et $M_i = \{u \in B\{\tau\}\ ,\ \deg_\tau \leq i\}$. Le B-module M est aussi un A-module, via ϕ, avec les M_i on avu précédemmen comment se construit $\underline{\mathcal{E}}$. Comme le niveau $D = \mathrm{Spec}(A/N)$ ne rencontre pas le pôle de $\underline{\mathcal{E}}$, qui est l'∞, on a

$$\mathcal{E}_D = \widetilde{M}_D = ((A/N) \otimes_A M)\tilde{}$$

et pour les ouverts U de $S = \mathrm{Spec} B$

$$(\mathrm{pr}_2)_* \mathcal{E}_D(U) = ((A/N) \otimes_A M)\tilde{}((\mathrm{pr}_2)^{-1} U) = ((A/N) \otimes_A M)\tilde{}(D \times U)$$

$= ((A/N) \otimes_A M) \otimes_{(A/N)\otimes B} ((A/N) \otimes \mathcal{O}_S(U)) = (A/N) \otimes_A M \otimes_B \mathcal{O}_S(U)$.
L' application φ^* et le Frobenius viennent de la multiplication par τ, donc, où $(\ )^*$ désigne la B-dualité,

$$\mathcal{G}r_D(\underline{\mathcal{E}}) = ((A/N) \otimes_A M)^* \simeq (M/\{\phi_a\ ,\ a \in N\})^*\ ,$$

de plus, on voit facilement que $M = B\{\tau\}$ est engendré sur B par $\phi(A)$ et par les τ^i, où i est compris entre 0 et pgcd-1, où pgcd est le pgcd des $\deg_\tau \phi_a$, $a \in A$, et il est égal à r, le rang de φ, donc, plus précisément

$$M = B\{\tau\} = \phi(A) \left(\oplus_{0 \leq i \leq r-1} B\tau^i\right)\ ,$$

on voit que,

$$M/\{\phi_a\ ,\ a \in N\} \simeq B \otimes (A/N)^r\ ,$$

donc que, où à gauche $(\ )^*$ est la dualité sur B et à droite sur $\mathbb{F}_q$

$$(M/\{\phi_a\ ,\ a \in N\})^* \simeq B \otimes ((A/N)^*)^r\ .$$

□

2. Choutcas, modifications et la correspondance géométrique.

[13] Soient V un K-espace vectoriel de dimension $r > 0$ et $\{e_1, \cdots, e_r\}$ l'une de ses bases. Soit $(M_v)_{v\in|X|}$ une famille telle que M_v soit un $\mathcal{O}_v$-réseau de $V \otimes_K K_v$ et que $M_v = \oplus_{1\leq i \leq r} \mathcal{O}_v e_i$ pour presque tout v (c'est à dire sauf pour un nombre fini de v). Soit E le faisceau sur X ainsi défini : pour tout ouvert affine U de X,

$$E(U) = \{e \in V\ /\ e \in M_v \text{ pour tout } v \in U\}\ ,$$

E est un fibré vectoreil de rang r sur X.

Tous les fibrés vectoriels sur X de rang r peuvent être définis ainsi, si E est un tel fibré on lui associe la famille de ses fibres $(E_v)_{v\in|X|}$ aux points fermés, $V = E_\eta$ est sa fibre au point générique et la base $\{e_1, \cdots, e_r\}$ est celle de $E(U)$, pour un ouvert affine non vide de X.

Soient de nouveau V un K-espace vectoriel de dimension $r > 0$ et $\{e_1, \cdots, e_r\}$ l'une de ses bases. Soit pour $v \in |X|$, $M_v^0 = \oplus_{1\leq i\leq r} \mathcal{O}_v e_i$. Soit $\underline{x} = (x_v)_{v\in|X|} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)$ un adèle de $\mathrm{GL}_r(K)$, alors la famille $(x_v M_v^0)_{v\in|X|}$ définit un fibré vectoriel de rang r sur X ; posons $\mathfrak{K} = \prod_{v\in|X|} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)$, on voit que l'on a une bijection (due à A. Weil)

$$\mathrm{GL}_r(K)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)/\mathfrak{K} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de fibrés} \\ \text{vectoriels de rang } r \text{ sur } X \end{array} \right\}\ .$$

Soient D un diviseur positif sur X et E un fibré vectoriels de rang $r>0$. *Une structure de niveau sur* E est la donnée d'un isomorphisme $E/E(-D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^r/\mathcal{O}_X^r(-D)$. Soit $\mathfrak{K}(D) = \{\underline{k} \in \mathfrak{K} \ / \ \underline{k} \equiv 1 \bmod D\}$, on a la bijection

$$\mathrm{GL}_r(K)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)/\mathfrak{K}(D) \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de fibrés} \\ \text{vectoriels de rang } r \text{ sur } X \\ \text{munis d'une structure de niveau } D \end{array} \right\} .$$

Á partir de maintenant on suppose $r=2$. Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur X. Soit $v \in |X|$, on pose

$$E(v) = E \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_{X,v}/\mathfrak{m}_v) = E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{F}_q(v) : .$$

Un élément $\alpha_v \in \mathbb{P}(E(v)) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q(v))$ peut être vu comme une forme linéaire α_v^* sur $E(v)$, l'une de celles qui ne sont pas nulles sur la droite de $E(v)$ donnant α_v, on verra que le choix de l'une ou de l'autre n'a pas d'importance. Soit $E(\alpha_v)$ le faisceau sur X ainsi défini : soit U un ouvert affine de X alors $E(\alpha_v)(U) = E(U)$ si $v \notin U$ et sinon, $E(\alpha_v)(U) = \{s \in E(U) \ / \ \alpha_v^*(s) = 0\}$. On vérifie facilement qu'à isomorphisme près, $E(\alpha_v)$ ne dépend pas du choix de α_v^*. Donc on a une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \to E(\alpha_v) \to E \to \mathbb{F}_q(v)_X \to 0 ,$$

où $\mathbb{F}_q(v)_X$ est le faisceau dont la seule fibre non nulle est en v et est égale à $\mathbb{F}_q(v)$. On dit que $E(\alpha_v)$ *est une modification inférieure de* E *en* v *(de direction* α_v*)*, ces modifications inférieures sont caractérisées par la suite exacte précédente.

Interprétons cette construction en termes adèliques. Soient $V = Ke_1 \oplus Ke_2$ et pour $v \in |X|$, $M_v^0 = \mathcal{O}_v e_1 \oplus \mathcal{O}_v e_2$. Soient $\underline{x} = (x_v) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ et E le fibré vectoriel de rang 2 associé à la famille $(x_v M_v^0)$. Soit

$$\alpha_v \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v) \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v)$$

(où ϖ_v est une uniformisante en v) et soit $\underline{\alpha_v} = (\alpha_{v,v'})_{v'} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ défini par $\alpha_{v,v} = \alpha_v$ et $\alpha_{v,v'} = 1$ si $v' \neq v$, alors le fibré vectoriel associé à la famille $(x_{v'}\alpha_{v,v'}M_{v'}^0)_{v'}$ est une modification inférieure de E en v, notée encore $E(\alpha_v)$, et elles s'obtiennent toutes ainsi.

On peut aussi définir les modifications supérieures, en $w \in |X|$, en remplaçant dans les lignes précedentes l'adèle α_v par

$$\beta_w \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_w) \begin{pmatrix} \varpi_w^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_w) ,$$

on obtient un faisceau noté $E(\beta_w)$ appelé modification supérieure de E en w. Ces modifications supérieures sont caractérisées par la suite exacte suivante

$$0 \to E \to E(\beta_w) \to \mathbb{F}_q(w)_X \to 0 \ .$$

On peut remarquer que E est une modification supérieure de $E(\alpha_v)$ en v. On peut remarquer aussi que l'on a une identification, où v et w sont des points fermés de X,

$$E(\alpha_v, \beta_w)|_{X-\{v,w\}} = E|_{X-\{v,w\}} \ .$$

Soit D un diviseur positif sur X, si v et w ne sont pas dans le support de D, alors une structure de niveau D sur E en induit une sur $E(\alpha_v)$, $E(\beta_w)$ et $E(\alpha_v, \beta_w)$.

Soient v et w deux points fermés distincts de X et E un fibré vectoriel de rang 2. La donnée d'une *double modification* $E' := E(\alpha_v, \beta_w)$ de E est équivalente à la donnée d'un diagramme de la forme

$$E \xrightarrow{\phi_w} \mathcal{E} \xleftarrow{\phi_v} E'$$

où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X de rang 2 avec $\deg \mathcal{E} = \deg E + 1 = \deg E' + 1$, où le conoyau de ϕ_w est concentré en $\{w\}$, celui de ϕ_v en $\{v\}$. On passe d'une double modification à ce diagramme en posant $\mathcal{E} = E(\beta_w)$, ϕ_w et ϕ_v étant les inclusions. *Donc la donnée d'une double modification revient à celle d'un chtouca sur* $S = \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$.

2.1. **la première construction de Drinfeld.** Les notations et hypothèses sont les mêmes que celles énoncées au début ; la lettre ℓ désigne un nombre premier différent de p. On considère les mesures de Haar sur $\mathbb{A}_K$ et sur $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ qui attribue à $\mathfrak{K}$ et $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{K})$ respectivement la mesure 1 ; de même, si v est un point fermé de X, la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}(2, K_v)$ est normalisée par $\int_{\mathrm{GL}(2,\mathfrak{O}_v)} dg = 1$. Toutes ces mesures seront notées de la même façon.

Définition 2.1. *Une forme automorphe parabolique non ramifiée sur* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ *est la donnée d'une fonction*

$$f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$$

telle que

(1) $f(\gamma \underline{g} \underline{k}) = f(\underline{g})$ *pour tous* $\gamma \in \mathrm{GL}(2, K)$, $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ *et* $\underline{k} \in \mathfrak{K}$ *;*

(2) $\int_{\underline{z} \in K \backslash \mathbb{A}_K} f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) d\underline{z} = 0$ *pour tout* $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$.

Soit $\mathcal{G}_2^0$ *l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations* $\sigma : \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ *ℓ-adiques*, c'est à dire qui sont définies sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ contenue dans $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et qui sont continues pour la topologie de $\mathrm{GL}(2, E)$ venant de celle de $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et pour la topologie de Krull de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$, qui aussi sont

(1) partout non ramifiées (pour toute place v de K et toute place au dessus w de K^{alg}, le sous-groupe de ramification de $\mathrm{Gal}(K_w^{\mathrm{alg}}/K_v)$ est dans le noyau de σ),
(2) géométriquement irréductible (la restriction de σ à $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}K)$ est irréductible).

Soit $\mathcal{A}_2^0$ *l'ensemble des formes automorphes paraboliques non ramifiées, sauf la fonction nulle, qui de plus sont vecteurs propres pour les opérateurs de Hecke.* Expliquons cette dernière condition.

Pour $v \in |X|$ soient

$$M_v^1 = \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \quad \text{et}$$

$$M_v^2 = \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v) \ .$$

Si f est une forme automorphe parabolique non ramifiée soient pour $i = 1, 2$ et pour tout $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$

$$(T_v^i f)(\underline{g}) = \int_{g \in M_v^i} f(\underline{g} h_v) dh_v \tag{10}$$

Pour $i = 1, 2$ *les* T_v^i *sont les opérateurs de Hecke à la place* v. Dire que f est propre pour les opérateurs de Hecke signifie que pour tous i et v il existe $\lambda_{i,v} \in (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ tel que $T_v^i f = \lambda_{i,v} f$.

Théorème 2.2. *(Drinfeld) Pour toute place v soit* Frob_v *un relèvement quelconque dans* $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{alg}}/K_v) \subset \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ *de l'automorphisme de Frobenius. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_2^0$ il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{A}_2^0$, à scalaire de $(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ près, telle que, pour toute place v de K l'on ait*

$$T_v^1(f) = tr(\sigma(\mathrm{Frob}_v))f$$
$$T_v^2(f) = q_v^{-1} \det(\sigma(\mathrm{Frob}_v))f$$

(où q_v est le cardinal du corps des restes de K en v).

Ce théorème est de Drinfeld [6], qui précise que le sens représentations vers fonctions est dans [6] et que l'unicité vient de résultats de [15]. L'énoncé de ce théorème, pour $\mathrm{GL}(n)$, conjectural mais avec beaucoup d'étapes démontrées, a été donné par Laumon dans [21]. Nous allons donner ici une idée de la preuve de Drinfeld de [6], c'est à dire du sens fonctions vers représentations. Celle-ci est appelée par Laumon *la première construction de Drinfeld* et permet de voir comment est apparue l'idée d'une *correspondance géométrique pour* $\mathrm{GL}(n)$*,* $n > 1$, cf [21] et [22], pour $n = 1$, voir [25].

La démonstration occupe le reste de ce paragraphe.

Soit $\mathcal{V}_2$ l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K) \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ telles que

(1) $f(\gamma \underline{g}) = f(\underline{g})$ pour tous $\gamma \in B(K)$ (B est le schéma en groupes des matrices triangulaires supérieures de rang 2) et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(2) $\int_{K\backslash\mathbb{A}_K} f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) d\underline{z} = 0$ pour tout $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(3) $f(\underline{g}\underline{k}) = f(\underline{g})$ pour tous $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ et $\underline{k} \in \mathfrak{K}$.

Soit $\psi : K\backslash\mathbb{A}_K \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ un homomorphisme localement constant (c'est à dire continu), on désigne par $\mathcal{W}_2$ l'espace des fonctions $\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K) \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ telles que

(1) $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) = \psi(\underline{z}) f(\underline{g})$ pour tous $\underline{z} \in \mathbb{A}_K$ et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(2) $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \underline{g}\right) = f(\underline{g})$ pour tous $a \in K^\times$ et $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$,

(3) $\varphi(\underline{g}\underline{k}) = \varphi(\underline{g})$ pour tous $\underline{g} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_K)$ et $\underline{k} \in \mathfrak{K}$.

Lemme 2.3. *Les opérateurs de Hecke* T_v^i*,* $i = 1, 2$ *et* $v \in |X|$*, opèrent sur* $\mathcal{V}_2$ *et* $\mathcal{W}_2$ *; munis de ces opérateurs* $\mathcal{V}_2$ *et* $\mathcal{W}_2$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{V}_2$, alors

$$\phi(\underline{g}) = \int_{K\backslash\mathbb{A}_K} f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) \psi(-\underline{z}) d\underline{z}$$

défini un élément de $\mathcal{W}_2$. L'application réciproque à $\varphi \in \mathcal{W}_2$ associe f donnée par

$$f(\underline{g}) = \sum_{a \in K^\times} \varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right)$$

(le dual de $K\backslash\mathbb{A}_K$ est isomorphe à K). $\square$

Le lemme suivant est une reécriture par Drinfeld d'un résultat de Weil, [28], ch. 6, prop. 6 et commentaires suivant. Nous introduisons d'abord des notations.

Soient $t_1 : \mathrm{Pic}X \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ un homomorphisme et $t_2(v) \in \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ pour tout $v \in |X|$. Soit

$$\mathcal{U} = \left\{ \varphi \in \mathcal{W}_2 \;/\; T_v^i(\varphi) = t_i(v)\varphi \text{ pour tous } i = 1, 2 \text{ et } v \in |X| \right\}.$$

On pose
$$\left(1 - t_1(v)z + q_v t_2(v)z^2\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0} c_v(n)z^n$$
et $c_v(n) = 0$ si $n < 0$. Soit $D = \sum_{v\in|X|} n_v v$ un diviseur sur la courbe X, on définit
$$r(D) = \prod_{v\in|X|} c_v(n_v) \ ,$$
donc $r(D) = 0$ si D n'est pas un divideur positif.

Soit $\underline{h}$ l'adèle tel que $\mathbb{O}\underline{h}$ soit maximal pour la propriété d'être inclus dans $\mathrm{Ker}\psi$, on pose $\delta = -\mathrm{div}\ (\underline{h})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{W}_2$ défini par

(11)
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}\right) = \psi(\underline{z})|\underline{a}/\underline{b}|t_1\left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1} r\left(\mathrm{div}\ (\underline{b}) + \delta - \mathrm{div}\ (\underline{a})\right)$$
pour tous $\underline{z} \in \mathbb{A}_K$ et $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{A}_K^\times$.

Lemme 2.4. *(Weil) L'espace $\mathcal{U}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et est engendré par la fonction φ de (11).*

La fonction $f \in \mathcal{V}_2$ déduite de φ par l'isomorphisme $\mathcal{V}_2 \simeq \mathcal{W}_2$ est caractérisée par

(12)
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b} \end{pmatrix}\right) = |\underline{a}/\underline{b}|t_1\left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1} \times \sum_{\lambda\in K^\times} r\left(\mathrm{div}\ (\lambda)\mathrm{div}\ (\underline{b}) + \delta - \mathrm{div}\ (\underline{a})\right)\psi(\lambda\underline{z})$$
pour tous $\underline{z} \in \mathbb{A}_K$ et $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{A}_K^\times$.

La démonstration du théorème 2.2 consiste donc à prouver que cette dernière fonction f est invariante à gauche sous l'action de $\mathrm{GL}(2, K)$. Nous n'allons pas donner la démonstration, mais plutôt essayer de décrire les idées qu'elle a fait apparaître.

2.1.1. *Adèles, dualité, résidus.* Ce paragraphe est issu du livre de Serre [25], ch. II. Si $D = \sum_{v\in|X|} n_v v$ est un diviseur sur X on pose
$$\mathbb{A}_K(D) = \left\{\underline{a} = (a_v)_v \in \mathbb{A}_K \ / \ \mathrm{val}_v(a_v) + n_v \geq 0 \text{ pour tout } v\right\} ,$$
où val_v désigne la valuation de K_v normalisée par $\mathrm{val}_v(\varpi_v) = 1$.

Lemme 2.5. *On a un isomorphisme canonique*
$$H^1\left(X, \mathcal{O}_X(D)\right) \simeq \mathbb{A}_K/\left(K + \mathbb{A}_K(D)\right) \ ,$$
où au dénominateur du membre de droite la lettre K désigne le plongement diagonal de K dans $\mathbb{A}_K$.

Démonstration. De la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(D) \to \underline{K} \to \underline{K}/\mathcal{O}_X(D) \to 0 \ ,$$

où $\underline{K}$ désigne le faisceau constant de fibre K sur X, on déduit la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0\left(X, \mathcal{O}_X(D)\right) \to K \to \mathbb{A}_K/\mathbb{A}_K(D) \to H^1\left(X, \mathcal{O}_X(D)\right) \to 0 \ ,$$

d'où le résultat cherché. □

Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$ une différentielle $\mathbb{F}_q$-linéaire sur K. Soit v une place de K, on a $K_v = \mathbb{F}_{q_v}((\varpi_v))$, où ϖ est une uniformisante en v que l'on choisit dans K, et l'on voit que $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_{q_v}}(K_v)$, donc que ω s'écrit $\omega = f_v d\varpi_v$;

Définition 2.6. *(1) La valuation de ω en v est* $\mathrm{val}_v(\omega) = \mathrm{val}_v(f_v)$,

(2) écrivons $f_v = \sum_{i>>-\infty} \alpha_i \varpi^i$, alors le résidu de ω en v est $\mathrm{Res}_v(\omega) = \alpha_{-1}$.

Les deux résultats suivants sont importants.

Lemme 2.7. *Les définitions précedentes sont indépendantes du choix de l'uniformisante ϖ_v*

Lemme 2.8. *(Formule des résidus) Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$, alors*

$$\sum_{v \in |X|} \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_q}(\mathrm{Res}_v(\omega)) = 0 \ .$$

La démonstration de ces deux derniers résultats est une conséquence directe de [25], n°11 à 13 du ch. II, il faut simplement remarquer que si $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$ est vu comme un élément de $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}}(K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}})$, on a pour out place v de K

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_q} \mathrm{Res}_v(\omega) = \sum_{w|v} \mathrm{Res}_w(\omega) \tag{13}$$

où dans le membre de droite w décrit les places de $K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ au dessus de v.

Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)$, le diviseur de ω est

$$(\omega) = \sum_{v \in |X|} \mathrm{val}_v(\omega) v \ .$$

Soit D un diviseur sur X, on pose

$$\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K, D) = \left\{\omega \in \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) \ / \ (\omega) \geq D\right\}$$

et l'on note $<\cdot,\cdot>$ l'accouplement

$$\begin{array}{ccccc}\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) & \times & \mathbb{A}_K & \longrightarrow & \mathbb{F}_q \\ (\omega & , & \underline{a}) & \longmapsto & \sum_v \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_q}(\mathrm{Res}_v(\underline{a}\omega))\end{array}$$

Il est facile de vérifier que

(1) $<\omega,\underline{a}>=0$ si $\underline{a}\in K\subset\mathbb{A}_K$,

(2) $<\omega,\underline{a}>=0$ si $\omega\in\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K,D)$ et $\underline{a}\in\mathbb{A}_K(D)$ (cf la formule des résidus),

(3) $<\lambda\omega,\underline{a}>=<\omega,\lambda\underline{a}>$ si $\lambda\in K$.

Ceci permet de définir l'application suivante

$$\begin{array}{cccc}\theta: & \Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{A}_K,\mathbb{F}_q) \\ & \omega & \longmapsto & (\underline{a}\mapsto<\omega,\underline{a}>)\end{array}$$

Proposition 2.9. *Pour tout diviseur D sur X (y compris $D=0$) l'application θ induit un isomorphisme*

$$\theta_D:\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K,D)\xrightarrow{\sim}H^1(X,\mathcal{O}_X(D))^*\ ,$$

où $(\ )^*$ désigne ici la dualité sur $\mathbb{F}_q$.

La démonstration est la même qu'en [25], ch. II, n°9, th. 2, compte tenu de la formeule (13).

2.1.2. *Interprétation géométrique.* L'homomorphisme $\psi:K\backslash\mathbb{A}_K\to(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ peut s'écrire $\psi=\psi_0(<\omega_0,\cdot>)$, où $\psi:\mathbb{F}_q\to(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ est un homomorphisme et où $\omega_0\in\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)-\{0\}$; on a $\delta=\mathrm{div}\ (\omega_0)$. La formule (12) s'écrit

$$f\left(\begin{pmatrix}1&\underline{z}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{a}&0\\0&\underline{b}\end{pmatrix}\right)=|\underline{a}/\underline{b}|t_1\left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1}\ \times$$

$$\sum_{\omega\in\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)-\{0\}}r\left(\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\right)\psi_0(<\omega,\underline{z}>\ ,$$

et l'on a

$$\sum_{\omega\in\Omega^1_{\mathbb{F}_q}(K)-\{0\}}r\left(\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\right)\psi_0(<\omega,\underline{z}>=$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_{(\mathbb{F}^1_q(K)/-\{0\})/\mathbb{F}_q^\times}}r\left(\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\right)\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}\psi_0(<\lambda\omega,\underline{z}>\ ,$$

finalement

$$f\left(\begin{pmatrix}1&\underline{z}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{a}&0\\0&\underline{b}\end{pmatrix}\right)=|\underline{a}/\underline{b}|t_1\left(\mathrm{div}\ (\underline{b})\right)^{-1}\ \times \tag{14}$$

$$\Bigg(q \sum_{\substack{\omega\in\Omega^{\times}_{(\mathbb{F}^1_q(K)/-\{0\})/\mathbb{F}_q} \\ <\omega,\underline{z}>=0}} r\left(\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\right)\ -$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_{(\mathbb{F}^1_q(K)/-\{0\})/\mathbb{F}^{\times}_q}} r\left(\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\right)\Bigg)\ .$$

Soit Fib_2 les classes d'isomorphie des faisceaux localement libres de rang 2 sur la courbe X, on a vu que

$$\mathrm{GL}(2,K)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_K)/\mathfrak{K} \rightleftarrows \mathrm{Fib}_2\ .$$

Soit Drap_2 les classes d'isomorphie des couples (E,L), où E est un faisceau sur X localement libre de rang 2 et L un sous-faisceau inversible maximal (pour l'inclusion).

Lemme 2.10. *Soit B le schéma en groupes des matrices inversibles triangulaires supérieure de rang* 2*. On a*

$$B(K)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_K)/\mathfrak{K} \rightleftarrows \mathrm{Drap}_2$$

par l'application qui à $\begin{pmatrix} 1 & \underline{z} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{a} & 0 \\ 0 & \underline{b}\end{pmatrix}$*,* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *dans* $\mathbb{A}^{\times}_K$*,* $\underline{z}$ *dans* $\mathbb{A}_K$*, associe le couple ainsi construit : le faisceaux inversible L correspond à $\underline{a}$, on note Q celui correspondant à $\underline{b}$, on a*

$$\mathrm{Ext}(Q,L)\simeq H^1(X,Q^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X} L)\simeq \mathbb{A}_K/\left(K+\underline{a}^{-1}\underline{b}\mathbb{O}\right) \tag{15}$$

et le faisceau E est défini par l'extension

$$0\to L\to E\to Q\to 0 \tag{16}$$

correspondant à $\underline{z}$.

Revenons à la formule (14). Pour que $r\left(\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\right)\neq 0$ il faut $\mathrm{div}\ (\omega)+\mathrm{div}\ (b)-\mathrm{div}\ (a)\geq 0$, c'est à dire

$$\omega\in H^0(X,L^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X} Q\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/\mathbb{F}_q})\ .$$

Soit (E,L) un représentant d'un élément de Drap_2, on pose $Q=E/L$ et l'on désigne par $\mathbb{P}(E,L)$ l'espace projectif construit avec le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $H^0(X,L^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X} Q\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/\mathbb{F}_q})$ (c'est à dire l'espace des diviseurs positifs linéairement équivalents à $L^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X} Q\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/\mathbb{F}_q}$). D'autre part, l'élément de $H^1(X,Q^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X} L)$ correspondant dans (15) à l'extension (16) définit par dualité de Serre une forme linéaire sur $H^0(X,L^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X} Q\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/\mathbb{F}_q})$, on note $V(E,L)$ la sous-variété projective de $\mathbb{P}(E,L)$ provenant du noyau de cette forme linéaire.

Les fonction de $\mathcal{V}_2$ grâce au lemme 2.10 deviennent des fonctions sur Drap_2 et la formule (14), par suite la formule (12), devient

$$f(E,L) = q^{\deg L - \deg Q} t_1(Q)\Big(q \sum_{D\in V(E,L)} r(D) - \sum_{D\in \mathbb{P}(E,L)} r(D)\Big) \tag{17}$$

avec $Q = E/L$.

Les opérateurs de Hecke agissent sur les fonctions $f : \mathrm{Drap}_2 \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$, la traduction géométrique est en toute place v de K

$$(T_v^1 f)(E,L) = \sum_{E'} f(E', L\cap E') \quad \text{et} \quad (T_v^2 f) = f(E(-v), L(-v)) \tag{18}$$

où dans la première somme E' décrit l'ensemble des modifications inférieures de E en v. Le problème étudié revient à prouver qu'une fonction $f : \mathrm{Drap}_2 \to \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ vérifiant la formule (17)et propre mour les opérateurs de Hecke (18) est en fait définie sur Fib_2. C'est fait par Drinfeld par un raisonnement long et complexe ([6]).

2.1.3. *Conclusion.* Soit ρ une représentation de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$, $\rho \in \mathcal{G}_2^0$, soit $\mu : \mathrm{Pic} X \to (\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})^\times$ correspondant à $\det\rho$ par la théorie du corps de classe (et la description adèlique de $\mathrm{Pic}X$) et choisissons pour t_1 la fonction sur $\mathrm{Pic}X$, $t_1 = q^{-\det}\mu$. Soit $\mathcal{E}$ le système local correspondant à ρ, si $\varphi : X^m \to Sym^m(X) := X^m/S_m$ est le morphisme canonique, on pose $\mathcal{E}^{(m)} = (\varphi_*(\boxtimes^m \mathcal{E}))^{S_m}$. La variété projective $V(E,L)$ peut être vu comme un schéma sur $\mathbb{F}_q$, l'interprétation de ses éléments comme des diviseurs positifs montre que l'on peut écrire l'inclusion entre schémas sur $\mathbb{F}_q$: $V(E,L) \subset Sym^m(X)$ pour $m = \deg E - \deg L + 2g - 2$, où g est le genre de X. Notons $\mathcal{F}$ la restriction de $\mathcal{E}^{(m)}$ à $V(E,L)$, alors Drinfeld montre ([6], prop. 2.1)

Proposition 2.11. *Soit* $(E,L) \in \mathrm{Drap}_2$ *avec* $\deg E - \deg L > 2g-2$, *soit* $f \in \mathcal{V}_2$ *vu comme une fonction sur* Drap_2, *alors*

$$f(E,L) = q^{1+\deg L}\mu(\det E)^{-1}\mu(L)\sum_j (-1)^j \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}, H^j(V(E,L)\otimes \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}, \mathcal{F}))\ .$$

On est alors très proche d'une interprétation des fonction de $\mathcal{V}_2$ par des faisceaux, ou des complexes de faisceaux, sur le champ des drapeaux de rang 2 sur X, conformément au "dictionnaire fonctions-faisceaux" de Grothendieck et sans que la caractéristique du corps de base joue un rôle particulier. Ce fut fait en tout rang n, pas seulement pour $n = 2$ et en toute caractéristique $p \geq 0$, par Laumon, [21] et [22].

3. Les espaces de modules.

Nous commençons par rappeler deux résultats que l'on peut trouver dans [12] et [24]. On pose $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$, où $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ est un clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$.

Proposition 3.1. *([12] et [24] th.1) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $\overline{X}$. Pour tout schéma S de type fini sur $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ désignons par $\underline{Q}(S)$ l'ensemble des modules cohérents $\mathcal{G}$ sur $\overline{X} \times S$, plats sur S, quotients de*

$$\mathcal{F}_S := (\overline{X} \times S \overset{\mathrm{pr}_1}{\to} \overline{X})^* \mathcal{F}$$

et possédant la propriété suivante : pour tout $s \in S$ le polynôme de Hilbert de $\mathcal{G}|(\overline{X} \times \{s\})$ ($X \times \{s\}$ est une courbe sur le corps résiduel $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}(s)$) est égal à un polynôme fixé P. Alors le foncteur $\underline{Q}$ est représentable par un schéma projectif de type fini sur $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$, noté Q.

Notons $\mathcal{E}$ le module cohérent universel sur $\overline{X} \times Q$. Pour tout $q \in Q$ posons $\overline{X}_q = \overline{X} \times \{q\}$ et $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}|\overline{X}_q$, ce dernier est un quotient de $\mathcal{F}_{\{q\}}$.

Supposons que l'on ait $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\overline{X}}^d$ et que $P = P(T) = h + dT$, donc pour tout $q \in Q$ on a $\chi(\mathcal{E}_q) = h$ et le rang de $\mathcal{E}_q$ quotienté par sa torsion est d. Soit R l'ensemble des points q de Q tels que $\mathcal{E}_q$ soit localement libre (de rang d) et que $H^1(\overline{X}_q, \mathcal{E}_q) = 0$; ainsi, pour $q \in R$, $\dim H^0(\overline{X}_q, \mathcal{E}_q) = h$ et $\deg \mathcal{E}_q = h - d(1-g)$ où g est le genre de $\overline{X}$.

Proposition 3.2. *([24], prop. 2) R est un sous-schéma ouvert et lisse de Q, de dimension $h^2 + d^2(g-1)$.*

Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ et $\mathcal{L}$ un faisceau localement libre de rang n sur $\overline{X} \times S$, soit $\delta(\mathcal{L})$ le maximum des degrés des sous-fibrés de rang 1 de $\mathcal{L}$, alors ce nombre $\delta(\mathcal{L})$ existe. En effet, supposons $n > 1$ et soit $\mathcal{N}$ un sous-fibré de rang 1 de $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L}/\mathcal{N}$ soit sans torsion, on déduit de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{N} \to 0$$

que $\deg \mathcal{N} \leq \dim H^0(\overline{X} \times S, \mathcal{L}) + g - 1$.

Soit D un sous-schéma fermé de $\overline{X}$, $D \neq \emptyset$ et $D \neq \overline{X}$. Soit $\underline{\mathrm{Fib}}_{D,d}^{m,n}$ le foncteur qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie des faisceaux localement libres $\mathcal{L}$ de rang d sur $\overline{X} \times S$, triviaux sur $D \times S$ et tels que, pour tout $s \in S$, $\deg \mathcal{L}_s = n$ et $\delta(\mathcal{L}_s) \leq m$, où $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}|\overline{X} \times \{s\}$.

Si $\sharp(|D|) \geq dm - n + (d+1)g + 1$, si $\mathcal{L}$ est un faisceau localement libre sur $\overline{X}$ tel que $\deg \mathcal{L} = n$ et $\delta(\mathcal{L}) \leq m$, on peut montrer que tout automorphisme de $\mathcal{L}$ qui est l'identité sur $\mathcal{L}|D$ est l'identité sur $\mathcal{L}|\overline{X}$ (voir le lemme 3.4 suivant), ceci conduit au

Corollaire 3.3. *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Fib}}_{D,d}^{m,n}$ *est représentable par un sous-schéma de* R*, ouvert, sous réserve que* $\sharp(|D|) \geq dm - n + (d+1)g + 1$ *; on note* $\mathrm{Fib}_{D,d}^{m,n}$ *ce schéma.*

Lemme 3.4. *Soit* S *un schéma sur* $\mathbb{F}_q$*. Soit* L *un faisceau localement libre de rang* d *sur* $X \times S$ *tel que* $\deg \mathcal{L} = n$ *et* $\delta(\mathcal{L}) \leq m$*, soit* D *un sous-schéma fermé de* X *tel que, vu comme un diviseur, l'on ait* $\deg(|D|) \geq dm - n + (d+1)g + 1$*. Soit* σ *un automorphisme de* $\mathcal{L}$ *qui est l'identité sur* $\mathcal{L}|(D \times S)$*, alors* $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}$*.*

Démonstration. On montre plus simplement le lemme en supposant $\deg(D)$ assez gros et pour $S = \mathrm{Spec} B$ affine. On écrit X_B,D_B et $\mathcal{I}_B$, où $\mathcal{I}$ désigne le faisceau d'idéaux de D, pour $X_B = X \times B$, etc.

On suppose d'abord que B est un corps. Soit $\sigma = \mathrm{Id}_L + \gamma$. On a

$$\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_B}}(L, \mathcal{I}_D L) = H^0\left(X_B, \check{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X_B}} (\mathcal{I}_D L)\right)$$

et si $\deg(D)$ est asssez gros le degré de $\check{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X_B}} (\mathcal{I}_D L)$ est suffisemment petit pour que ce faisceau n'ai pas de section globale autre que 0.

Le cas général suit grâce au lemme 1.11 appliqué au faisceau $\check{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X_B}} (\mathcal{I}_D L)$. □

Maintenant on reproduit exactement les arguments de la proposition 3.2 de [9].

Soit $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}$ le foncteur qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie des chtoucas (à droite) de rang d sur S et munis d'une structure de niveau D.

Soit $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{n}$, resp. $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n}$, le foncteur qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie des chtoucas

$$\underline{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''\right)$$

tels que pour tous $s \in |S|$ l'on ait $\deg \mathcal{E}_s = n$, resp. $\deg \mathcal{E}_s = n$ et $\delta(\mathcal{E}_s) \leq m$ (où $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}|(X \times \{s\})$).

Proposition 3.5. *Si* $\sharp|D| \geq dm - n + (d+1)g + 1$*, le foncteur* $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n}$ *est représentable par un schéma sur* $\mathbb{F}_q$ *lisse, de type fini, quasi-projectif, de dimension relative* $2d - 2$ *sur* $X \times X$*, noté* $\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n}$ *(on a un morphisme naturel de schémas*

$$\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n} \longrightarrow (X - D)^{\times 2}$$

provenant des zéros et des pôles des chtoucas).

Démonstration. On a deux morphismes de foncteurs $\psi_i : \underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n} \to \underline{\mathrm{Fib}}_{D,d}^{m,n}$, $i = 1, 2$, qui au chtouca $\underline{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''\right)$ associe $\psi_1(\underline{\mathcal{E}}) =$

$\mathcal{E}$ et $\psi_2(\underline{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}''$, alors l'image de $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n}$ dans $\underline{\mathrm{Fib}}_{D,d}^{m,n} \times \underline{\mathrm{Fib}}_{D,d}^{m,n}$ par $(\psi_1 \circ \mathrm{Frob}, \psi_2)$ est la diagonale. □

On peut remarquer que $\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n}$ est muni d'une action naturelle de $G_D := \mathrm{GL}(d, H^0(D, \mathcal{O}_D))$.

3.1. **Construction d'un schéma grossier de modules.** On donne une construction du schéma grossier de modules de $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}$.

1° D'abord on fixe $m, n \in \mathbb{Z}$ et l'on montre qu'il existe un schéma grossier de modules pour $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n}$, *pour tout* D. Si D' est un sous-schéma fini de X, $D' \supset D$ et si $\underline{\mathrm{cht}}_{D',d}^{m,n}$ est représentable (i.e. si $|D'|$ est assez gros), le quotient de $\mathrm{cht}_{D',d}^{m,n}$ par

$$G_{D',D} := \ker\Big(\mathrm{GL}(d, H^0(D', \mathcal{O}_{D'})) \to \mathrm{GL}(d, H^0(D, \mathcal{O}_D))\Big)$$

est un schéma grossier de modules pour

$$\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n} \times_{(X-D)^{\times 2}} (X - D')^{\times 2} \ .$$

Soient D_i, $i = 1, 2, 3$, des sous schémas finis de X, tels que $D_i \cap D_j = D$ si $i \neq j$, et tels que les foncteurs $\underline{\mathrm{cht}}_{D_i,d}^{m,n}$ soient représentables. Comme $\bigcup_{i=1,2,3}(X - D_i)^{\times 2} = (X - D)^{\times 2}$, le schéma cherché vient des recollements des $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n} \times_{(X-D)^{\times 2}} (X - D_i)^{\times 2}$.

2° Soit n fixé. Si $m' \geq m$, $\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n}$ est un sous-schéma ouvert de $\mathrm{cht}_{D,d}^{m',n}$, ce qui permet de définir $\mathrm{cht}_{D,d}^{n} = \bigcup_m \mathrm{cht}_{D,d}^{m,n}$.

3° Finalement, le schéma grossier de modules cherché est

$$\mathrm{cht}_{D,d} = \coprod_n \mathrm{cht}_{D,d}^{n} \ .$$

Remarque 3.6. *Dans cette construction du schéma grossier de modules* $\mathrm{cht}_{D,d}$ *on est amené à quotienter un schéma par l'action d'un groupe fini. Ceci montre que les espaces de modules des chtoucas peuvent être décrits par des champs algébriques de Deligne-Mumford, ce qui sera fait dans la partie suivante.*

3.2. **Le schéma** cht_d**.** Soit $\underline{\mathrm{cht}}_d$ le foncteur qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie des chtoucas sur S munis de structures de niveaux. Si D et D' sont des sous-schémas fermés finis de X, $D \subset D'$, on a un morphisme naturel $\underline{\mathrm{cht}}_{D',d} \to \underline{\mathrm{cht}}_{D,d}$, donc le foncteur $\underline{\mathrm{cht}}_d$ admet le schéma grossier de modules

$$\mathrm{cht}_d = \varprojlim_D \mathrm{cht}_{D,d} \ .$$

Le schéma cht_d est muni d'une action de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{O})$ venant de la limite des actions des $\mathrm{GL}(d, H^0(D, \mathcal{O}_D))$, cette action se prolonge à $\mathrm{GL}(d, \mathbb{A}_K)$, cf [9].

Deuxième partie 2. Les champs de chtoucas.

4. Algébricité.

On note (Aff) la catégorie des schémas affines sur $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$, que l'on muni de la topologie étale, c'est à dire de la topologie engendrée par la prétopologie où les familles couvrantes d'un objet U de (Aff) sont les $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i\in I}$ telles que les φ_i soient des morphismes étales de (Aff) (i.e. les φ_i sont des morphismes étales de schémas affines sur $\mathbb{F}_q$) et que $\coprod_{i\in I} \varphi_i : \coprod_{i\in I} U_i \to U$ soit surjectif ; cette dernière formule suggère d'ailleurs que l'on peut supposer les familles couvrantes toutes avec un seul terme.

Soit D un sous-schéma fermé fini de X. Soient U un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $(\mathrm{Cht}_{D,d})_U$ la catégorie dont les objets sont les chtoucas sur U munis de structures de niveau D et les flèches les isomorphismes. On voit facilement que $\mathrm{Cht}_{D,d} : U \mapsto (\mathrm{Cht}_{D,d})_U$ est un champ sur le catégorie (Aff), les changements de base venant de ceux sur les fibrés.

Théorème 4.1. *Le champ* Cht_D^d *est de Deligne-Mumford et localement de type fini.*

Le morphisme diagonal

$$\mathrm{Cht}_D^d \longrightarrow \mathrm{Cht}_D^d times \mathrm{Cht}_D^d$$

est représentable, séparé, de type fini et partout non ramifié.

Le morphisme

$$(0, \infty) : \mathrm{Cht}_D^d \longrightarrow (X - D) \times (X - D)$$

est lisse de dimension relative $2(d - 1)$.

La suite de ce paragraphe consiste à donner une idée de la démonstration, les principaux arguments sont dans [17],prop. 1 p.29, lemme 7 p.37 et 8 p.40, dans [23], th. 4.6.2.1, prop. 4.15 et th. 8.1.

Pour tout objet U de (Aff) soit $(\mathrm{Vect}_D^d)_U$ la catégorie dont les objets sont les faisceaux E sur $X \times U$ localement libres de rang d et munis d'une structure de niveau D, c'est à dire d'un $\mathcal{O}_{X\times U}$-isomorphisme

$$E \otimes_{\mathcal{O}_{X\times U}} \mathcal{O}_{D\times U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{D\times U}^d \ ,$$

les morphismes de cette catégorie étant les isomorphismes compatibles avec les structures de niveaux. Ceci définit un champ sur (Aff), $(\mathrm{Vect}_{D,d})$: $U \mapsto (\mathrm{Vect}_{D,d})_U$.

Lemme 4.2. (Vect_D^d) *est un champ algébrique, localement de type fini et lisse sur* $\mathbb{F}_q$.

Définition 4.3. *Soit* Inj_I^r *le champ qui à tout schéma* $S/\mathbb{F}_q$ *associe le groupoïde des diagrammes* $\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'$ *où*

(1) $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$ *sont des* $\mathcal{O}_{X\times S}$*-modules localement libres de rang* r *et munis de structures de niveau* I *;*

(2) j *est* $\mathcal{O}_{X\times S}$*-linéaire, injectif, de conoyau supporté par le graphe d'un morphisme* $i : S \to X - I$ *de schémas sur* $\mathbb{F}_q$*, de plus* j *est compatible avec les structures de niveau ;*

(3) j *et* $\check{j}$ *ont leurs conoyaux qui sont des* $\mathcal{O}_S$*-modules inversibles.*

Lemme 4.4. *Les deux morphismes de champs, définis pour tout shéma* S *sur* $\mathbb{F}_q$ *par*

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Inj}_I^r)_S & \longrightarrow & (X-I)\times(\mathrm{Vect}_I^r)_S \\ (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') & \longmapsto & (i,\mathcal{E}') \\ (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') & \longmapsto & (i,\mathcal{E}) \end{array}$$

sont représentables, projectifs et lisses, de dimension relative $r-1$ *au dessus de* $(X-I)\times\mathrm{Vect}_I^r$.

Démonstration. On examine d'abord le premier morphisme de champs. Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $i : S \to X - I \subset X$ un morphisme de schémas sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{E}$ un objet de Vect_I^r. Condérons le foncteur qui à tout S-schéma $S' \to S$ associe l'ensemble des suites exctes de $\mathcal{O}_{X\times S'}$-modules

$$0 \to \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'} \to \mathcal{E}' \to Q \to 0 \tag{19}$$

où $\mathcal{E}'$ est localement libre de rang r sur $X\times S'$, où Q est supporté par le graphe de $i' : S' \to S \overset{i}{\to} X$ et est un $\mathcal{O}_{S'}$-module inversible. Nous allons montrer, $\mathcal{E}$ étant fixé, que ce foncteur est grassmannien, donc projectif et représentable.

La suite exacte (19) donne

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(Q,\mathcal{O}_{X\times S'}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}',\mathcal{O}_{X\times S'}) \to$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(Q,\mathcal{O}_{X\times S'}) \to 0$$

qui est exacte, par suite, où $(i',\mathrm{Id}) : S' \to X\times S'$

$$(i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}',\mathcal{O}_{X\times S'}) \to (i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'}) \to$$

$$(i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(Q,\mathcal{O}_{X\times S'}) \to 0$$

qui est aussi exacte. Ainsi à (19) se trouve associé un $\mathcal{O}_{S'}$-module quotient de $(i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})$, localement libre de rang 1.

Inversement soit Q' un $\mathcal{O}_{S'}$-module quotient de $(i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})$, localement libre de rang 1. On a

$$(i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})\simeq$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})\otimes_{\mathcal{O}_{X\times S'}}\mathcal{O}_{S'}\simeq\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})$$

où le morphisme de la première relation $\mathcal{O}_{X\times S'}\to\mathcal{O}_{S'}$ vient de (i',Id), ce morphisme étant aussi un $\mathcal{O}_{S'}$ morphisme surjectif, ce qui explique la deuxième relation. Désignons par Q le $\mathcal{O}_{S'}$-module Q' vu comme un $\mathcal{O}_{X\times S'}$-module, alors le moyau du $\mathcal{O}_{X\times S'}$-morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})\twoheadrightarrow Q$$

définit le $\mathcal{O}_{X\times S'}$-module dual de $\mathcal{E}'$, donc $\mathcal{E}'$.

Par conséquent, $\mathcal{E}$ étant fixé, le foncteur qui à tout S-schéma S' associe l'ensemble des classes d'isomorphisme des suites (19) est isomorphe au foncteur qui à tout S' associe l'ensemble des $\mathcal{O}_{S'}$-modules localement libres de rang 1 quotients de

$$(i',\mathrm{Id})^*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})\simeq\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})$$

Ce dernier foncteur est grassmannien, il est représentable par un morphisme projectif $S_1\to S$, qui est en fait l'espace projectif du fibré $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'},\mathcal{O}_{X\times S'})$. On voit que S_1 est lisse de dimension $r-1$.

Ainsi les fibres, au dessus des $\mathcal{E}$, du premiers foncteurs de l'énoncé sont des espaces projectifs lisses de dimension $r-1$.

Pour le deuxième morphisme de champs. Soient encore S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et S' un S-schéma. cette fois le faisceau $\mathcal{E}'$ sur $X\times S$ est fixé et l'on examine le foncteur qui associe à S' l'ensemble de suites exactes de $\mathcal{O}_{X\times S'}$-modules

$$0\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'}\to Q\to 0\ ,$$

les hypothèses étant semblables aux précédentes. On fait alors un raisonnement voisin du précédent, mais avec par exemple $(i',\mathrm{Id})^*Q$ à la place de $\underline{\mathrm{Hom}}(Q,\cdots)$ et on touve le foncteur qui à S' associe les $\mathcal{O}_{S'}$-quotients de rang 1 de

$$(i',\mathrm{Id})^*\,(\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'})\simeq((i,\mathrm{Id})^*\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S'}\ .$$

$\square$

Définition 4.5. *Soit* $\mathrm{Hecke}_{D,d}$ *le champ qui a tout schéma* U *sur* $\mathbb{F}_q$ *associe le groupoïde* $(\mathrm{Hecke}_{D,d})_U$ *des diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array}$$

où
• $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ *et* $\widetilde{\mathcal{E}}$ *sont des* $\mathcal{O}_{X\times U}$*-modules localement libres de rang* d *et munis de structures de niveau* D*, i.e. de* $\mathcal{O}_{X\times U}$*-isomorphismes*

$$\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times U}}\mathcal{O}_{D\times U}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}^d_{D\times U}\ ,\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_{X\times U}}\mathcal{O}_{D\times U}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}^d_{D\times U}\ ,$$
$$\text{et}\ \ \widetilde{\mathcal{E}}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times U}}\mathcal{O}_{D\times U}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}^d_{D\times U}\ ;$$

• j *et* t *sont des* $\mathcal{O}_{X\times U}$*-morphismes injectifs dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes* $i_\infty : U \to X-D$, $i_0 : U \to X-D$ *;*
• *les conoyaux de* j *et* t *sont des* $\mathcal{O}_U$*-modules inversibles,de même pour les morphismes duaux* $\check{j}$ *et* $\check{t}$ *;*
• j *et* t *sont compatibles avec les stuctures de niveau* D*.*

Il suit de cette définition le diagramme 2-cartésien de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{D,d} & \to & \mathrm{Vect}_{D,d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hecke}_{D,d} & \to & \mathrm{Vect}_{D,d}\times\mathrm{Vect}_{D,d} \end{array}$$

ainsi défini : les deux morphismes horizontaux sont

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array}\right) \longmapsto \mathcal{E}\ \ \text{et}\ \ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array}\right) \longmapsto (\widetilde{\mathcal{E}},\mathcal{E})\ ,$$

les deux morphismes verticaux sont

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array}\right)\ \ \text{et}\ \ \mathcal{E}\longmapsto({}^\tau\mathcal{E},\mathcal{E})\ .$$

Lemme 4.6. *Le morphisme de champs*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hecke}_{D,d} & \longrightarrow & (X-D)\times(X-D)\times\mathrm{Vect}_{D,d} \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \stackrel{j}{\to} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array}\right) & \longmapsto & (i_0,i_\infty,\widetilde{\mathcal{E}}) \end{array}$$

est représentable, projectif, lisse, de dimension relative $2(d-1)$*.*

Démonstration. On a un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{j} & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array} & \mathrm{Hecke}_{D,d} & \longrightarrow & \mathrm{Inj}_D^d & \mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\widetilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{t} \mathcal{E}' & \mathrm{Inj}_D^d & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{D,d} & \mathcal{E}'
\end{array}$$

Le lemme précédent permet de conclure. □

Le but de ces deux lemmes est de pouvoir appliquer la proposition suivante, qui jointe au th. 8.1 de [23] permet de montrer 4.1.

Proposition 4.7. *([17], prop. 1 p.29) Soient Y un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux champs sur Y. Soit*

$$\tau : \mathcal{U} \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{U}$$

le morphisme de champ au dessus du morphisme de Frobenius de Y, ${}^{\tau}\mathcal{U}$ étant obtenu à partir de $\mathcal{U}$ par ce changement de base. Soit encore

$$(\alpha, \beta) : \mathcal{V} \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{U} \times_Y \mathcal{U}$$

un morphisme de champs sur Y.

Considérons le carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{W} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{U} \\
j \downarrow & & \downarrow (\tau, \mathrm{Id}) \\
\mathcal{V} & \xrightarrow{(\alpha,\beta)} & {}^{\tau}\mathcal{U} \times_Y \mathcal{U}
\end{array}$$

où donc $(\tau, \mathrm{Id}) \circ \gamma$ et $(\alpha, \beta) \circ j$ sont isomorphes (pas nécessairement égaux) et où $\mathcal{W}$ est universel pour cette propriété. Supposons que les champs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont algébriques et localement de type fini sur Y, supposons aussi que le morphisme $\alpha : \mathcal{V} \to {}^{\tau}\mathcal{U}$ est représentable. Alors

(1) $\mathcal{W}$ est un champ algébrique localement de type fini sur Y ;

(2) le morphisme diagonal $\Delta : \mathcal{W} \to \mathcal{W} \times_Y \mathcal{W}$ (qui, dû aux hypothèses, est représentable, séparé et de type fini sur Y) est partout non-ramifié (donc quasi-fini) ;

(3) de plus si $\mathcal{U}$ est lisse sur Y et si le morphisme $\alpha : \mathcal{V} \to {}^{\tau}\mathcal{U}$ est lisse de dimension relative n, alors $\mathcal{W}$ est lisse de dimension relative n sur Y.

Démonstration. La 2-catégorie des champs algébriques localement de type fini sur Y est stable sous la formation des produits fibrés, ceci prouve (1).

Montrons (2). Soient un schéma S sur Y et w_1, w_2 deux objets de $\mathcal{W}(S)$ (vus comme des morphismes $S \to \mathcal{W}$). On sait qu'en tant que S-champs sur S on a un isomorphisme

$$S \times_{(w_1,w_2),\mathcal{W}\times_Y \mathcal{W},\Delta} \mathcal{W} \simeq Isom(w_1, w_2) \ ,$$

on a donc à prouver que $Isom(w_1, w_2)$ est non ramifié sur S.

Posons $j(w_i) = v_i$, $\gamma(w_i) = u_i$ $(i = 1, 2)$, l'énoncé donne un carré cartésien d"espaces algébriques sur S

$$\begin{array}{ccc} Isom(w_1, w_2) & \xrightarrow{\gamma} & Isom(u_1, u_2) \\ j\downarrow & & \downarrow(\tau, \mathrm{Id}) \\ Isom(v_1, v_2) & \xrightarrow{(\alpha,\beta)} & Isom({}^\tau u_1, {}^\tau u_2) \times Isom(u_1, u_2) \end{array}$$

Le morphisme suivant est nul

$$(20) \qquad d\tau : \Omega^1_{Isom({}^\tau u_1,{}^\tau u_2)/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Isom(u_1,u_2)} \longrightarrow \Omega^1_{Isom(u_1,u_2)/S} \ .$$

Montrons que que le morphisme

$$(21) \qquad \alpha : Isom(v_1, v_2) \to Isom({}^\tau u_1, {}^\tau u_2)$$

est une immersion fermée. Ce morphisme est en fait

$$S \times_{\mathcal{V}} S \to S \times_{{}^\tau\mathcal{U}} S$$

qui est obtenu par le changement de base $S \times_{\mathcal{V}} S \to \mathcal{V}$ à partir de

$$\mathcal{V} \to \mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U}} \mathcal{V}$$

qui est une immersion localement fermée ; en effet cette propriété est vraie si ce morphisme est entre schémas, ou encore entre champs algébriques, mais $\mathcal{V}$ est algébrique par hypothèse et $\mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U}} \mathcal{V}$ l'est parce que par hypoyhèse $\alpha : \mathcal{V} \to {}^\tau\mathcal{U}$ est représentable : ce dernier morphisme (représentable) donne par changement de base par lui même $\mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U}} \mathcal{V}$, qui est donc un champ algébrique ([23], prop. 4.5).

Il suit de (21) que le morphisme

$$(22) \qquad d\alpha : \Omega^1_{Isom({}^\tau u_1,{}^\tau u_2)/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Isom(v_1,v_2)} \longrightarrow \Omega^1_{Isom(v_1,v_2)/S}$$

est surjectif.

On montre de la même manière que le morphisme

$$(\tau, \mathrm{Id}) : Isom(u_1, u_2) \to Isom({}^\tau u_1, {}^\tau u_2) \times Isom(u_1, u_2)$$

est une immersion fermée, par suite que

$$j : Isom(w_1, w_2) \to Isom(v_1, v_2)$$

est aussi une immersion fermée. Finalement on a que

$$(23) \qquad dj : \Omega^1_{v_1,v_2)/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Isom(w_1,w_2)} \longrightarrow \Omega^1_{Isom(w_1,w_2)/S}$$

est un morphisme surjectif.

Il résulte de (20), (22) et (23) que le morphisme

$$\Omega^1_{{}^\tau u_1, {}^\tau u_2)/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Isom(w_1,w_2)} \longrightarrow \Omega^1_{Isom(w_1,w_2)/S}$$

est nul et surjectif, donc

$$\Omega^1_{Isom(w_1,w_2)/S} = 0 \ ,$$

ce qui démontre le résulat cherché.

Pour (3). Comme $\mathcal{U}$ est un champs algébriques sur Y il possède une présentation $U \to \mathcal{U}$ (donc lisse et surjectif), où U est un schéma sur Y. On a le carré cartésien d'espaces algébriques, déduit de celui de l'énoncé,

$$\begin{array}{ccc} W = \mathcal{W} \times_{\mathcal{U}} U & \xrightarrow{\gamma'} & U \\ j' \downarrow & & \downarrow (\tau, \mathrm{Id}) \\ V = \mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U} \times_Y \mathcal{U}} ({}^\tau U \times_Y U) & \xrightarrow{(\alpha',\beta')} & {}^\tau U \times_Y U \end{array}$$

Le morphisme $W \to \mathcal{W}$ étant lisse et surjectif, si w est un point géométrique de W, avec $u = \gamma'(w)$ et $v = j'(w)$, on a à prouver que que W est lisse sur Y au point w de dimension relative $n + \dim_w(W/\mathcal{W})$, et remarquons que

$$n + \dim_w(W/\mathcal{W}) = n + \dim_u(U/\mathcal{U}) \ .$$

Le morphisme $V \to Y$ s'écrit

$$V = \mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U} \times_Y \mathcal{U}} ({}^\tau U \times_Y U) \to \mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U}} {}^\tau U \to {}^\tau\mathcal{U} \to Y \ ,$$

il est donc lisse au point v de dimension relative sur Y

$$\dim_u(U/\mathcal{U}) + n + \dim_{{}^\tau u}({}^\tau U/Y) \ ,$$

de plus U et ${}^\tau U \times_Y U$ sont lisses sur Y et de dimensions relatives sur Y respectivement en u et $({}^\tau u, u)$

$$\dim_u(U/Y) \quad \text{et} \quad \dim_u(U/Y) + \dim_{{}^\tau u}({}^\tau U/Y) = 2 \dim_u(U/Y) \ .$$

Finalement, on a le carré cartésien suivant d'espaces algébriques lisses sur Y

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\gamma'} & U \\ j' \downarrow & & \downarrow (\tau, \mathrm{Id}) \\ V & \xrightarrow{(\alpha',\beta')} & {}^\tau U \times_Y U \end{array}$$

avec, si w est un point géométrique de W et $u = \gamma'(w)$, $v = j'(w)$, les dimensions relatives sur Y de V en v, de U en u et de ${}^\tau U \times_Y U$ en $({}^\tau u \times_Y u)$ connues. Le point géométrique w s'écrit $\mathrm{Spec} K \to W$ où K est un corps algébriquement clos. Comme on a des espaces algébriques on peut condidérer qu'au voisinage des points w, v, u et y (l'image de w par $W \to Y$) le diagramme précédent est formé de schémas. Soit

$K(y) = K$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_Y$ en y. Soient $A = \mathcal{O}_{V,v} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} K(y)$, $B = \mathcal{O}_{U,u} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} K(y)$ et $C = \mathcal{O}_{{}^\tau U \times_Y U, ({}^\tau u, u)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} K(y)$, ce sont des K-algèbres de type fini et il faut calculer la dimension de Krull de $A \otimes_C B$ connaissant celles de A, C et B. Compte tenu de nos hypothèses cette dimension est $\dim A + \dim B - \dim C$ et ceci est la formule voulue. $\square$

Démonstration du théorème 4.1. Considérons le diagramme 2-cartésien de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{D,d} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{D,d} \\ \downarrow & & \downarrow (\mathrm{Frob}, \mathrm{Id}) \\ \mathrm{Hecke}_{D,d} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{D,d} \times \mathrm{Vect}_{D,d} \\ \downarrow & & \\ (X-D) \times (X-D) & & \end{array}$$

On lui applique la proposition 4.7, ce qui est loisible grâce aux lemmes qui la précédent. Il reste à prouver que $\mathrm{Cht}_{D,d}$ est de Deligne-Mumford ainsi que des propriétés de la diagonale, cela résulte de [23], lemme 4.2 et théorème 8.1.

Remarque 4.8. *L'algébricité du champ* $\mathrm{Cht}_{D,d}$ *peut être déduit des travaux de Drinfeld que nous avons décrit dans le § 3, sur l'existence de schémas de modules. L'argument principal est le suivant (avec les notations précédentes et celles du § 3). Si D est assez gros il existe un morphisme de champs du schéma* $\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n}$ *(ou du foncteur* $\underline{\mathrm{cht}}_{D,d}^{m,n}$ *représenté par ce schéma) vers le champ* $\mathrm{Cht}_{D,d}^{m,n}$ *des chtoucas sur $U \in$* $\mathrm{Ob}(\mathrm{Aff})$

$$\underline{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}''\right)$$

tels que pour tous $s \in U$ l'on ait $\deg \mathcal{E}_s = n$ *et* $\delta(\mathcal{E}_s) \leq m$ *(où $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}|(X \times \{s\})$). Ce morphisme de champs*

$$\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{D,d}^{m,n}$$

consiste à choisir dans une classe d'isomorphisme de chtoucas sur U (à un objet de $\mathrm{cht}_{D,d}^{m,n}(U)$*) l'un d'entre eux et de poser que c'est l'image dans* $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cht}_{D,d}^{m,n})_U$*. Ceci définit bien un morphisme grâce au lemme 3.4, qui permet de rendre ce choix unique à isomorphisme unique près.*

5. Quelques propriétés.

5.1. **Les morphismes de Frobenius.** Si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$ on note Frob ou Frob_S son morphisme de Frobenius, c'est à dire le morphisme $S \to S$ qui est l'identité sur les points de S et qui sur le faisceau structural $\mathcal{O}_S$ est l'élévation à la puissance q. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau sur $X \times S$ on pose ${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{X}$ est un champ sur $\mathbb{F}_q$ on note Frob ou $\mathrm{Frob}_{\mathcal{X}}$ le morphisme qui pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ donne le foncteur

$$\mathcal{X}_S \longrightarrow \mathcal{X}_S \ , \ (s : S \to \mathcal{X}) \longmapsto (s \circ \mathrm{Frob}_S : S \stackrel{\mathrm{Frob}_S}{\to} S \stackrel{s}{\to} \mathcal{X}) \ .$$

Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & j \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \ \begin{array}{ccc} & & \mathcal{E} \\ & t \nearrow & \\ \mathcal{E}' & & \\ & j \searrow & \\ & & {}^\tau\mathcal{E} \end{array} \right)$$

un chtouca à droite (resp. à gauche) de rang r sur S, avec $i_0, i_\infty : S \to X$ pour zéro et pôle. Alors

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{E}' \\ & t \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \\ & {}^\tau j \searrow & \\ & & {}^\tau\mathcal{E}' \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \ \begin{array}{ccc} \mathcal{E}' & & \\ & j \searrow & \\ & & {}^\tau\mathcal{E} \\ & {}^\tau t \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}' & & \end{array} \right)$$

est un chtouca à gauche (resp. à droite) de rang r sur$S$, ses zéro et pôle étant i_0 et $i_\infty \circ \mathrm{Frob}_S = \mathrm{Frob}_X \circ i_\infty$ (resp. $i_0 \circ \mathrm{Frob}_S = \mathrm{Frob}_X \circ i_0$ et i_∞).Cette construction est fonctorielle et permet de définir des morphismes de champs

$$\mathrm{Frob}_\infty : \mathrm{Cht}^r \to {}^r\mathrm{Cht} \ , \ \mathrm{Frob}_0 : {}^r\mathrm{Cht} \to \mathrm{Cht}^r$$

rendant commutatifs les diagrammes de champs

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cht}^r & \stackrel{\mathrm{Frob}_\infty}{\longrightarrow} & {}^r\mathrm{Cht} \\ (0,\infty) \downarrow & & \downarrow (0,\infty) \\ X \times X & \stackrel{\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X}{\longrightarrow} & X \times X \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} {}^r\mathrm{Cht} & \stackrel{\mathrm{Frob}_0}{\longrightarrow} & \mathrm{Cht}^r \\ (0,\infty) \downarrow & & \downarrow (0,\infty) \\ X \times X & \stackrel{\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X}{\longrightarrow} & X \times X \end{array}$$

de plus $\mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty$ et $\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0$ sont repectivement égaux aux morphismes Frob de ${}^r\mathrm{Cht}$ et Cht^r.

Pour tout sous-schéma fermé fini $I \subset X$, les morphismes Frob_0 et Frob_∞ se relèvent à Cht_I^r et ${}_I^r\mathrm{Cht}$, c'est à dire aux champs de chtoucas munis de structures de niveau I.

Soit Λ le schéma sur $\mathbb{F}_q$ qui est la limite projective de tous les ouverts qui sont complémentaires de $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X)^n(\Delta_X)$ et de $(\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X)^n(\Delta_X)$, $n \in \mathbb{N}$, alors Frob_∞ et Frob_0 deviennent au dessus de Λ des endomorphismes de Cht^r (d'ailleurs les champs Cht^r et ${}^r\mathrm{Cht}$ coïncident au dessus de $(X \times X) - \Delta_X$).

Si $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est un chtouca à droite sur S, par dualité, c'est à dire application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X\times S}}(;\mathcal{O}_{X\times S})$, on obtientle chtouca à gauche $\underline{\check{\mathcal{E}}} = (\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{E}}', \check{j}, \check{t})$. On a bien évidemment la propiété analogus en échangeant droite et gauche. Ceci est fonctoriel et est ausi dévini pour les chtoucas munis de structures de niveau. Finalement il vient des morphimes de champs

$$* : \mathrm{Cht}_I^r \to {}_I^r\mathrm{Cht} \ , \ * : {}_I^r\mathrm{Cht} \to \mathrm{Cht}_I^r$$

tels que

$$* \circ * = \mathrm{Id} \ , \ * \circ \mathrm{Frob}_\infty \circ * = \mathrm{Frob}_0 \ , \ * \circ \mathrm{Frob}_0 \circ * = \mathrm{Frob}_\infty$$

et $*$ est une involution au dessus de $(X \times X) - \Delta_X$.

5.2. **Les opérateurs de Hecke.** Si $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est un chtouca (à droite) de rang r sur S et si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, alors

$$\underline{\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}} = (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}', \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} j, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} t)$$

est de même. De plus si $\underline{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure de niveau I, ainsi que $\mathcal{L}$ (i.e. $\mathcal{L}$ est muni d'un idomorphisme $\mathcal{L}_I \simeq \mathcal{O}_I$), alors $\underline{\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}}$ est muni de la structure deniveau I que l'on devine.

Ceci est fonctoriel et possède un analogue pour les chtoucas à gauche. Si donc I est un sous-schéma fermé fini de X, le groupe $\mathrm{Pic}_I(X)$,des faisceaux inversibles sur X et munis de structures de niveau I, opère sur Cht_I^r (resp. ${}_I^r\mathrm{Cht}$). Si $I \subset J \subset X$ sont deux sous-schémas fermés finis de X, on a un morphisme naturel $\mathrm{Pic}_J(X) \to \mathrm{Pic}_I(X)$ et les actions sont compatibles avec le morphisme de champs $\mathrm{Cht}_J(X) \to \mathrm{Cht}_I(X)$ (resp. les chtoucas à gauche).

Soit $\underline{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ un chtouca (à droite) de rang r sur S muni de la structure (i, i') de niveau I

$$i : \mathcal{O}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I\times S} \ , \ i' : \mathcal{O}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{I\times S} \ ,$$

soit $g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)$ vu comme un élément de $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S)$, alors $(i \circ g, i' \circ g)$ est une autre structure de niveau I sur $\underline{\mathcal{E}}$. Cette construction est fonctorielle et vaut aussi pour les chtoucas à gauche.

Ainsi pour tous sous-schéma fermé fini $I \subset X$ de X on a une action à droite de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)$ sur Cht_I^r (resp. ${}_I^r\mathrm{Cht}$). Pour $J \subset I \subset X$ cette action est compatible au morphisme de champs $\mathrm{Cht}_J(X) \to \mathrm{Cht}_I(X)$ (resp. les chtoucas à gauche).

Soit maintenant un ensemble T fini de points fermés de X. Soit

$$\mathrm{Cht}^{r,T} = \varprojlim_{I\cap T=\emptyset} \mathrm{Cht}_I^r \ , \ {}^r\mathrm{Cht}^T = \varprojlim_{I\cap T=\emptyset} {}_I^r\mathrm{Cht} \ .$$

Les morphismes zéros et pôles induisent des morphismes de même noms

$$(\infty,0) : \mathrm{Cht}^{r,T} \longrightarrow X_{(T)} \times X_{(T)} \subset X \times X$$

(et idem pour les chtoucas à gauche) où

$$X_{(T)} = \mathrm{Spec}\left(\bigcap_{x\in T} \mathcal{O}_{X,x}\right)$$

est le schéma localisé de X le long de T.

Finalement on a prouvé que *le champ* $\mathrm{Cht}^{r,T}$ *(resp.* ${}^{r}\mathrm{Cht}^{T}$*) est muni des actions*

— *du groupe commutatif* $\mathrm{Pic}^T(X) = \varprojlim_{I\cap T=\emptyset} \mathrm{Pic}_I$,

— *à droite de* $\varprojlim_{I\cap T=\emptyset} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)$.

Soient $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles du corps $F = \mathbb{F}_q(X)$ des fonctions rationnelles sur la courbe X, F_x le complété de F pour la valuation correspondant au point fermé x de X, $\mathcal{O}_x$ son anneau de valuation, $\mathbb{O} = \prod_x \mathcal{O}_x$. Soit T un ensemble fini de points fermés de X. On pose

$$\mathbb{A}_T = \prod_{x\in T} F_x \ , \ \mathbb{O}_T = \prod_{x\in T} \mathcal{O}_x \ ,$$

$$\mathbb{A}^T = \mathbb{A}/\mathbb{A}_T \ , \ \mathbb{O}^T = \mathbb{O}/\mathbb{O}_T \ ,$$

$$\mathbb{A}_T^\times = \mathrm{Ker}(\mathbb{A}^\times \to (\mathbb{A}^T)^\times) \ ,$$

$$\mathbb{O}_T^\times = \mathrm{Ker}(\mathbb{O}^\times \to (\mathbb{O}^T)^\times) \ ,$$

$$(F^\times)^T = F^\times \cap \mathbb{O}_T^\times \ .$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Pic}^T(X) = \varprojlim_{I\cap T=\emptyset} \mathrm{Pic}_I \simeq F^\times\backslash\mathbb{A}^\times/\mathbb{O}_T^\times \simeq (F^\times)^T\backslash(\mathbb{A}^T)^\times \ ,$$

$$\varprojlim_{I\cap T=\emptyset} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbb{O}^T) \ .$$

Les groupes $(\mathbb{A}^T)^\times$ et $\mathrm{GL}_r(\mathbb{O}^T)$ s'identifient à des sous-groupes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^T)$ (le premier au centre). Donc, *sur* $\mathrm{Cht}^{r,T}$ *(resp.* ${}^{r}\mathrm{Cht}^{T}$*), on a une action de* $(\mathbb{A}^T)^\times$ *et une action à droite de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{O}^T)$*, qui sont compatibles. Nous allons prolonger ces actions à tout* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^T)$.

Pour ce faire posons

$$\Gamma = \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^T) \cap M_r(\mathbb{O}^T) \ ,$$

$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^T)$ est engendré par Γ et $(\mathbb{A}^T)^\times$, donc il suffit de définir l'action de Γ.

Soient $g \in \Gamma$, $\underline{\mathcal{E}_1} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1, j_1, t_1)$ un objet de $\mathrm{Cht}^{r,T}(S)$ (où S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$), la structure de niveau donne des isomorphismes

$$i_1 : (\mathbb{O}^T)^r_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \ , \ i'_1 : (\mathbb{O}^T)^r_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \ .$$

et $g \in \Gamma$ induit des endomorphismes injectifs sur les parties gauches de ces formules, donc, via i_1 et i'_1, sur les parties droites ; ces derniers endomorphismes sont notés $[g]$ et $[g]'$.

On définit les faisceaux $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$ sur $X \times S$ par les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \\ \gamma \downarrow & & \downarrow [g] \\ \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}'_2 & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \\ \gamma' \downarrow & & \downarrow [g]' \\ \mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \end{array}$$

Montrons que les homomorphismes composés

$$\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \to \mathrm{coker}[g]$$

$$\mathcal{E}'_1 \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \to \mathrm{coker}[g]'$$

sont surjectifs. On n'examine que le premier homomorphisme. En effet, si l'on applique $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T$ il est surjectif, il reste donc à prouver que canoniquement

$$\mathrm{coker}[g] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \simeq \mathrm{coker}[g] \ .$$

Examinons g opérant sur $(\mathbb{O}^T)^r \boxtimes \mathcal{O}_S$, on voit que coker$g$ est de la forme $M \boxtimes \mathcal{O}_S$ oùM est un $\mathbb{O}^T$-modume de torsion, $M \simeq \oplus_{\text{fini}} \mathcal{O}^r_x$, avec $x \notin T$; on a

$$\mathcal{O}^r_x \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T = \mathcal{O}^r_x \ .$$

Ceci prouve les surjections cherchées. Il suit l'exactitude des suites

$$0 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1 \to \mathrm{coker}[g] \to 0$$

$$0 \to \mathcal{E}'_2 \to \mathcal{E}'_1 \to \mathrm{coker}[g]' \to 0$$

et l'on voit que les formations de $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$ commutent aux changements de bases, que $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$ sont localement libres de rang r sur $X \times S$ et $\mathcal{O}_S$-plats (pour la liberté, β induit $\mathcal{E}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \simeq \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T$, etc.).

Maintenant nous définissons les morphismes $j_2 : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}'_2$ et $t_2 : {}^\tau\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}'_2$ afin d'obtenir le chtouca $\underline{\mathcal{E}_2}$ image par g de $\underline{\mathcal{E}_1}$. Comme $\mathcal{E}_2$ s'injecte dans $\mathcal{E}_1$, ils sont induits par j_1 et t_1, cf les suites exactes précédentes qui de fait définissent $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$.

Il reste à définir la stucture de niveau sur $\underline{\mathcal{E}_2}$. Cela se fait par

$$(\mathbb{O}^T)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{i_1} \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \xrightarrow{\beta^{-1}} \mathcal{E}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T$$

$$(\mathbb{O}^T)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{i'_1} \mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T \xrightarrow{\beta'^{-1}} \mathcal{E}'_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{O}^T$$

Ces constructions sont fonctorielles et répondent aux questions posées.

On peut voir que Frob_∞ et Frob_0 commutent avec les actions de $\mathrm{Pic}_I(X)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)$, celle de $*$ via les isoorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}_I(X) & \to & \mathrm{Pic}_I(X) \\ \mathcal{L} & \mapsto & \mathcal{L}^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I) & \to & \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I) \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

et ceci se transmet à l'action de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^T)$.

Remarquons aussi que $\mathrm{Cht}^{r,T}$ et ${}^r\mathrm{Cht}^T$ s'identifient au dessus de

$$X_{(T)} \times X_{(T)} - \Delta_{X_{(T)}}$$

(et rappelons que $X_{(T)} = \mathrm{Spec}\,(\bigcap_{x\in T} \mathcal{O}_{X,x})$ est le schéma localisé de X le long de T).

5.3. **Le morphisme déterminant.** On a le morphisme de schémas $\mathrm{M}_r(\mathcal{O}_X) \overset{\det}{\to} \mathcal{O}_X$ et pour tout sous schéma fermé I de X le morphisme de schémas en groupes $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I) \overset{\det}{\to} \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I)$. Ainsi det induit un morphisme

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I))$$

par

Rappelons que Vect_I^r désigne le champ qui classifie les $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang r et munis d'une structure de niveau I, c'est à dire que pour tout objet S de (Aff), la catégorie $(\mathrm{Vect}_I^r)_S$ a pour objet les faisceaux $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ localement libres de rang r et munis d'une structure de niveau I, c'est à dire d'un isomorphisme $\mathcal{E}_{X\times S} \simeq \mathcal{O}_{X\times S}^r$. On voit que Vect_I^r est le champ classifiant du schéma en groupes sur X

$$G : \mathrm{Ker}\,(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)) \ ,$$

c'est à dire que $\mathrm{Vect}_I^r = B(G/X)$ (G agit trivialement sur X, tout $\mathcal{O}_{X\times S}$-module localement libre $\mathcal{E}$ est trivialisé par un revêtement étale ou fpqc $S' \to S$, S' étant la réunion dijointe des ouverts d'une trivialisation de $\mathcal{E}$).

Il suit le morphisme naturel de champs sur $\mathbb{F}_q$

$$\det : \mathrm{Vect}_I^r \longrightarrow \mathrm{Vect}_I^1 \ ,$$

même que

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t) \longmapsto (\det(\mathcal{E}), \det(\mathcal{E}'), \det(j), \det(t))$$

définit le morphisme de champs

$$\det : \mathrm{Cht}_I^r \longrightarrow \mathrm{Cht}_I^1$$

(et l'on une construction analogue pour les chtoucas à gauche). Ce morphisme commute avec Frob_∞, Frob_0 et $*$, il est compatible avec les actions de $\mathrm{Pic}_I(X)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)$ et $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I)$ via les homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}_I(X) & \to & \mathrm{Pic}_I(X) \\ \mathcal{L} & \mapsto & \mathcal{L}^{\otimes r} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I) & \to & \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I) \\ g & \mapsto & \det(g) \end{array}$$

Ceci s'étend aux ensemble finis T de points fermés de X, on obtient lemorphisme de champs

$$\det : \mathrm{Cht}^{r,T} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{1,T}$$

(avec une construction analogue pour les chtoucas à gauche) et un homorphisme de grouoes

$$\det : \mathrm{GL}_r(\mathbb{O}^T) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{O}^T) \ .$$

5.4. **Les chtoucas triviaux.** Un chtouca $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est trivial lorsque j et t sont des isomorphismes, c'est donc la donnée de $\mathcal{E}$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq {}^\tau\mathcal{E}$.

Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. Un $\mathcal{O}_{Y\times S}$-chtouca trivial $\mathcal{E}$ est la donée d'un $\mathcal{O}_{Y\times S}$-module localement libre, de rang r, muni d'un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq {}^\tau\mathcal{E}$, avec ${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_Y \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}$.

On note Tr^r_Y leur champ sur $\mathbb{F}_q$.

Si I est un sous-cshéma fermé fini de$X$on note $Tr^r_{X,I}$ le champ des chtoucas triviaux de rang r et munis de structures de niveau I, c'est à dire le champ obtenu par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Tr^r_{X,I} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Tr^r_X & \longrightarrow & Tr^r_I \end{array}$$

la flèche horizontale du bas étant le foncteur de restriction $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}_{I\times S}$, la flèche verticale de droite étant $S \mapsto \mathcal{O}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$.

Théorème 5.1. *Soient $Y \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé de X et $r \geq 1$ un entier. Le champ Tr^r_Y s'écrit comme la somme disjointe sur les objets E de $(Tr^r_Y)_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)}$ de champs classifiants sur $\mathbb{F}_q$ des groupes finis* $\mathrm{Aut}(E)$. *Autrement dit*

(1)
$$Tr^r_X = \coprod_E B(\mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q))$$
où E décrit la famille des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang r sur X.

(2) Si $I \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé fini,
$$Tr^r_I = B(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)/\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) \ .$$

Il suit de (1) et (2) que

$$Tr^r_{X,I} = \coprod_E B(\mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q))$$

où E décrit la famille des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang r sur X et munis de structures de niveau I.

Démonstration. Le champ Tr^r_Y s'inscrit dans un carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} Tr^r_Y & \longrightarrow & \mathrm{Vect}^r_Y \\ \downarrow & & \downarrow (\mathrm{Frob}, \mathrm{Id}) \\ \mathrm{Vect}^r_Y & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\mathrm{Id})} & \mathrm{Vect}^r_Y \times \mathrm{Vect}^r_Y \end{array}$$

où Vect^r_Y est le champ classifiant des Y-modules à droite localement libres de rang r, c'est à dire le champ classifiant du schéma en groupes $S \mapsto \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_Y \boxtimes \mathcal{O}_S)$. La proposition 4.7 montre alors que Tr^r_Y est un champ algébrique localement de type fini et étale sur $\mathbb{F}_q$.

Soit E un objet de $(Tr^r_Y)_{\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q}$, alors $B(\mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q)$ est le champ qui au dessus du schéma $S/\mathbb{F}_q$ a pour objets les $\mathcal{O}_S \times \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q = \mathcal{O}_S$-modules sur lesquels agit $\mathrm{Aut}(E)$ et qui, après une extension (étale) de $\mathbb{F}_q$ deviennent de la forme $E \boxtimes \mathcal{O}_S$. Il y a donc un morphisme naturel

$$B(\mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q) \longrightarrow Tr^r_Y\ ,$$

qui au dessus du schéma S s'écrit, entre les objets,

$$M \longmapsto M \boxtimes \mathcal{O}_Y\ ,$$

d'où un morphisme naturel de champs

$$\coprod_E B(\mathrm{Aut}(E)/\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q) \longrightarrow Tr^r_Y$$

où E décrit les objets de $(Tr^r_Y)_{\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q}$.

Il reste à prouver que ce morphisme de champs induit une équivalence entre fibrés au dessus de $\mathrm{Spec}K$, pour tout extension algébriquement close de $\mathbb{F}_q$ (cf la partie sur les points d'un champdans le "Pense-bête"). Le lemme suivant est de Drinfeld.

Lemme 5.2. *Soit Z un schéma sur $\mathbb{F}_q$, projectif, de la forme $Z = \mathrm{Proj}A$, où $A = \oplus_{d\geq 0} a_d$ est une $\mathbb{F}_q$-algèbre graduée telle que $A = A_0[A_1]$ et que A_1 soit un A_0-module de type fini. Soit K une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_q$. Alors on a l'équivalence de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{catégorie des} \\ \textit{faisceaux cohérents} \\ \textit{sur } Z \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{catégorie des faisceaux cohérents} \\ \mathcal{G} \textit{ sur } Z \otimes K, \textit{ munis d'un} \\ \textit{isomorphisme } {}^\tau\mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \\ (\textit{avec } {}^\tau\mathcal{G} = (\mathrm{Id}_Z \times \mathrm{Frob}_K)^*\mathcal{G}) \end{array} \right\} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \mathcal{F} \otimes K \end{array}$$

Démonstration. Avec les notations de l'énoncé, soit $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \otimes_n H^0(Y, \mathcal{F}(n))$, alors ([14], prop. 5.15 p. 119) on a l'isomorphisme de faisceaux $\Gamma_*(\mathcal{F})\tilde{} \simeq \mathcal{F}$. Ceci s'applique aussi $Y \otimes K$ à la place de Y et l'on constate que ce procédé commute avec ${}^\tau(\ )$. Ainsi on définit l'équivalence cherchée par

$$\mathcal{F} \simeq \Gamma_*(\mathcal{F})\tilde{} \longmapsto \Gamma_*(\mathcal{F} \otimes K)\tilde{} ,$$

et il suffit de le faire fibre à fibre, donc d'examiner les fibres des faisceaux $\mathcal{G}$ sur $Y \otimes K$ munis d'un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}$, d'en déduire que ces faisceaux sont de la forme $\mathcal{F} \otimes K$.

Autrement dit on est ramené à $Y = \mathrm{Spec}K$, où les faisceaux cohérents sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies. Ceci est traité par le lemme suivant. □

Lemme 5.3. *Soient K une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_q$, U et V deux K-espaces vectoriels de dimensions finies, $\lambda : U \to V$ une application K-linéaire, $\psi : U \to V$ une application* Frob*-semi-linéaire ($\psi(au) = a^q\psi(u)$ si $a \in K$ et $u \in U$). Soit $U_0 = \ker(\lambda - \psi)$. Alors l'homomorphisme*

$$U_0 \otimes K \to U$$

est
— *injectif si λ est injectif,*
— *bijectif si λ et ψ sont bijectifs.*

Démonstration. Supposons λ injectif. Soit $e_1, \cdots, e_k$ une famille $\mathbb{F}_q$-libre de U_0, montrons qu'elle K libre. Sinon soit $\sum_{1\le i\le k} a_ie_i = 0$ avec $a_i \in K$ et k minimal, donc $a_i \neq 0$ pour tout i. On a

$$0 = \psi(\sum_{1\le i\le k} a_ie_i) = \sum_{1\le i\le k} a_i^q\psi(e_i) = \sum_{1\le i\le k} a_i^q\lambda(e_i) = \lambda(\sum_{1\le i\le k} a_i^q e_i)$$

puisque les e_i sont dans U_0, donc $\sum_{1\le i\le k} a_i^q e_i = 0$. Finalement on obtient

$$a_1^{q-1}\sum_{1\le i\le k} a_ie_i \ - \sum_{1\le i\le k} a_i^q e_i = 0$$

ce qui contredit la minimalité de k, sauf si $a_1^{q-1} = a_i^q$ pour tout i, donc s'il existe $\zeta_i \in \mathbb{F}_q$ tel que $a_i = \zeta_I a_1$, auquel cas il vient la relation contradictoire

$$0 = \sum_{1\le i\le k} a_ie_i = a_1 \sum_{1\le i\le k} zeta_ie_i\ .$$

Supposons λ et ψ bijectifs. Soit $n = \dim_K U = \dim_K V$. Montrons que $\sharp(U_0) = q^n$. Soit $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ une K-base de U telle que $\{\lambda(e_i)\}_{1\le i\le n}$ soit une K-base de V qui trigonalise ψ, on a

$$Mat(\lambda, \{e_i\}, \{\lambda(e_i)\}) = \mathrm{Id}\ ,\ M := Mat(\psi, \{e_i\}, \{\lambda(e_i)\}) \text{ trigonale}$$

et

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & \{\sum_{1\leq i\leq n} a_i e_i \ , \ a_i\in K \ , \ \sum_{1\leq i\leq n} a_i\lambda(e_i)=\sum_{1\leq i\leq n} a_i^q\psi(e_i)\} \\ & \leftrightarrows & \left\{ \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1^q\\ \vdots \\ a_n^q\end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

d'où, si $M=(\alpha_{i,j})$, avec $\alpha_{i,j}=0$ si $i>j$, à résoudre dans K^n le système d'équations, $1\leq i\leq n$,

$$a_i=\sum_{i\leq j\leq n}\alpha_{i,j}a_j^q \ ,$$

on a $a_n=\alpha_{n,n}a_n^q$, dont les solutions sont $\alpha_{n,n}^{1/(1-q)}\mathbb{F}_q$, on a $a_{n-1}=\alpha_{n-1,n-1}a_{n-1}^q+\alpha_{n-1,n-1}a_n^q$ et a_n étant choisi cette équation en a_{n-1} est séparable, donc admet q solutions distinctes, etc. On voit que $\sharp(U_0)=q^n$. □

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.1. □

Proposition 5.4. *Soient $I\hookrightarrow J\hookrightarrow X$ deux sous-schémas fermés finis de la courbe X et $r\geq 1$ un entier. Alors le morphisme canonique de champs au dessus de $(X-J)\times(X-J)$*

$$\mathrm{Cht}_J^r\longrightarrow \mathrm{Cht}_I^r$$

est représentable, étale, galoisien fini avec pour groupe de Galois

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_J)\to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)\right) \ .$$

Démonstration. Le carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_J^r & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\mathbb{F}_q \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Cht}^r & \longrightarrow & Tr_J^r = B(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_J)/\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q) \end{array}$$

montre que $\mathrm{Cht}_J^r\to\mathrm{Cht}^r$ est représentable, étale, fini, galoisien de groupe de Galois $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_J)$, de même pour I. □

Corollaire 5.5. *Soient $I\hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini de la courbe X et $r\geq 1$ un entier. Le champ Cht_I^r est réunion filtrante de sous-champs ouverts qui sont des quotients de schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{F}_q$ par l'action de groupes finis.*

Il suit que Cht_I^r est un champ algébrique, au sens de Deligne-Mumford et qu'il est séparé sur $\mathbb{F}_q$.

On sait déjà que Cht_I^r est un champ algébrique, au sens de Deligne-Mumford . La preuve de ce corollaire est donnée dans [17] (cor. 6 p. 45). Avant de la rappeler nous précisons deux points.

Soit Y une courbe (projective, non singulière, géométriquement irréductible) sur un corps k et I un sous-schéma fermé fini de Y. *Soit F un faisceau localement libre sur Y, de rang r_F, muni d'une structure de niveau I. On dit que F est semi-stable (resp. stable) si, pour tout sous-faisceau L de F, $L \neq 0$ et tel que F/L soit sans torsion, on ait (où r_L est le rang de L)*

$$\frac{\deg L}{r_L} + \frac{\dim_k H^0(Y, \mathcal{O}_I)}{r_L} \leq \frac{\deg F}{r_F} + \frac{\dim_k H^0(Y, \mathcal{O}_I)}{r_F} \quad \text{(resp. } <\text{)} .$$

Soit F un faisceau localement libre sur Y, de rang r_F, muni d'une structure de niveau I. Alors il existe I', un sous-schéma fermé de Y, $I' \supset I$ et $\mathrm{supp} I' = \mathrm{supp} I$, tel que F soit stable de niveau I'. Montrons ceci. Soit un sous-faisceau L de F, $L \neq 0$ et tel que F/L soit sans torsion. Notons g le genre de Y et $\mathcal{I}_{I'}$ le faisceau d'idéaux de I'. On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_{I'} L \to \mathcal{I}_{I'} F \to \mathcal{I}_{I'} F/L \to 0 ,$$

(elle est exacte car $\mathcal{I}_{I'} F \cap L = \mathcal{I}_{I'} L$, cela se voit en examinant le rang de $L/(\mathcal{I}_{I'} F \cap L)$). Si $\delta := \dim_k H^0(Y, \mathcal{O}_{I'} >> 1$, $\mathcal{I}_{I'} L$ et $\mathcal{I}_{I'} F$ sont acycliques, d'où $\chi(\mathcal{I}_{I'} L) \geq \chi(\mathcal{I}_{I'} F)$, dont il résulte

$$\frac{\deg L}{r_L} + \frac{\delta}{r_L} \geq \frac{\deg F}{r_F} + \frac{\delta}{r_F} + \left[\frac{r_F - r_L}{r_L}(1-g) - \frac{r_F^2 - r_F r_L - r_F + r_L}{r_L r_F} \delta \right]$$

et l'on voit que la partie entre crochets et négative (pour $\delta >> 1$ si $g = 0$). $\square$

Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$, *on dit qu'un faisceau E sur $X \times S$, localement libre de ranf r et muni d'une strucrure de niveau I, est semi-stable (resp. stable) si pour tout $s \in S$, $E|X \times \mathbb{F}_q(s)$ est semi-stable (resp. stable).*

Démonstration du corollaire. Soit I' un sous-schéma fermé de Y, $I' \supset I$ et $\mathrm{supp} I' = \mathrm{supp} I$, on a les morphismes de champs sur $\mathbb{F}_q$

$$\text{(24)} \qquad \mathrm{Cht}^r_{I'} \to \mathrm{Hecke}^r_{I'} \to (X - I) \times (X - I) \times \mathrm{Vect}^r_{I'} \to \mathrm{Vect}^r_{I'}$$

en partant de la gauche, la première flèche est obtenue par changement de base à partir de

$$\mathrm{Vect}^r_{I'} \stackrel{(\mathrm{Frob}, \mathrm{Id})}{\longrightarrow} \mathrm{Vect}^r_{I'} \times \mathrm{Vect}^r_{I'} ,$$

d'après un résultat précédent le deuxième morphisme est représentable et quasi-projectif, c'est évidemment aussi le cas pour le troisième morphisme.

$\mathrm{Vect}^r_{I'}$ contient le sous-champ ouvert des fibrés stables de niveau I', ce denier est représentable par une réunion disjointe de schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{F}_q$ ([26], quatrième partie, III p. 95), son image réciproque par la composition des morphismes de (24) est donc un sous-champ ouvert de $\mathrm{Cht}^r_{I'}$, représentable par une réunion disjointe de schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{F}_q$. Son quotient par le groupe fini $\mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{I'}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I))$ est un sous-champ ouvert de Cht^r_I, que l'on note $U_{I'}$. Pour I' décrivant le sous-champs fermés de X contenant I et de même support, les $U_{I'}$ constituent une famille filtrante, dont la réunion est le tout puisque tout fibré est stable de niveau I' pour un I' de degré assez grand. $\square$

6. Le champ des choucas itérés.

Nous commençons par construire une complétion des champs de chtoucas sans structures de niveau. La référence principale est ici [18].

Définition 6.1. *Soient $r \geq 1$ un entier et S un schéma sur $\mathbb{F}_q$. On appelle pré-chtouca itéré à droite de rang r sur S la donnée*

— *d'un $\mathcal{O}_{X\times S}$-module $\mathcal{E}$ localement libre de rang r,*

— *d'une modification à droite de $\mathcal{E}$:*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{pmatrix}$$

— *d'$\mathcal{O}_S$-modules inversibles $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1}$ munis de sections globales respectivement $\ell_1 \cdots, \ell_{r-1}$,*

— *pour tout s, $1 \leq s \leq r$, d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X\times S}$-modules localement libres*

$$^{\tau}\left(\bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \left(\otimes_{1\leq t\leq s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\right)\right) \xrightarrow{u_s} \bigwedge^s \mathcal{E}'' \otimes \left(\otimes_{1\leq t\leq s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\right) ,$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\bigwedge^s {}^{\tau}\mathcal{E} \otimes \left(\otimes_{1\leq t\leq s}\mathcal{L}_t^{\otimes(q-1)(s-t)}\right) \xrightarrow{u_s} \bigwedge^s \mathcal{E}'' ,$$

vérifiant les conditions suivantes

(1) *les u_s sont des homomorphismes complets (ceci est expliqué dans le paragraphe suivant),*

(2) *si l'on identifie $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sur l'ouvert de $X \times S$ complémentaire des pôle et zéro de la modification, on a des homomorphismes venant des u_s*

$$^{\tau}\left(\bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \left(\otimes_{1\leq t\leq s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\right)\right) \xrightarrow{u_s} \bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \left(\otimes_{1\leq t\leq s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\right)$$

et l'on demande qu'aucun ne soit nilpotent au dessus de tout point géométrique de S.

Lemme 6.2. *La condition (2) de la définition précédente est équivalente à*
(2)' au dessus de tout point géométrique de S l'homomorphisme u_s de la condition (2) de la définition vérifie : noyau et ^{r}(image) sont en somme directe (autrement dit toutes les puissances de cet homomorphisme ont même rang).

Démonstration. Il est clair que *(2)'* implique *(2)*. Inversement, notons r_1, r_2, ... les t, $1 \leq t \leq r$, tels que $\ell_t = 0$. D'après des propiétés des homomorphismes augmentés que nous alons voir dans le paragraphe suivant, il suffit de vérifier que toutes les puissances de u_1, u_{r_1+1}, u_{r_2+1}, ... sont de rangs r_1, r_2, r_3... et pour cela que u_{r_1}, u_{r_2}, u_{r_3}, ... ne sont pas nilpotents ; c'est l'hypothèse. □

6.1. **Les homomorphismes augmentés.** La propriété *(1)* de la définition 6.1 signifie que pour un (donc pour tous) choix de trivialisation de $\mathcal{L}_1$, ..., $\mathcal{L}_{r-1}$ sur S, de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}''$ sur $X\times S$, la famille $(u_1, \cdots, u_r; \mathcal{L}_1^{q-1}, \cdots, \mathcal{L}_{r-1}^{q-1})$ prens ses valeurs dans le schéma Ω^r que nous définissons maintenant.

Soit $r \geq 1$. Soit H^r le foncteur qui à tout anneau A associe le modules des

$$(u_1, \cdots, u_r; \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}) \in \prod_{1\leq t\leq r} \mathrm{End}_A\left(\bigwedge^t A^r\right) \times A^{r-1} .$$

Ce foncteur est représentable par un fibré vectoriel libre de rang fini sur Spec$\mathbb{Z}$.

Soit $\Omega^r_{(r)}$ le sous-schéma localement fermé de H^r tel que : $u_1 \in \mathrm{Aut}_A(A^r)$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}$ partout inversibles et que $\wedge^2 u_1 = \alpha_1 u_2$, $\wedge^3 u_1 = \alpha_1^2\alpha_2 u_3$, ... , $\wedge^r u_1 = \alpha_1^{r-1}\alpha_2^{r-2}\cdots\alpha_{r-1}u_r$.

On note Ω^r l'adhérence schématique de $\Omega^r_{(r)}$ dans l'ouvet de H^r défini par les conditions $u_t \neq 0$ pour tout t. On vérifie aisémant que Ω^r est plat sur Spec$\mathbb{Z}$, de type fini, de dimension relative r^2+r-1 et que l'on a le morphisme de schémas

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r & \longrightarrow & A^{r-1} \\ (u_1, \cdots, u_r; \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}) & \longmapsto & (\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}) \end{array}$$

Soit $\underline{r} = (r_1 < r_2 < \cdots < r_k)$ une partition de r, avec $r_1 > 0$ et $r_k = r$ (et l'on écrira quelquefois $r_0 = 0$). Soit $\Omega^r_{\underline{r}}$ le sous-schéma localement fermé de Ω^r défini par les relations : α_s est partout nul si $s \in \underline{r}$ et α_s est partout non nul si $s \notin \underline{r}$.

Proposition 6.3. *Soit $\underline{r} = (r_1 < r_2 < \cdots < r_k)$ une partition de r. Alors $\Omega^r_{\underline{r}}$ représenta le foncteur qui à tout anneau A associe l'ensemble des r-uplets*

$$(v_1, \cdots, v_k; \alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1-1}, \alpha_{r_1+1}, \cdots, \alpha_{r_2-1}, \alpha_{r_2+1}, \cdots)$$

tels que

— *les α_s sont partout non nuls,*

— *$v_1 : A^r \to A^r$ est un A-homomorphisme de rang partout égal à r_1,*

— *$v_2 : \mathrm{Ker} v_1 \to A^r/\mathrm{Im} v_1$ est un A-homomorphisme de rang partout égal à $r_2 - r_1$,*

— *$v_3 : \mathrm{Ker} v_2 \to (A^r/\mathrm{Im} v_1)/\mathrm{Im} v_2$ est un A-homomorphisme de rang partout égal à $r_3 - r_2$,*

— *etc.*

Le morphisme $\Omega^r_{\underline{r}} \to \mathbb{G}^k_m$ dont l'image est formée par les α_t est lisse de dimension relative r^2.

Démonstration. Soit V le foncteur qui à tout anneau A associe l'ensemble des $v = (v_1, \cdots, v_k)$ comme donnés dans l'énoncé. Se donner un tel v revient à choisir successivement

— un sous-A-module E_1 de $E_0 = A^r$ tel que E_0/E_1 soit localement libre de rang r_1,

— un homorphisme $\overline{v_1} : E_0/E_1 \to A^r$ partout injectif,

— un sous-A-module E_2 de E_1 tel que E_1/E_2 soit localement libre de rang $r_2 - r_1$,

— un homorphisme $\overline{v_2} : E_1/E_2 \to A^r/\mathrm{Im}\overline{v_1}$ partout injectif,

— etc.

On voit que le foncteur V est représenté par un schéma lisse sur $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ de dimension relative

$$\sum_{1 \le t \le k} ((r_t - r_{t-1})(r - r_t) + (r_t - r_{t-1})(r - r_{t-1})) = r^2 \ .$$

Définissons les morphismes u_s, $1 \le s \le r$: si $r_{i-1} < s \le r_i$

$$u_s = \left(\prod_{\substack{1 \le t < s \\ t \ne r_1, \cdots, r_{i-1}}} \alpha_t^{s-t} \right)^{-1} \det v_1 \otimes \cdots \otimes \det v_{i-1} \otimes \bigwedge^{r - r_{i-1}} v_i$$

où il est sous-entendu que $u_1 = v_1$, où $\det v_1 \otimes \cdots \otimes \det v_{i-1} \otimes \bigwedge^{r-r_{i-1}} v_i$ désigne la composition des applications suivantes

— de l'homomorphisme canonique

$$\bigwedge^s A^r \to \bigwedge^{r_1} (A^r/\mathrm{Ker} v_1) \otimes \bigwedge^{r_2 - r_1} (\mathrm{Ker} v_1/\mathrm{Ker} v_2) \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{s - r_{i-1}} (\mathrm{Ker} v_{i-1}/\mathrm{Ker} v_i)$$

— du produit tensoriel des isomorphismes induits par $v_1, \cdots, v_i$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{r_1} (A^r/\mathrm{Ker}v_1) & \to & \bigwedge^{r_1} \mathrm{Im}v_1 \\ \bigwedge^{r_2-r_1} (\mathrm{Ker}v_1/\mathrm{Ker}v_2) & \to & \bigwedge^{r_2-r_1} \mathrm{Im}v_2 \\ \cdots & & \cdots \\ \bigwedge^{s-r_{i-1}} (\mathrm{Ker}v_{i-1}/\mathrm{Ker}v_i) & \to & \bigwedge^{s-r_{i-1}} \mathrm{Im}v_i \end{array}$$

— de l'homomorphisme injectif canonique

$$\bigwedge^{r_1} \mathrm{Im}v_1 \otimes \bigwedge^{r_2-r_1} \mathrm{Im}v_2 \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{s-r_{i-1}} \mathrm{Im}v_i \longrightarrow \bigwedge^{s} A^r$$

Ceci définit un homomorphisme $V \times \mathbb{G}_m^{r-k} \to H^r$, qui à

$$(v_1, \cdots, v_k; \alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1-1}, \alpha_{r_1+1}, \cdots)$$

associe

$$(u_1, \cdots, u_r; \alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1-1}, 0, \alpha_{r_1+1}, \cdots)$$

Montrons que cet homomorphisme induit un isomorphisme $V \times \mathbb{G}_m^{r-k} \simeq \Omega^r_{\underline{r}}$. Pour ce faire on remarque que les conditions suivantes impliquent ce résultat. Soit un point de H^r à valeur dans un anneau local intègre A (i.e. Spec$A \hookrightarrow H^r$) tel que le point générique de *SpecA* s'envoie dans $\Omega^r_{(r)}$ et que la condition "$u_1, \cdots, u_r$ non nuls, les α_s nuls pour $s \in \underline{r}$, les α_s inversibles pour $s \notin \underline{r}$", définisse un sous-schéma fermé $V(\mathcal{J})$ de Spec$A$, alors

$$\mathrm{Spec}(A/\mathcal{J}) \to \Omega^r_{\underline{r}} \to H^r$$

se factorise de manière unique en

$$\mathrm{Spec}(A/\mathcal{J}) \to V \times \mathbb{G}_m^{r-k} \to H^r$$

et de plus tout point géométrique de $V \times \mathbb{G}_m^{r-k}$ est l'image d'un tel morphisme $\mathrm{Spec}(A/\mathcal{J}) \to V \times \mathbb{G}_m^{r-k}$.

Soit donc $(u_1, \cdots, u_r; \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1})$ un A-point de H^r, pour un anneau A comme au dessus. En son point générique Spec$A$ s'envoie dans $\Omega^r_{(r)}$ et u_1 y est non nul, donc

$$\wedge^s u_1 = \left(\prod_{1 \le t \le s} \alpha_t^{s-t} \right) u_s \quad , \quad 1 \le s \le r \ , \tag{25}$$

sont non nuls au point fermé de Spec$A$. Montrons que pour tout s l'idéal engendré par le mineur d'ordre s de u_1 est principal, de générateur $\prod_{1 \le t \le s} \alpha_t^{s-t}$. Soit $\{e_i\}_{1 \le i \le r}$ la base canonique de A^r, les mineurs d'ordre s de u_1 sont donnés par les coefficients de $\wedge^s u_1(e_{i_1}, \cdots, e_{i_S})$, $i_1 < \cdots < i_s$ et le résultat vient avec (25).

Il ce déduit de ceci que, quitte à composer u_1 à gauche et à droite par deux matrices de $\mathrm{GL}_2(A)$, u_1 est de la forme

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1\alpha_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{r-1} \end{pmatrix}$$

une propriété des invariants de similitude dit que si u_1 s'écrit à équivalence près sous la forme d'une matrice uniligne $(\beta_1, \cdots, \beta_r)$ avec $\beta_i|\beta_{i+1}$, alors $\beta_1 \cdots \beta_s$ est un générateur de l'idéal engendré par les mineurs d'ordre s.

Ceci donne la proposition. □

Corollaire 6.4. $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}) : \Omega^r \to \mathbb{A}^{r-1}$ *est lisse de dimension relative* r^2*.*

6.2. **Retour aux choucas itérés.**

Proposition 6.5. *Le champ $\mathcal{C}^r$ des pré-chtoucas itérés de rang r est algébrique au sens d'Artin et localement de type fini.*

Démonstration. C'est la proposition 5 de [18]. Comme d'habitude on désigne par $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m/\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q]$, ou encore par $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$, le champ ainsi défini : $\mathbb{G}_m$ est vu comme un $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$-espace en groupes, $\mathbb{A}^1$ est vu comme un $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$-espace, $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{A}^1$; soit S une schéma sur $\mathbb{F}_q$, alors la catégorie fibre $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]_S$ a pour objet les (P, α) où P est un $\mathbb{G}_m \times S$-torseur et où $\alpha : P \to \mathbb{A}^1 \times S$ est un morphisme $\mathbb{G}_m \times S$-équivariant.

Cette catégorie se décrit ainsi. Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur S, ℓ l'une de ses sections globales et $\widetilde{\mathcal{L}}$ le faisceau des repères de $\mathcal{L}$, alors $\widetilde{\mathcal{L}}$, vu comme un fauisceau étalé sur S, est un $\mathbb{G}_m \times S$-torseur et la section ℓ donne un morphisme entre les espaces étalés sur S

$$\widetilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L} \xrightarrow{\ell} \mathbb{A}^1 \times S \ .$$

Les $(\mathcal{L}, \ell)$ décrivent les objets de $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]_S$. Le groupoïde $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ est un champ algébrique ([23], (4.6.1)).

Ainsi le groupoïde sur (Aff) des familles de fibrés $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1}$ munis de sections globales est le champ algébrique $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]^{r-1}$.

L'espace de cette démonstration notons Vect^r le champ sur (Aff) tel que pour tout objet S de (Aff) la catégorie fibre $(\mathrm{Vect}^r)_S$ soit celle discrète des faisceaux localement libres de rang r sur $X \times S$. C'est un champ algébrique([23], th. 4.6.2.1) localement de type fini. Notons aussi MVect^r le champ sur (Aff) tel que pour tout objet S de (Aff) la catégorie fibre $(\mathrm{MVect}^r)_S$ soit celle discrète des modifications à droite

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{array} \tag{26}$$

de faisceaux localement libres de rang r sur $X \times S$. C'est un champ algébrique localement de type fini (cf le lemme 4.6, ou sa source [17], lemme 7 § I-2). Soit

$$F : \mathrm{MVect}^r \longrightarrow \mathrm{Vect}^r$$

le morphisme de champ qui au dessus de l'objet S de (Aff) à (26) associe $\mathcal{E}$.

Précisons les fibres de ce dernier morphisme. Soient S un objet de (Aff), vu comme un champ, et s un objet de $(\mathrm{Vect}^r)_S$, c'est à dire $s : S \to \mathrm{Vect}^r$. Si U est un objet de (Aff), la catégorie fibre

$$(S \times_{s,\mathrm{Vect}^r,F} \mathrm{MVect}^r)_U$$

a pour objet les (t, z, f) où t est un objet de $S(U)$ donc un morphisme de schémas $t : U \to S$, où z est u objet de $(\mathrm{MVect}^r)_U$ et où $f : s(t) \to F(z)$ est un morphisme dans Vect^r qui en fait s'écrit $s \circ t = F(z)$. Donc ces objets se ramènent à ceux de $(\mathrm{MVect}^r)_U$ qui s'écrivent comme en (26) avec $\mathcal{E} = t^*\mathcal{E}_1$ où $\mathcal{E}_1$ est un faisceau localement libre de rang r sur $X \times S$.

Explicitons donc la catégorie fibre

$$(S \times_{s,\mathrm{Vect}^r,F} \mathrm{MVect}^r)_S \quad .$$

Le faisceau $\mathcal{E}$ étant donné, de même pour un morphisme $\infty : S \to X$, comment construire $\mathcal{E}'$ contenant $\mathcal{E}$ et tel que

$$(\mathcal{E}'/\mathcal{E})|S := \left(S \overset{\infty\times\mathrm{Id}}{\longrightarrow} X \times S\right)^* (\mathcal{E}'/\mathcal{E})$$

soit localement libre de rang 1 sur S ?

Le faisceau $(\infty \times \mathrm{Id})^*\mathcal{E}$ sur S est localement libre de rang r, il s'écrit localement $\oplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{O}_S e_i$ et par dualité on voit que choisir $\mathcal{E}'$ revient à se donner un hyperplan de $\mathbb{P}^{r-1}$ (ou une droite du dual $\widehat{\mathbb{P}^{r-1}}$). De plus, pour que $\mathcal{E}'$ existe il faut des conditions sur S, que $\mathcal{O}_S$ admette des sous-$\mathcal{O}_S$-modules de corang 1. Ainsi, le morphisme ∞ étant déterminé, le faisceau $\mathcal{E}$ aussi, les choix de $\mathcal{E}'$ forment un espace projectif (éventuelement vide).

Les choix de ∞ forment $X(S)$ et l'on sait que le faisceau $S \mapsto X(S)$ sur (Aff) détermine X.

De même, le morphisme 0 et le faisceau $\mathcal{E}'$ étant déterminés, un choix de $\mathcal{E}''$ est représenté ar un point de $\mathbb{P}^{r-1}$.

La première hypothèse de la définition est localement fermée sur chaque $X \times S$, donc sur chaque S. La deuxième hypothèse est ouverte sur chaque S.

La réunion de tous ces arguments et remarques donnent la proposition. $\square$

Maintenant nous traduisons dans le contexte des pré-chtoucas itérés la proposition 6.3.

Soit $\underline{r}$ une partition de r, $\underline{r} = (r_1, \cdots, r_k)$ avec $0 < r_1 < \cdots < r_k = r$ auquel on ajoute parfois $r_0 = 0$.

— Si $s \in \underline{r}$ on note s^- son prédécesseur dans $\underline{r}^- = (0, r_1, \cdots, r_{k-1})$.

— Si $s \in \underline{r}^-$ on note s^+ son successeur dans $\underline{r}$.

Soit $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ le sous-champ algébrique localement fermé de $\mathcal{C}^r$ défini par les relations (cf définition 6.1)

— si $s \in \underline{r}$, $\ell_s = 0$,

— si $s \notin \underline{r}$, ℓ_s est partout inversible.

Le champ $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ *est dit des pré-chtoucas itérés de type* $\underline{r}$.

Soit donc

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{array} \; ; \; \mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1} \; ; \; \ell_1, \cdots, \ell_{r-1} \; ; \; u_1, \cdots, u_r\right)$$

un objet de $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ au dessus de S. Pour tout $s \notin \underline{r}$ on peut identifier $\mathcal{L}_s, \ell_s$ avec $\mathcal{O}_S, 1$.

L'hypothèse (1) de la définition 6.1 dit que pour un, donc pour tout, choix de trivialisation de $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur S et de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}''$ sur $X \times S$, la famille ($u_1, \cdots, u_r; \ell_1^{q-1}, \cdots, \ell_{r-1}^{q-1}$) est un élément de $\Omega^r(\mathcal{O}_S)$, localement. On définit localement, puis par recollement, avec les notations de la proposition 6.3

$${}^{\tau}\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}}_0 \supset \ker v_1 = \overline{\mathcal{E}}_{r_1} \supset \ker v_2 = \overline{\mathcal{E}}_{r_2} \supset \cdots \supset \overline{\mathcal{E}}_r = (0)$$

et en écrivant $A = \mathcal{O}_{X \times S}(U)$, où U est un ouvert de $X \times S$ sur lequel $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}''$ et les $\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{L}_s$ sont triviaux

$$(0) = \mathcal{E}''_0 \subset \Im v_1 = \mathcal{E}''_{r_1} \subset (A^r \to A^r/\mathrm{Im} v_1)^{-1}(\mathrm{Im} v_2) = \mathcal{E}''_{r_2} \subset$$

$$(A^r \to (A^r/\mathrm{Im} v_1)/\mathrm{Im} v_2) -1 (\mathrm{Im} v_3) = \mathcal{E}''_{r_3} \subset \cdots \subset \mathcal{E}''_r = \mathcal{E}''$$

et l'on définit les autres $\mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}''_s$, $s \notin \underline{r}$, de manière naturelle, en diminuant ou augmentant les dimensions, sachant que les quotient successifs (cf proposition 6.3) vérifient

— si $s \in \underline{r}$, $\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s$ est localement libre de rang $s - s^-$,

— si $s \in \underline{r}$, $\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$ est localement libre de rang $s - s^-$.

Résumons tout ceci

Lemme 6.6. *Soit*

$$\left(\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{array} ; \mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1} \ ; \ \ell_1, \cdots, \ell_{r-1} \ ; \ u_1, \cdots, u_r\right)$$

un objet au dessus de S du champ des chtoucas itérés $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$. La donnée de la famille $u_1, \cdots, u_r$ est équivalentes aux données

— *d'une filtration décroissante*

$$^\tau\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}}_0 \supsetneq \overline{\mathcal{E}}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{\mathcal{E}}_r = (0)$$

par des $\mathcal{O}_{X\times S}$-modules localement libres tels que les quotients $\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s$, $s \in \underline{r}$, soient localement libres de rang $s - s^-$;

— *d'une filtration croissante*

$$(0) = \mathcal{E}''_0 \subsetneq \mathcal{E}''_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}''_r = \mathcal{E}''$$

par des $\mathcal{O}_{X\times S}$-modules localement libres tels que les quotients $\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$, $s \in \underline{r}$, soient localement libres de rang $s - s^-$;

— *d'une famille d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{X\times S}$-modules, pour $s \in \underline{r}$,*

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s \bigotimes {}^\tau\left(\otimes_{0\le t<s}\mathcal{L}_t\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \bigotimes \left(\otimes_{0\le t<s}\mathcal{L}_t\right) \ .$$

Nous définissons maintenant le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$ des chtoucas itérés de type $\underline{r}$ et celui $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ des chtoucas utérés de rang r.

Lemme 6.7. *On utilise les notations de la proposition précédente. Soit $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$ le sous-champ de $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ dont les objets, au dessus d'un schéma S, sont tels que $\left(\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \xrightarrow{j} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{array}\right)$ soit un chtouca et en confondant les morphismes j et t avec des inclusions, tels que de plus*

1. *posant $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$ si $s \in \underline{r}^-$ et $\mathcal{E}'_r = \mathcal{E}''$, les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_s$ sont localement libres sur $X \times S$;*
2. *pour tout $s \in \underline{r}$ l'homomorphisme $\mathcal{E}'_s \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est surjectif, si bien que son noyau, que l'on note $\mathcal{E}_s$, est localement libre sur $x \times S$ (noter que $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}'_s \cap \mathcal{E}$) ;*
3. *on veut aussi que pour tout $s \in \underline{r}$ on ait $\overline{\mathcal{E}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{E}_s = {}^\tau\mathcal{E}$.*

$\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$ s'appelle le champ des chtoucas itérés de type $\underline{r}$.

Il existe un sous-champ unique $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ de $\mathcal{C}^r$ dont la trace sur chaque $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ est $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$; $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ est le champ des chtoucas itérés de rang r.

Démonstration. Il est clair que $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$ est un sous-champ de $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$. d'autre part, toute strate $\mathcal{C}^r_{\underline{r}}$ de $\mathcal{C}^r$ est un ouvert dans $\cup_{\underline{r}'\supset\underline{r}}\mathcal{C}^r_{\underline{r}'}$ et ce dernier est un fermé dans $\mathcal{C}^r$. □

Proposition 6.8. *Soit $\underline{r} = (r_1, \cdots, r_k)$ une partition de r (avec donc $0 < r_1 < \cdots < r_k$). Soit $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ la catégorie fibrée qui à tout schémaS sur $\mathbb{F}_q$ associie le groupoïde des familles constituées*

— *de $\mathbb{O}_S$-modules inversibles $\mathcal{L}_s$, $s = r_1, \cdots, r_{k-1}$,*

— *d'un chtouca à droite*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{r_1} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{r_1} & \to & \mathcal{A}'_{r_1} \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{A}_{r_1} & & \end{array} \right)$$

de rang r_1 au dessus de S et de $k-1$ chtoucas à gauche de rangs respectivement $s - s^-$ pour $s = r_2, \cdots, r_k$, s'écrivant sous la forme

$$\widetilde{\mathcal{A}}_s = \left(\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}_s \bigotimes (\otimes_{t \in \underline{r}, t<s} \mathcal{L}_t) \\ & \nearrow & \\ \mathcal{A}'_s \bigotimes (\otimes_{t \in \underline{r}, t<s} \mathcal{L}_t) & \to & {}^\tau\mathcal{A}_s \bigotimes {}^\tau(\otimes_{t \in \underline{r}, t<s} \mathcal{L}_t) \end{array} \right)$$

— *d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{X\times S}$-modules*

$$\mathcal{A}'_{r_1} / {}^\tau\mathcal{A}_{r_1} \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{A}_{r_2} / \mathcal{A}'_{r_2} \quad et$$

$$\left(\mathcal{A}_s \bigotimes {}^{1-\tau} \left(\otimes_{t \in \underline{r}, t<s} \mathcal{L}_t \right) \right) / \mathcal{A}'_s \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{A}_{s^+} / \mathcal{A}'_{s^+} \ , \ r_1 < s < r_k \ .$$

Alors

(1) *la catégorie fibrée $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ est un champ de Deligne-Mumford séparé et muni d'un morphisme naturel*

$$\mathrm{Cht}^{\underline{r}} \longrightarrow X \times X \times X^{k-1}$$

qui est localement de type fini et lisse de dimension relative $2r - 2k$;

(2) *on a un morphisme naturel (explicité plus bas)*

$$\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{\underline{r}} \tag{27}$$

qui est fini surjectif et radiciel ;

(3) *il existe une constante $\mu \geq 0$ telle que le morphisme (27) devienne une gerbe (dont le groupe de structure est plat, fini et radiciel) au dessus de l'ouvert de $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ défini par les conditions*

$$\mu^-(\widetilde{\mathcal{A}}_s) \geq \mu + \mu^+ - (\widetilde{\mathcal{A}}_{s^+}) \ , \ s \in \underline{r} \ , \ s < r \ ,$$

(si $\mathcal{E}$ est un faisceau localement libre sur une courbe projective et lisse sur un corps , on définit $\mu(\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{E})/rang(\mathcal{E})$, $\mu^+(\mathcal{E})$ est la borne supérieure des $\mu(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ décrit les sous-faisceaux localement libres de $\mathcal{E}$, $\mu^-(\mathcal{E})$ est la borne inférieure des $\mu(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ décrit les quotients localement libres de $\mathcal{E}$, et la formule de l'énoncé doit être vérifiée en tout point fermé de S). En particulier

au dessus de cet ouvert, $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{\tau}}$ *est lisse sur* $X \times X \times X^{k-1}$ *de dimension relative* $2r - 2k$*.*

Démonstration. Description du morphisme (27). Soit

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}'' & & \end{array} ; \mathcal{L}_1, \cdots \mathcal{L}_{r-1} \; ; \; \ell_1, \cdots, \ell_{r-1} \; ; \; u_1, \cdots, u_r \right)$$

un objet de $\left(\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{\tau}}\right)_S$.

On pose $\mathcal{A}_{r_1} = \mathcal{E}_{r_1}$ et $\mathcal{A}'_{r_1} = \mathcal{E}'_{r_1} = \mathcal{E}''_{r_1}$, le composé

$${}^\tau\mathcal{A}_{r_1} \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E} \twoheadrightarrow {}^\tau\mathcal{E}/\overline{\mathcal{E}}_{r_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_{r_1} = \mathcal{A}'_{r_1}$$

permet de définir le chtouca à droite

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{r_1} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{r_1} & \rightarrow & \mathcal{A}'_{r_1} \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{A}_{r_1} & & \end{array} \right)$$

de rang r_1 sur S. De plus on a un isomorphisme canonique $\mathcal{A}'_{r_1}/\mathcal{A}_{r_1} \simeq \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ (cela découle directement des définitions) qui montre que le chtouca $\widetilde{\mathcal{A}}_{r_1}$ a même pôle que la modification $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{array} \right)$.

Pour $s \in \underline{r}$, $s > r_1 = 0^+$, désignons par $\mathcal{A}'_s$ le noyau de l'homomorphisme surjectif $\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \oplus {}^\tau\mathcal{E}_s \rightarrow^\tau \mathcal{E}$ (cf lemme 6.7), donc $\mathcal{A}'_s = \overline{\mathcal{E}}_{s^-} \cap {}^\tau\mathcal{E}_s$. Posons

$$\mathcal{A}_s = \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-} \simeq \mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-}$$

et considérons

(28)

$$\mathcal{A}'_s \bigotimes {}^\tau \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right) \hookrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{s^-} \bigotimes {}^\tau \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right) \rightarrow \left(\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s\right) \bigotimes {}^\tau \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right)$$
$$\rightarrow (\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}_{s^-}) \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right) \rightarrow \mathcal{A}_s \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right) .$$

Expliquons la flèche

$$\left(\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s\right) \bigotimes {}^\tau \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right) \rightarrow (\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}_{s^-}) \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right) .$$

On a

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \hookrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{E}_s = {}^\tau\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{E}''_s$$

la première égélité venant du lemme 6.7, la deuxième de $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}''_s \cap \mathcal{E}$ par définition, d'où le morphisme

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \hookrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{E}''_s \twoheadrightarrow \frac{\overline{\mathcal{E}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{E}''_s}{\overline{\mathcal{E}}_s + {}^\tau\mathcal{E}''_{s^-}}$$

dont le noyau est

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \left(\overline{\mathcal{E}}_s + {}^\tau\mathcal{E}''_{s^-}\right) = \overline{\mathcal{E}}_s + \left(\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \cap {}^\tau\mathcal{E}''_{s^-}\right)$$

et les définitions montrent aisément que le deuxième morceau du membre de droite est nul , d'où le morphisme

$$\frac{\overline{\mathcal{E}}_{s^-}}{\overline{\mathcal{E}}_s} \to \frac{\overline{\mathcal{E}}_{s^-} + {}^\tau\mathcal{E}''_s}{\overline{\mathcal{E}}_s + {}^\tau\mathcal{E}''_{s^-}} \xrightarrow{\sim} \frac{{}^\tau\mathcal{E}''_s}{{}^\tau\mathcal{E}''_{s^-}}$$

la flèche de droite résultant des mêmes arguments que ceux de juste au dessus. Ainsi l'homomorphisme (28) est définie,.

On a aussi l'application

$$\mathcal{A}'_s \hookrightarrow {}^\tau\mathcal{E}_s \to \frac{{}^\tau\mathcal{E}_s}{{}^\tau\mathcal{E}_{s^-}} = {}^\tau\mathcal{A}_s \tag{29}$$

Les deux morphismes (28) et (29) donnent

$$\widetilde{\mathcal{A}}_s = \begin{pmatrix} & & \mathcal{A}_s \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\le t<s}\mathcal{L}_t\right) \\ & \nearrow & \\ \mathcal{A}'_s \bigotimes {}^\tau\left(\otimes_{t\in\underline{r},0\le t<s}\mathcal{L}_t\right) & \to & {}^\tau\mathcal{A}_s \bigotimes {}^\tau\left(\otimes_{t\in\underline{r},0\le t<s}\mathcal{L}_t\right) \end{pmatrix}$$

qui est un chtouca à gauche de rang $s - s^-$. par

Remarquons que *le zéro de $\widetilde{\mathcal{A}}_r$ se confond avec celui de la modification* $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{pmatrix}$. En effet

$$\mathcal{A}_r = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_{r^-}} = \frac{\mathcal{E}'_r}{\mathcal{E}'_{r^-}} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}'_{r^-}} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}''_{r_{k-1}}}$$

$$\mathcal{A}'_r = \overline{\mathcal{E}}_{r^-} \cap {}^\tau\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}}_{r_{k-1}} \cap {}^\tau\mathcal{E}$$

donc

$$\frac{\mathcal{A}_r}{\mathcal{A}'_r} \simeq \frac{\mathcal{E}'}{\overline{\mathcal{E}}_{r_{k-1}} \cap {}^\tau\mathcal{E} + \mathcal{E}''_{r_{k-1}}} = \frac{\mathcal{E}'}{{}^\tau\mathcal{E} + \mathcal{E}''_{r_{k-1}}} = \frac{\mathcal{E}'}{{}^\tau\mathcal{E}}$$

(${}^\tau\mathcal{E} = \mathcal{E}''$ et $\overline{\mathcal{E}}_{r_{k-1}} \subset {}^\tau\mathcal{E}$). Ainsi

$$\frac{\mathcal{A}_r \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\le t<r}\mathcal{L}_t\right)}{\mathcal{A}'_r \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\le t<r}\mathcal{L}_t\right)} \simeq \frac{\mathcal{E}'}{{}^\tau\mathcal{E}} \bigotimes \left(\otimes_{t\in\underline{r},0\le t<r}\mathcal{L}_t\right)$$

d'où il résulte la propriété attendue du zéro de $\widetilde{\mathcal{A}}_r$.

Terminons l'existence du morphisme (27). Soit s tel que $0^+ = r_1 \le s \le r_{k-1} = r^-$. La condition (2) de la définition 6.1 des pré-chtoucas itérés montre que $\overline{\mathcal{E}}_s$ et ${}^\tau\mathcal{E}_s$ sont en somme directe. On a de isomorphismes canoniques

$$\begin{array}{lrcl} & \frac{{}^\tau\mathcal{E}}{\overline{\mathcal{E}}_s+{}^\tau\mathcal{E}_s} & \simeq & \frac{(\overline{\mathcal{E}}_s\oplus{}^\tau\mathcal{E}_{s+})/(\overline{\mathcal{E}}_s\cap{}^\tau\mathcal{E}_{s+})}{\overline{\mathcal{E}}_s+{}^\tau\mathcal{E}_s} \\ & & \simeq & \frac{{}^\tau\mathcal{E}_{s+}/{}^\tau\mathcal{E}_s}{\overline{\mathcal{E}}_s\cap{}^\tau\mathcal{E}_{s+}} \\ & & \simeq & \frac{{}^\tau\mathcal{A}_{s+}}{\mathcal{A}'_{s+}} \\ (30) & \frac{{}^\tau\mathcal{E}}{\overline{\mathcal{E}}_s+{}^\tau\mathcal{E}_s} & \simeq & \frac{(\overline{\mathcal{E}}_{s-}\oplus{}^\tau\mathcal{E}_s)/(\overline{\mathcal{E}}_{s-}\cap{}^\tau\mathcal{E}_s)}{\overline{\mathcal{E}}_s+{}^\tau\mathcal{E}_s} \\ & & \simeq & \frac{\overline{\mathcal{E}}_{s-}/{}^\tau\mathcal{E}_s}{\overline{\mathcal{E}}_{s-}\cap{}^\tau\mathcal{E}_s} \\ & & \simeq & \begin{cases} \frac{\mathcal{A}'_{r_1}}{{}^\tau\mathcal{A}_{r_1}} \quad \text{si} \quad s=r_1 \\ \frac{\mathcal{A}_s\bigotimes{}^{1-\tau}\left(\otimes_{t\in\underline{r},0\leq t<s}\mathcal{L}_t\right)}{\mathcal{A}'_s} \quad \text{si} \quad s>r_1 \end{cases} \end{array}$$

et l'on voit que le zéro de $\widetilde{\mathcal{A}}_s$ se confond avec le pôle de $\widetilde{\mathcal{A}}_{s^+}$.

Venons en à la démonstration proprement dite.

Pour l'assertion (1). Les champs Cht^{r_1} des chtoucas à droite de rang r_1, ${}^{r_i-r_{i-1}}\mathrm{Cht}$ des chtoucas à gauche de rang r_i-r_{i-1}, $i=2,\cdots,k$, sont algébriques au sens de Deligne-Mumford , séparés, localement de rype fini et lisses de dimension relatives $2(r_i-r_{i-1})-2$, $i=1,\cdots,k$ et $r_0=0$ au dessus de $X\times X$, l'image d'un chtouca est $(\infty,0)$ et les isomorphismes des hypothèses de l'énoncé montrent que le zéro de l'un est le pôle de l'autre, ou inversement, d'où le morphisme cherché.

L'assertion (2). Le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}\to\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ est défini au début de cette démonstration, il reste à en préciser les fibres. Soit au dessus d'un schéma S un objet $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ comme défini dans l'énoncé. Comme tous les objets de $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}_S$ ceux de la fibre au dessus de $\widetilde{\mathcal{A}}$ sont les données d'une modification de faisceaux localement libres de rang r sur $X\times S$, de faisceaux inversibles sur S et de filtrations :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{pmatrix} \ ; \ \mathcal{L}_s \ , \ s\in\underline{r}, s<r \ ;$$

$${}^\tau\mathcal{E}=\overline{\mathcal{E}}_0\supsetneqq\cdots\supsetneqq\overline{\mathcal{E}}_s\cdots\supsetneqq\overline{\mathcal{E}}_r=(0)\ ;$$

$$(0)=\mathcal{E}''_0\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}''_s\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}''_r=\mathcal{E}''\ ;$$

$$(0)=\mathcal{E}'_0\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}'_s\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}'_r=\mathcal{E}'\ ;$$

$$(0)=\mathcal{E}_0\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}_s\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}_r=\mathcal{E}\ ;$$

tels que $\mathcal{E}'_s/\mathcal{E}_s\simeq\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ pour tout $s\in\underline{r}$, que $\mathcal{E}'_s=\mathcal{E}''_s$ pour tout $s\in\underline{r}^-$, avec aussi une famille d'isomorphismes

$$(31) \qquad \overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s\bigotimes{}^\tau\left(\otimes_{t\in\underline{r},t<s}\mathcal{L}_t\right)\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}\bigotimes\left(\otimes_{t\in\underline{r},t<s}\mathcal{L}_t\right)\ .$$

Nous commençons par construire ${}^\tau\mathcal{E}$. Posons

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'_{r_1} \oplus \left(\bigoplus_{s\in\underline{r}, r_1<s<r} \left({}^\tau\mathcal{A}_s \oplus \mathcal{A}_s \otimes {}^{1-\tau}\left(\otimes_{t\in\underline{r},t<s}\mathcal{L}_t\right)\right) \oplus {}^\tau\mathcal{A}_r \right)$$

Des pôles et zéros des chtoucas il résulte deux plongements

$$a, a' : \oplus_{s\in\underline{r},r_1<s<r}\mathcal{A}'_s \longrightarrow \mathcal{A}$$

et l'image de $a - a'$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées sont α_s sur ${}^\tau\mathcal{A}_s$ et $-\alpha_s$ sur $\mathcal{A}_s \otimes {}^{1-\tau}\left(\otimes_{t\in\underline{r},t<s}\mathcal{L}_t\right)$, $s \in \underline{r}$ et $r_1 < s < r$, $\alpha_s \in \mathcal{A}'_s$, et 0 partout ailleurs. Donc si l'on note un élément de $\mathcal{A}$ sous la forme

$$\underline{\beta} = \left(\beta'_{r_1}, ({}^\tau\beta_s, \beta_s)_{s\in\underline{r},r_1<s<r}, {}^\tau\beta_r\right)$$

on a

$$\mathrm{Im}(a - a') = \left\{(0, (\alpha_s, -\alpha_s)_{s\in\underline{r},r_1<s<r}, 0) \ / \ \alpha_s \in \mathcal{A}'_s\right\} .$$

Rappelons que par hypothèse il existe des isomorphismes

$$w_{r_1} : \mathcal{A}'_{r_1}/{}^\tau\mathcal{A}_{r_1} \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{A}_{r_2}/\mathcal{A}'_{r_2}$$

et pour $s \in \underline{r}, r_1 < s < r$

$$w_s : \mathcal{A}_s \otimes {}^{1-\tau}\left(\otimes_{t\in\underline{r},t<s}\mathcal{L}_t\right)/\mathcal{A}'_s \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{A}_{s^+}/\mathcal{A}'_{s^+} \ .$$

Soient b et b' les deux morphismes

$$\mathcal{A} \longrightarrow \bigoplus_{s\in\underline{r},s>r_1} {}^\tau\mathcal{A}_{s^+}/\mathcal{A}'_{s^+}$$

ainsi définis :. le morphisme b provient des surjections canoniques, donc

$$b : \underline{\beta} \longmapsto \left(({}^\tau\beta_s)_{s\in\underline{r},r_1<s<r}, {}^\tau\beta_r\right)$$

où l'on a noté pareil ${}^\tau\beta_s$ et son image dans le quotient ${}^\tau\mathcal{A}_s/\mathcal{A}'_s$, $s \in \underline{r}$, $s > r_1$. Pour le morphisme b'

$$b' : \underline{\beta} \longmapsto \left(w_{r_1}(\beta'_{r_1}), (w_s(\beta_s)_{s\in\underline{r},r_1<s<r}\right)$$

ou l'on confond encore β'_{r_1}, β_s et leurs images dans les quotients. Un élément $\underline{\beta}$ de $\mathcal{A}$ est dans $\ker(b - b')$ si et seulement si

$${}^\tau\beta_{r_2} = w_{r_1}(\beta'_{r_1}) \ \text{ et } \ {}^\tau\beta_{s^+} = w_s(\beta_s) \ , \ r_1 < s < r \ ,$$

ainsi on voit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}'_{r_1} \oplus (\oplus_{s\in\underline{r},s>r_1}{}^\tau\mathcal{A}_s) \\ \underline{\beta} & \mapsto & \left(\beta'_{r_1}, ({}^\tau\beta_s)_{s\in\underline{r},r_1<s<r}, {}^\tau\beta_r\right) \end{array}$$

induit un isomorphisme

$$\ker(b - b')/\mathrm{Im}(a - a') \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}'_{r_1} \oplus (\oplus_{s\in\underline{r},s>r_1}{}^\tau\mathcal{A}_s) \ .$$

On pose

$$^{\tau}\mathcal{E} = \ker(b-b')/\mathrm{Im}(a-a') \tag{32}$$

et la formule précédente permet de justifier cette définition. En effet si l'on revient à la construction des chtoucas $\widetilde{\mathcal{A}}.$ à partir de $\underline{\mathcal{E}}$ faite au début de cette démonstration, on a dans cette construction

$$\mathcal{A}'_{r_1} \oplus (\oplus_{s\in\underline{r},s>r_1}{}^{\tau}\mathcal{A}_s) \simeq \mathcal{E}''_{r_1} \oplus \Big(\oplus_{s\in\underline{r},s>r_1}{}^{\tau}(\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-})\Big)$$

et il résulte directement de l' hypothèse (31) que

$$\mathcal{E}''_{r_1} \simeq (\mathcal{E}''_r/\overline{\mathcal{E}}_{r_1}) = ({}^{\tau}\mathcal{E}/\overline{\mathcal{E}}_{r_1})\ ,$$

finalement

$$\mathcal{A}'_{r_1} \oplus (\oplus_{s\in\underline{r},s>r_1}{}^{\tau}\mathcal{A}_s) = ({}^{\tau}\mathcal{E}/\overline{\mathcal{E}}_{r_1}) \oplus \Big(\oplus_{s\in\underline{r},s>r_1}{}^{\tau}(\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-})\Big)\ ,$$

auquel, pour comprendre la définition 32, il faut ajouter la remarque selon laquelle

$${}^{\tau}\mathcal{E}_{r_1} \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E} \twoheadrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}/\overline{\mathcal{E}}_{r_1}$$

est injectif. on peut remarquer aussi que le conoyau de cette application composée est ${}^{\tau}\mathcal{E}/(\overline{\mathcal{E}}_{r_1} + {}^{\tau}\mathcal{E}_{r_1})$ qui en général n'est pas nul, mais est de rang 0. Ici apparait clairement que le morphisme (27) n'est pas un isomorphisme en général.

Donc on a construit ${}^{\tau}\mathcal{E}$. Maintenant on fait de même pour $\mathcal{E}$ et sa filtration $(0) = \mathcal{E}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$ sachant que l'on connait aussi les quotients successifs $\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-} = \mathcal{A}_s$, $s \in \underline{r}$.

Soit Vec_X^{δ} le champ classifiant des fibrés localement libres de rang δ sur la courbe X, $Vec_X^{\underline{r}}$ celui des fibrés localement libres sur X de rang r qui sont munis d'une filtration dont les quotients successifs sont des fibrés localement libres de rangs r_1, $r_2 - r_1$, ... , $r_k - r_{k-1}$. Posons

$$\mathcal{V} = Vec_X^{r_1} \times Vec_X^{r_2-r_1} \times \cdots \times Vec_X^{r_k-r_{k-1}}$$

Construire $\mathcal{E}$ revient à déterminer une fibre du morphisme

$$Vec_X^{\underline{r}} \longrightarrow \mathcal{V} \times_{\mathcal{V}} Vec_X^{\underline{r}}$$

déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Vec_X^{\underline{r}} & \xrightarrow{\text{Frob}} & Vec_X^{\underline{r}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\text{Frob}} & \mathcal{V} \end{array}$$

On voit que c'est un morphisme fini, surjectif, radiciel.

Connaissant $\mathcal{E}$ on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= (\mathcal{E} \oplus \mathcal{A}'_{r_1})/\mathcal{A}_{r_1} \\ \mathcal{E}'' &= \ker\Big(\mathcal{E}' \to \mathcal{A}_r \to (\mathcal{A}_r/\mathcal{A}'_r) \otimes {}^{1-\tau}(\otimes_{t\in\underline{r},t<r}\mathcal{L}_t)\Big) \end{aligned}$$

etc.

Disons quelques mots de l'assertion (3) de l'énoncé. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux faisceaux localement libres sur $X \times S$. Une relation du type

$$\mu(\mathcal{F}_1) \geq \mu + \mu(\mathcal{F}_2)$$

est d'abord définie localement, c'est à dire sur chaque $X \times SpecK$ où $SpecK$ est un point fermé de S, la relation est alors définie par un nombre fini de sections des faisceaux, qui se relèvent sur un ouvert $X \times U$, où U est un voisinage de $SpecK$ dans S. Etc.

Si $\mu^-(\mathcal{A}_s) \geq \mu + \mu^+(\mathcal{A}_{s^+})$ et si μ est assez grand, il n'y a qu'une seule possibilité pour $\mathcal{E}$ muni d'une filtration à quotients successifs les $\mathcal{A}_s$, c'est $\mathcal{E} = \oplus_{s \in \underline{r}} \mathcal{A}_s$. □

6.3. **Troncatures.** Soit $S = \mathrm{Spec} K$ où K est un corps extension de $\mathbb{F}_q$, soient r et $\underline{r}$ comme d'habitude et

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}'' & & \end{array} \quad ; \ \mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1} \quad ; \ \ell_1, \cdots, \ell_{r-1} \quad ; \ u_1, \cdots, u_r \right)$$

un chtouca itéré de type $\underline{r}$ au dessus de S. On peut supposr que $(\mathcal{L}_s, \ell_s) = (\mathcal{O}_S, 1)$ si $s \notin \underline{r}$ et, puisque la base est le spectre d'un corps, que $(\mathcal{L}_s, \ell_s) = (\mathcal{O}_S, 0)$ si $s \in \underline{r}$. Rappelons que l'on dispose des résultats du lemme 6.6, modifiées par le fait, d'après ce qui vient d'êtr dit, que les faisceaux $\mathcal{L}.$ sont triviaux.

Définition 6.9. *Un sous-objet du chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ (itéré de type $\underline{r}$, au dessus de $S = \mathrm{Spec} K$) est un couple $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ formé de deux deux sous-fibrés de même rang de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, tels que le morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ envoie $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ et chaque plongement $\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s \hookrightarrow \mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-}$ envoie $({}^\tau\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-})/({}^\tau\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{E}}_s)$ dans $({}^\tau\mathcal{A} \cap \mathcal{E}'_s)/({}^\tau\mathcal{A} \cap \mathcal{E}'_{s^-})$.*

Ce sous-objet $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ est dir bon s'il existe $a \in \underline{r}$ tel que

$$\mathcal{E}_{a^-} \subsetneq \mathcal{A} \subset \mathcal{E}_a \quad , \quad \mathcal{E}'_{a^-} \subsetneq \mathcal{A} \subset \mathcal{E}'_a \quad .$$

Un bon sous-objet est dit de type 1 si

— *l'on a $a = r_1$,*

— *ou bien si $a > r_1 = 0^+$ et $\deg({}^\tau\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}) < \deg(\mathcal{A}/\mathcal{E}_{a^-})$, c'est à dire si ${}^\tau\mathcal{A} + \overline{\mathcal{E}}_{s^-} = {}^\tau\mathcal{E}$.*

Il est dit de type 2 si $a > r_1$ et $\deg({}^\tau\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{E}}_{s^-}) = deg(\mathcal{A}/\mathcal{E}_{a^-})$, c'est à dire si ${}^\tau\mathcal{A} + \overline{\mathcal{E}}_{s^-} \subsetneq {}^\tau\mathcal{E}$.

Expliquons les relations apparaissant dans cette définition, d'abord pour les formules difinissant les deux types.

On sait que ${}^\tau\mathcal{E}_{a^-}$ et $\overline{\mathcal{E}}_{a^-}$ sont en somme directe et que leur somme est de rang r, donc ${}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{E}_{a^-}+\overline{\mathcal{E}}_{a^-})$ est de torsion, d'autre part on sait (cf les formules (30) que ce quotient est isomorphe au conoyau d'un pôle ou d'un zéro dun chtouca , donc que c'est un fibré de rang 1 sur S, ainsi $\dim_K {}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{E}_{a^-}+\overline{\mathcal{E}}_{a^-}) = 1$.

On a la suite exacte

$$0 \to {}^\tau\mathcal{A} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-} \to {}^\tau\mathcal{E} \to {}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{A}_{a^-} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-}) \to 0$$

dont le terme de droite est de dimension sur K égale à 0 ou à 1. On en déduit

$$\deg {}^\tau\mathcal{E} = \deg {}^\tau\mathcal{A} + \deg \overline{\mathcal{E}}_{a^-} - \deg({}^\tau\mathcal{A}_{a^-} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-}) + \dim_K \left({}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{A}_{a^-} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-})\right) ,$$

qui avec l'hypothèse du type 1 donne

$$\deg {}^\tau\mathcal{E} > \deg \overline{\mathcal{E}}_{a^-} + \deg {}^\tau\mathcal{E}_{a^-} + \dim_K \left({}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{A}_{a^-} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-})\right) ,$$

ainsi $\dim_K \left({}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{A}_{a^-} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-})\right) = 0$.

Avec l'hypothèse du type 2 on trouve au contraire $\dim_K \left({}^\tau\mathcal{E}/({}^\tau\mathcal{A}_{a^-} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-})\right) = 1$.

Maintenant essayons de dire pourquoi avoir choisi dans la définition de comparer $\deg({}^\tau\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{E}}_{a^-})$ et $\deg(\mathcal{A}/\mathcal{E}_{a^-})$. On a une suite exacte (puisque $\overline{\mathcal{E}}_{a^-} \cap {}^\tau\mathcal{E}_{a^-} = 0$)

$$0 \to {}^\tau\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{E}}_{a^-} \to ({}^\tau\mathcal{A}/{}^\tau\mathcal{E}_{a^-}) \times \overline{\mathcal{E}}_{a^-} \to ({}^\tau\mathcal{A} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-})/{}^\tau\mathcal{E}_{a^-} \to 0$$

dont on déduit

$$\deg({}^\tau\mathcal{A} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-}) = \deg({}^\tau\mathcal{A}/{}^\tau\mathcal{E}_{a^-}) + \text{ reste}$$

avec

$$\text{reste } = \deg {}^\tau\mathcal{E}_{a^-} + \deg \overline{\mathcal{E}}_{a^-} - \deg({}^\tau\mathcal{A} + \overline{\mathcal{E}}_{a^-}) = r - a - \deg \mathcal{A} = 0, 1 \ .$$

Rappelons qu'une fonction polygone est définie sur un segment d'entiers, $p : [0, r] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, elle est affine sur chaque $[s-1, s]$, $0 < s \leq r$ et vérifie $p(0) = p(r)$. On supposera ici qu'elle est convexe et ne s'annule qu'en 0 et r.

Le polygone canonique d'Harder-Narasimhan $\overline{p}$ d'un chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ (itéré de type $\underline{r}$, au dessus de $S = \mathrm{Spec}K$) est le plus petit polygone $\overline{p}$ tel que, pour tout sous-objet $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ l'on ait

$$\deg \mathcal{A} - \frac{\mathrm{rg}\mathcal{A}}{r} \deg \mathcal{E} \leq \overline{p}(\mathrm{rg}\mathcal{A}) \ .$$

La fonction polygone p est dite μ-grande, où $\mu \geq 0$ est une constante, si pour tout entier s, $0 < s < r$, on a

$$(p(s) - p(s-1)) - (p(s+1) - p(s)) \geq \mu \ .$$

Proposition 6.10. *Soit $p : [0,r] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction polygone.*

(1) Il existe dans le champ algébrique $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r}}$ des chtoucas itérés de type $\underline{r}$ un unique ouvert $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p}\leq p}}$ tel que tout point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ de $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r}}$, à valeurs dans $S = \mathrm{Spec} K$ où K est un corps extension de $\mathbb{F}_q$, soit dans cet ouvert si et seulement si

(a) pour tout $s \in \underline{r}$

$$p(s) - 1 < \deg \mathcal{E}_s - \frac{s}{r} \deg \mathcal{E} \leq p(s) \ ,$$

(b) pour tout bon sous objet $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$

$$\deg \mathcal{A} - \frac{\mathrm{rg}\mathcal{A}}{r} \deg \mathcal{E} \leq \begin{cases} p(\mathrm{rg}\mathcal{A}) & \text{si } (\mathcal{A}, \mathcal{A}') \text{ est de type 1} \\ p(\mathrm{rg}\mathcal{A}) - 1 & \text{si } (\mathcal{A}, \mathcal{A}') \text{ est de type 2} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X de degré non nul, alors le champ quotient $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p}\leq p}}/\mathcal{L}^{\mathbb{Z}}$ est de type fini au dessus de $X \times X \times X^{k-1}$.

(2) On suppose que la fonction p est 2 grande. Alors il existe dans le champ algébrique $\overline{\mathrm{Cht}^{r}}$ un unique ouvert $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ dont la trace sur chaque strate $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r}}$ soit égale à $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p}\leq p}}$.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X de degré non nul, alors le champ quotient $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p}\leq p}}/\mathcal{L}^{\mathbb{Z}}$ est de type fini au dessus de $X \times X$, il est lisse de dimension relative $2r-2$ si p est assez grand.

Démonstration. La première partie est une conséquence directe des propriétés connues des champs de chtoucas et de la proposition 6.8.

(2). La lissité vient de la proposition 6.8, en fait, compte tenu de la partie *(1)*, il reste à montrer que si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un chtouca itéré de type $\underline{r}$ sur un corps et se spécialisant au dessus d'un corps en un chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{F}}$ de type plus fin vérifiant les propiétés de *(1)*, alors $\widetilde{\mathcal{E}}$ les vérifie aussi. La difficulté est que les bons sous-objets de $\widetilde{\mathcal{E}}$se pécialisent en des sous-objets de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui ne sont pas nécessairement bons, d'où l'utilisation du lemme suivant, qui permet de terminer cette démonstration.

Lemme 6.11. *Soit $p : [0,r] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction polygone 2-grande. Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ un chtouca itéré de type $\underline{r}$ au dessus de $S = \mathrm{Spec} K$, où K est une extension de $\mathbb{F}_q$ et l'on suppose que $\widetilde{\mathcal{E}}$ vérifie l'hypothèse (a)* *de pa partie (1). Alors l'hypothèse (b) est équivalente aux assertions suivantes : pour tout sous-objet* $(\mathcal{A},\mathcal{A}')$ *de* $\widetilde{\mathcal{E}}$ *on a*

$$\deg\mathcal{A}-\frac{\mathrm{rg}\mathcal{A}}{r}\deg\mathcal{E}\leq p(\mathrm{rg}\mathcal{A})$$

ainsi que, pour tout $s\in\underline{r}$ *avec* ${}^{\tau}\mathcal{A}\cap\overline{\mathcal{E}}_s\neq 0$

$$\deg({}^{\tau}\mathcal{E}_s\cap{}^{\tau}\mathcal{A})+\deg(\overline{\mathcal{E}}_s\cap{}^{\tau}\mathcal{A})-\frac{\mathrm{rg}\mathcal{A}}{r}\deg\mathcal{E}\leq p(\mathrm{rg}\mathcal{A})-1\ .$$

Démonstration. On voit facilement que l'assertion *(b)* du théorème et celles du lemme sont équivalentes pour les bons sous-objets. Il reste donc à vérifier que si les assertions du lemme sont vraies pour les bons sous-objets, elles le sont pour tous les sous-objets.

Soit donc $(\mathcal{A},\mathcal{A}')$ un sous-objet de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Pour $s\in\underline{r}$ désignons par $\mathcal{A}_s$, resp. $\mathcal{A}'_s$, l'image réciproque par $\mathcal{E}_s\twoheadrightarrow\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}$, resp. $\mathcal{E}'_s\twoheadrightarrow\mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-}$, du sous-fibré maximal engendré par $\mathcal{A}\cap\mathcal{E}_s/\mathcal{A}\cap\mathcal{E}_{s^-}$, resp. $\mathcal{A}\cap\mathcal{E}'_s/\mathcal{A}\cap\mathcal{E}'_{s^-}$. On peut remarquer que si $\mathrm{rg}\mathcal{A}_s=\mathrm{rg}\mathcal{E}_s$, resp. $\mathrm{rg}\mathcal{A}_s=\mathrm{rg}\mathcal{E}_{s^-}$, alors $\mathcal{A}_s=\mathcal{E}_s$, resp. $\mathcal{A}_s=\mathcal{E}_{s^-}$. on voit aussi que chaque $(\mathcal{A}_s,\mathcal{A}'_s)$ est un bon sous-objet de $\widetilde{\mathcal{E}}$ et que

$$\mathrm{rg}\mathcal{A}=\sum_{s\in\underline{r}}(\mathrm{rg}\mathcal{A}_s-\mathrm{rg}\mathcal{E}_s)\ ,\ \deg\mathcal{A}\leq\sum_{s\in\underline{r}}(\deg\mathcal{A}_s-\deg\mathcal{E}_s)\ ,$$

par suite, en posant $\delta(\mathcal{F})=\deg\mathcal{F}-\frac{\mathrm{rg}\mathcal{F}}{r}\deg\mathcal{E}$ pour tout sous-fibré $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$,

$$\delta(\mathcal{A})\leq\sum_{s\in\underline{r}}(\delta(\mathcal{A}_s)-\delta(\mathcal{E}_{s^-}))\ .$$

Appelons Z le membre de droite de cette dernière égalité, on a

$$Z=\sum_{1\leq i\leq k}\Big(\delta(\mathcal{A}_{r_i})-\delta(\mathcal{E}_{r_{i-1}})\Big)=\delta((\mathcal{A})+\sum_{1\leq i\leq k-1}(\delta(\mathcal{A}_{r_i})-\delta(\mathcal{E}_{r_i}))$$

ainsi on a

$$Z=\delta((\mathcal{A})+\sum_{\substack{1\leq i\leq k-1\\ \mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}<\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}<\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_i}}}(\delta(\mathcal{A}_{r_i})-\delta(\mathcal{E}_{r_i}))\ .$$

Soit α' tel que $p(\mathrm{rg}\mathcal{A}_{\alpha'})$ soit maximal dans l'ensemble des $p(\mathrm{rg}\mathcal{A}_i)$,

(1) si $p(\mathcal{A}_{r_i})-p(\mathcal{E}_{r_i})>0$ on pose $\alpha=\alpha'-1$,

(2) si $p(\mathcal{A}_{r_i})-p(\mathcal{E}_{r_i})<0$ on pose $\alpha=\alpha'$.

Soient

$$Z_1=\sum_{\substack{1\leq i\leq\alpha\\ \mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}<\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}<\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_i}}}(\delta(\mathcal{A}_{r_i})-\delta(\mathcal{E}_{r_i}))$$

$$Z_2 = \sum_{\substack{\alpha<i\leq k-1 \\ \mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}<\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}<\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_i}}} (\delta(\mathcal{A}_{r_i}) - \delta(\mathcal{E}_{r_i}))$$

donc $Z = \delta((\mathcal{A}) + Z_1 + Z_2$.

On voit avec l'hypothèse *(a)* de la partie *(1)* de la proposition que

$$Z_2 \leq \sum_{\substack{\alpha<i\leq k-1 \\ \mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}<\mathcal{A}_{r_i}<\mathcal{E}_{r_i}}} (p(\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}) - p(\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_i}) + 1) \leq 0 \ ,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{\substack{1\leq i\leq\alpha \\ \mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}<\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}<\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_i}}} \Big(\delta(\mathcal{A}_{r_i}) - \delta(\mathcal{E}_{r_{i-1}})\Big) - \delta(\mathcal{E}_{r_\alpha}) \\ &\leq \sum_{\substack{1\leq i\leq\alpha \\ \mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}<\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}<\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_i}}} \Big(p(\mathrm{rg}\mathcal{A}_{r_i}) - p(\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_{i-1}}) + 1\Big) - \delta(\mathcal{E}_{r_\alpha}) \\ &\leq -\delta(\mathcal{E}_{r_\alpha}) \ . \end{aligned}$$

Finalement,

$$Z \leq \delta(\mathcal{A}) - \delta(\mathcal{E}_{r_\alpha}) \leq p(\mathrm{rg}\mathcal{A}) - p(\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_\alpha}) + 1$$

or $\alpha > 0$ implique $p(\mathrm{rg}\mathcal{E}_{r_\alpha}) = p(r_\alpha) > 0$. On a prouvé $Z \leq p(\mathrm{rg}\mathcal{A})$, qui donne la première des relations attendues.

Pour l'autre relation. On a

$$\deg(\mathcal{E}_s \cap \mathcal{A}) \leq \sum_{t\in\underline{r}, t\leq s} (\deg \mathcal{A}_s - \deg \mathcal{E}_{s^-}) \ ,$$

$$\deg\left(\overline{\mathcal{E}}_s \cap {}^\tau\!\mathcal{A}\right) \leq \deg\left(\overline{\mathcal{E}}_s \cap {}^\tau\!\mathcal{A}_{s^+}\right) \sum_{t\in\underline{r}, t>s^+} (\deg \mathcal{A}_s - \deg \mathcal{E}_{s^-})$$

d'où avec les méthodes précédentes la deuxième formule de l'énoncé du lemme. □

Ceci termine la démonstration. □

On peut maintenant énoncer le thèorème suivant

Théorème 6.12. *Soient* $p : [0, r] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *une fonction polygone qui est 2-grande et* $\mathcal{L}$ *un faisceau inversible sur* X *de degré non nul. Alors le champ* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/\mathcal{L}^{\mathbb{Z}}$ *est propre (donc séparé) au dessus de* $X \times X$ *(et de type fini, lisse de dimension relative* $2r - 2$ *si* p *est assez grand, comme prouvé au dessus).*

Le reste de la preuve consiste à démontrer la propreté, c'est l'objet du paragraphe suivant.

7. Application du critère valuatif de propreté.

Dans ce paragraphe nous résumons, parfois brièvement, la démonstration de la propreté de $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,\overline{p}\leq p}}/\mathcal{L}^{\mathbb{Z}}$. Nous commençons par rappeler le critère valuatif de propreté pour les champs considérés ici.

Définition 7.1. *Soit* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *un* 1*-morphisme de champs algébriques sur une base* S*.*

(1) On dit que F *est séparé si le morphisme diagonal* $\Delta_F : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ *est universellement femé.*

(2) On dit que le morphisme F *est propre s'il est séparé, universellement fermé et de type fini.*

Il suit du chapitre 7 de [23] le critère valuatif suivant.

Théorème 7.2. *Soit* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *un* 1*-morphisme de champs algébriques sur une base* S*,* F *étant supposé de type fini et* $\mathcal{Y}$ *noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) le morphisme F *est propre,*

(2)(a) pour tout diagramme commutatif de champs algébriques, où A *est un* S*-anneau de valuation discrète*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathrm{Fr}A) & \to & \mathcal{X} \\ \cap & & \downarrow F \\ \mathrm{Spec}A & \to & \mathcal{Y} \end{array}$$

il existe un S*-anneau de valuation discrète* A'*, qui est une extension finie de* A*, et un morphisme de* S*-champs* $\mathrm{Spec}A' \to \mathcal{X}$*, tels que*

$$(\mathrm{Spec}A \to \mathcal{Y}) \circ (\mathrm{Spec}A' \to \mathrm{Spec}A) = \left(\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}\right) \circ (\mathrm{Spec}(\mathrm{Fr}A) \to \mathcal{X}) \ ,$$

(b) pour tout S*-anneau de valuation discrète* A *le foncteur*

$$\mathcal{X}_{\mathrm{Spec}A} \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{SpecFr}A} \times_{\mathcal{Y}_{\mathrm{SpecFr}A}} \mathcal{Y}_{\mathrm{Spec}A}$$

est pleinement fidèle.

Il faut remarquer qu'ici, contrairement à au critère valuatif de propreté pour les schémas, l'extension A' de A n'est pas en général triviale. C'est expliqué au ch. 7 de [23], remarque (7.2.3). Nous allons appliquer ceci aux champs de chtoucas , il est facile de "descendre" un fibré sur $X \otimes A'$ à $X \otimes A$, mais ce ne l'est pas pour les morphsmes, donc pour les 0 et ∞ des chtoucas . Dans notre situation, l'extension A' de A ne semble pas en général triviale.

On veut donc appliquer le théorème précdent au morphisme de champs algébriques

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}/\mathcal{L}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow X \times X \ , \tag{33}$$

dont on sait (cf th. (6.12)) qu'il est propre au dessus de $X \times X$ et de type fini.

Étant donné un chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ sur Spec(FrA), où A est un anneau de valuation discrète, il faut construire une extension A' de A et un chtouca sur SpecA', qui par spécialisation, à une extension finie près (de FrA par FrA'), redonne $\widetilde{\mathcal{E}}$. Ce dernier fixe le lieu des zéros et des pôles et avec une telle hypothèse, les champs de chtoucas sont proches de ceux des modules de Drinfeld, d'où l'idée d'utiliser la version adèlique intermédiare, cf la première partie de ces notes, mais aussi le ch. III de [17].

Nous ne ferons que résumer la démonstration du thèorème suivant, qui est la preuve de la propreté du morphisme (33), la démonstration complète se trouve dans [18] où elle demande 21 pages et, surtout si l'on souhaite donner tous les détails, est beaucoup trop longue pour être totalement écrite ici. La notion de φ-réseau va être rappelée et développée juste après.

Théorème 7.3. *Soit* $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} = \mathcal{E}'' & & \end{pmatrix}$ *un chtouca de rang* $r \geq 1$ *au dessus du point générique* Spec(FrA) *d'un* $\mathbb{F}_q$*-anneau de valuation discrète* A*. Soit* V *la fibre générique de* $\widetilde{\mathcal{E}}$*.*

Le chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ *correspond à un morphisme* Spec(FrA) $\to \mathrm{Cht}^r$*, soit* $p : [0, r] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *un polygone* 2*-grand tel que ce morphisme se factorise à travers l'ouvert* $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}$*. Alors*

(1) quitte à remplacer A *par une extension finie, il existe dans* V *un* φ*-réseau itéré* M *tel que le chtouca associé soit un chtouca itéré qui est un objet de* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ (Spec$A$)*;*

(2) si M *et* M' *sont deux* φ*-réseaux itérés de* V *définissant chacun un objet de* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}\leq p}}$ (Spec$A$)*, on a nécessarement* $M = M'$*.*

7.1. **Les φ-réseaux itérés.** Soient A un $\mathbb{F}_q$-anneau de valuation discrète, K_A son corps des fractions, κ_A son corps résiduel et π_A l'une de ses uniformisantes ; ainsi

$$\mathbb{F}_q \hookrightarrow \kappa_A \hookrightarrow \kappa_A[\pi_A] \hookrightarrow A \hookrightarrow \kappa_A[[\pi_A]] \ .$$

Soit A_X l'anneau local de $X \otimes A$ au point générique de la fibre spéciale $x \otimes \kappa_A$, c'est à dire $A_X = F \otimes A_{(\pi_A)}$, où F est le corps des fonctions rationnelles sur X et $A_{(\pi_A)}$ le localisé de A en l'idéal (π_A) ; A_X un anneau de valuation discrète, son corps des fractions s'identifie à $\mathrm{Fr}(F \otimes K_A)$, son corps ésiduel à $\mathrm{Fr}(F \otimes \kappa_A)$. On note τ les endomorphises de A_X, K_{A_X}, de leurs complétés $\widehat{A_X}$ et $K_{\widehat{A_X}}$, induits par $\mathrm{Id}_F \otimes \mathrm{Frob}_A$. La valuation de A et de $\widehat{A_X}$ sont notées $\deg_A$ et $\deg_{\widehat{A_X}}$; on a $\deg_{A_X} \tau(\cdot) = q \deg_{A_X}(\cdot)$, etc.

On appelle φ-espace sur K_{A_X}, de dimension r, un couple (V, φ) ou V est un K_{A_X}-espace vectoriel de dimension r muni d'un isomorphisme K_{A_X}-linéaire ${}^\tau V \xrightarrow{\sim} V$, ou, ce qui revient au même, d'un isomorphisme τ-linéaire $\varphi : v \simeq V$.

Un réseau de V, resp. de $\widehat{V} = V \otimes_{K_{A_X}} K_{\widehat{A_X}}$ est un sous-A_X-module, resp. sous-$\widehat{A_X}$-module, de type fini et qui engendre V sur K_{A_X}, resp. $\widehat{V}$ sur $K_{\widehat{A_X}}$. Un tel réseau est automatiquement libre sur A_X, resp. $\widehat{A_X}$. L'application $M \mapsto M \otimes_{A_X} \widehat{A_X}$ donne une bijection de l'ensemble des réseaux de VBV sur celui de $\widehat{V}$.

Définition 7.4. *Soient A un $\mathbb{F}_q$-anneau de valuation discrète, (V, φ) un φ-espace de dimension r sur K_{A_X} et $u : {}^\tau V \simeq V$ l'isomorphisme asocié. On appelle φ-réseau itéré dans V, relativement à la famille d'entiers naturels $d_1, \cdots, d_{r-1}$ un réseau M de V tel que, en posant pour $1 \leq s \leq r$,*

$$u_s = \left(\prod_{1 \leq t \leq s} \pi_A^{d_t(s-t)} \right)^{-(q-1)} \bigwedge^s u \ ,$$

les deux assertions suivantes soient satisfaites

(1) pour tout choix d'une base de M sur A_X, le point

$$(u_1, \cdots, u_r; \pi_A^{d_1(q-1)}, \cdots \pi_A^{d_{r-1}(q-1)})$$

de $\Omega^r_{(r)}(K_{A_X})$ se prolonge en un point de $\Omega^r(A_X)$;

(2) pour tout s, $1 \leq s \leq r$, la réduction modulo π_A de l'homomorphisme

$$u_s : {}^\tau \left(\left(\prod_{1 \leq t \leq s} \pi_A^{-d_t(s-t)} \right) \bigwedge^s M \right) \longrightarrow \left(\prod_{1 \leq t \leq s} \pi_A^{-d_t(s-t)} \right) \bigwedge^s M$$

est tel que $\ker u_s$ *et* ${}^\tau\mathrm{Im}\ u_s$ *soient en somme directe (autrement dit toutes les puissances de u_s ont même rang).*

Le type de ce φ-réseau itéré M est ($\underline{r} = (r_1, \cdots, r_k)$ où $r_k = r$ et s figure dans $\underline{r}$ si et seulement si $d_s \neq 0$ (donc $d_s \geq 1$). Un *ph*-réseau de type $\underline{r} = (r)$, c'est à dire dont tous les d_s sont nuls, est simplement appelé un φ-réseau.

Cette notion de φ-réseau itéré vaut aussi pour l'anneau $\widehat{A_X}$ et $M \mapsto M \otimes_{A_X} \widehat{A_X}$ donne une bijection entre l'ensemble des φ-réseaux itérés de V et celui des φ-réseaux itérés de $\widehat{V}$.

7.1.1. *Existence.* Soit $(\widehat{V}, \varphi)$ un φ-espace sur $K_{\widehat{A_X}}$, $\widehat{M}$ un φ-réseau dans $\widehat{V}$ de type $\underline{r}$ relativement à la famille $d_1, \cdots, d_{r-1}$ d'entiers naturels. Soient

$$\widehat{M_{r_1}} = \cap_{n\geq 1} \widehat{A_X} \varphi^n(\widehat{M}) \ , \ \widehat{V_{r_1}} = \widehat{M_{r_1}} \otimes_{\widehat{A_X}} K_{\widehat{A_X}} \ ,$$

$$\widehat{M_{r_2}} = \cap_{n\geq 1} \widehat{A_X} \varphi^n(\pi_A^{-d_{r_1}} \widehat{M}/\widehat{M_{r_1}}) \ , \ \widehat{V_{r_2}}/\widehat{V_{r_1}} = \widehat{M_{r_2}} \otimes_{\widehat{A_X}} K_{\widehat{A_X}} \ ,$$

etc.
Ainsi on associe $\widehat{M}$ une filtration croissante

$$0 = \widehat{V_0} \subsetneq \widehat{V_{r_1}} \subsetneq \widehat{V_{r_2}} \subsetneq \cdots \subsetneq \widehat{V_{r_k}} = \widehat{V}$$

de $\widehat{V}$ par des φ-espaces tels que chaque quotient $\widehat{V_s}/\widehat{V_{s^-}}$, $s \in \underline{r}$, soit muni d'un φ-réseau $\widehat{M_s}$.

Proposition 7.5. *(1) il existe dans $\widehat{V}$ au plus un φ-réseau.*

(2) Plus précisément, si

$$0 = \widehat{V_0} \subsetneq \widehat{V_{r_1}} \subsetneq \widehat{V_{r_2}} \subsetneq \cdots \subsetneq \widehat{V_{r_k}} = \widehat{V}$$

est une filtration de $\widehat{V}$ par des φ-espaces, si $d_1, \cdots, d_{r-1}$ est une famille d'entiers ≥ 0 tels que $s \in \underline{r}$ si et seulement si $d_s \neq 0$, il existe alors dans $\widehat{V}$ au plus un φ-réseau itéré de type $\underline{r}$, relativement à $d_1, \cdots, d_{r-1}$, dont la filtration de $\widehat{V}$ associée soits celle donnée.

(3) Dans la situation de (2), en supposant de plus que que chaque $\widehat{V_s}/\widehat{V_{s^-}}$, $s \in \underline{r}$, admette un φ-réseau, alors si les d_s, $s \in \underline{r}$, sont assez grands, il existe dans $\widehat{V}$ un φ-réseau itéré de type $\underline{r}$, relativement à $d_1, \cdots, d_{r-1}$, dont la filtration associée soits celle donnée.

Démonstration. D'abord un lemme technique.

Lemme 7.6. *Soit Q l'ensemble des éléments v de $\widehat{V}$ tels que $\sum_{n\geq 1} \widehat{A_X} \varphi^n(v)$ soit un $\widehat{A_X}$-module de type fini.*

(1) Soit $v \in \widehat{V}$, alors il existe un entier $\beta \geq 0$ tel que $\pi_A^\beta v \in Q$.

(2) S'il existe un φ-réseau dans $\widehat{V}$, il est égal à Q.

Démonstration. (1) On écrit

$$\sum_{n\geq 1}\widehat{K_{A_X}}\varphi^n(v)=\sum_{n=0}^{N}\widehat{K_{A_X}}\varphi^n(v)$$

$$\varphi^{N+1}(v)=\sum_0^N\lambda_n\varphi^n(v)\quad\text{où}\quad\lambda_n\in\pi_A^{-\alpha}\widehat{A_X}\quad\text{avec}\quad\alpha\geq 0\ ,$$

$$\varphi^{N+2}(v)=\sum_0^N\lambda_n^q\varphi^{n+1}(v)=\sum_0^{N-1}\lambda_n^q\varphi^{n+1}(v)+\lambda_N^q\sum_0^N\lambda_n\varphi^n(v)$$

donc

$$\varphi^{N+2}(v)\in\pi_A^{-(q+1)\alpha}\sum_{n=0}^{N}\widehat{A_X}\varphi^n(v)$$

etc., on voit que pour tout $\ell\geq 0$

$$\varphi^{N+\ell}(v)\in\pi_A^{-\frac{q^\ell-1}{q-1}\alpha}\sum_{n=0}^{N}\widehat{A_X}\varphi^n(v)\ ,$$

il vient

$$\varphi^{N+\ell}(\pi_A^\beta v)\in\pi_A^\gamma\sum_{n=0}^{N}\widehat{A_X}\varphi^n(v)$$

avec $\gamma=-\frac{q^\ell-1}{q-1}\alpha+q^{\ell+N}\beta-q^N\beta\geq 0$ si $\beta\geq\frac{\alpha}{q^N(q-1)}$.

(2) On a $\varphi(Q)\subset Q$, de plus la première assertion permet de montrer que Q est de type fini (on voit facilement que $\mathrm{Hom}_{\widehat{A_X}}(Q,\widehat{A_X}$ est de type fini sur $\widehat{A_X}$), donc libre. Soit P un φ-réseau de $\widehat{V}$, montrons que $P=Q$. Il est évident que $P\subset Q$. On choisit une base adaptée :

$$Q=\bigoplus_{i=1}^{t}\widehat{A_X}x_i\ ,\ \ P=\bigoplus_{i=1}^{t}\widehat{A_X}a_ix_i$$

avec $a_i\in\widehat{A_X}$, $a_i\neq 0$. On a

$$P=\varphi(P)=\bigoplus_{i=1}^{t}\widehat{A_X}a_i^q\varphi(x_i)$$

donc il existe $(b_{i,j})\in\mathrm{GL}_t(\widehat{A_X})$ tel que

$$a_i^q\varphi(x_i)=\sum_{j=1}^{t}b_{i,j}a_ix_i\ ,\ \text{i. e. }\varphi(x_i)=\sum_{j=1}^{t}b_{i,j}a_i^{1-q}x_i$$

mais on a $\varphi(Q)\subset Q$, il vient donc que $b_{i,j}a_i^{1-q}\in\widehat{A_X}$ pour tout i et j. Finalement $(b_{i,j}a_i^{q-1})\in\mathrm{GL}_t(\widehat{A_X})$ montre que les a_i sont tous de valuation 0, donc $P=Q$. □

Donc si un φ-réseau existe dans $\widehat{V}$, c'est le réseau Q précédent ; il faut remarquer qu'en général l'application induite par φ

$$\overline{\varphi} : Q/\pi_A Q \longrightarrow Q/\pi_A Q$$

peut être nilpotente.

Montrons *(3)*. Pour tout $s \in \underline{r}$ soit $\widehat{M_s}$ un $\widehat{A_X}$-module libre qui relève dans $\widehat{V_s}$ le φ-module de $\widehat{V_s}/\widehat{V_{s^-}}$ et qui est de même rang. Si les d_s, $s \in \underline{r}$, sont assez grands, le $\widehat{A_X}$-module

$$\sum_{s \in \underline{r}} \left(\left(\prod_{\substack{t \in \underline{r} \\ t < s}} \pi_A^{d_t} \right) \widehat{M_s} \right)$$

répond à la question. $\square$

Lemme 7.7. *(Drinfeld) Quitte à remplacer A par une extension finie totalement ramifiée il existe dans $\widehat{V}$ un réseau $\widehat{M}$ stabilisé par φ et tel que l'endomorphisme induit $\overline{\varphi} : \widehat{M}/\pi_A \widehat{M} \to \widehat{M}/\pi_A \widehat{M}$ ne soit pas nilpotent.*

La preuve consiste à montrer que, quitte à remplacer π_A par l'une des ses racines il existe sur $\widehat{V}$ une valuation prenant la valeur 0 et $\widehat{M}$ est lenesemble des éléments de $\widehat{V}$ de valuations ≥ 0.

Tout ceci est encore vrai pour V à la place de $\widehat{V}$. Ce lemme s'étend sans difficulté aux φ-réseaux itérés.

Proposition 7.8. *Soit (V, φ), resp. $(\widehat{V}, \varphi)$, un φ-espace sur K_{A_X}, resp. $K_{\widehat{A_X}}$, alors quitte à remplacer A par une extension finie totalement ramifiée, il existe dans V, resp. $\widehat{V}$, une φ-réseau itéré.*

7.1.2. *Filtration canonique associée, augmentations.* Soient A un $\mathbb{F}_q$-anneau de valuation discrète, (V, φ)un φ-espace de dimension r sur K_{A_X}, M un φ-réseau itéré de type $\underline{r} = (r_1, \cdots, r_k)$ dans V et $\widehat{M} = M \otimes_{A_X} \widehat{A_X}$, $\widehat{V} = V \otimes_{K_{A_X}} K_{\widehat{A_X}}$.

On pose $V^M = M/\pi_A M = \widehat{M}/\pi_A \widehat{M} = \widehat{V}^{\widehat{M}}$, c'est un espace vectoriel de dimension r sur κ_{A_X}. Il résulte de la proposition 6.3 et de la définition 7.4 des φ-réseaux itérés l'existence

(1) dans V^M d'une filtration croissante par des sous-espaces V_s^M de dimensions $s \in \underline{r}$

$$0 = V_0^M \subsetneq V_{r_1}^M \subsetneq \cdots \subsetneq V_{r_k}^M = V^M \ ;$$

(2) dans ${}^{\tau}V^M$ d'une filtration décroissante pat des sous-espaces $\overline{V}_s^M$ de codimensions $s \in \underline{r}$

$$ {}^{\tau}V^M = \overline{V}_0^M \supsetneq \overline{V}_{r_1}^M \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{V}_{r_k}^M = 0 \ ; $$

(3) pour tout $s \in \underline{r}$ d'un isomorphisme

$$ \overline{V}_{s^-}^M / \overline{V}_s^M \xrightarrow{\sim} V_s^M / V_{s^-}^M \ ; $$

(4) de plus l'assertion (2) de la définition 7.4 équivaut à ce que

$$ {}^{\tau}V^M = \overline{V}_s^M \oplus {}^{\tau}V_s^M \ . $$

On a associé plus haut, dans le § 7.1.1, à tout φ-réseau M une filtration de $\widehat{V}$, on l'écrit

$$ 0 = \widehat{V}_0(M) \subsetneq \widehat{V}_{r_1}(M) \subsetneq \cdots \subsetneq \widehat{V}_s(M) \subsetneq \cdots \subsetneq \widehat{V}_{r_k}(M) = \widehat{V} $$

et on l'appelle *la filtration de $\widehat{V}$ canoniquement associée au φ-réseau itéré M.*

Un sous-espace $\widehat{W}$ de $\widehat{V}$ est dit scompatible avec la filtration canoniquement associée à M s'il existe $s \in \underline{r}$ tel que

$$ \widehat{V}_{s^-}(M) \subsetneq \widehat{W} \subsetneq \widehat{V}_s(M) \ . $$

L'esnsemble de ces sous-espaces est en bijection avec l'ensemble des sous-espaces U de V^M tels qu'il existe $s \in \underline{r}$ avec

$$ V_{s^-}^M \subsetneq U \subsetneq V_s^M $$

et que de plus l'isomorphisme *(3)* précédent induise

$$ \overline{V}_{s^-}^M \cap {}^{\tau}U \xrightarrow{\sim} U / V_{s^-}^M \ . $$

Proposition 7.9. *Les notations sont habituelles, M est un φ-réseau itéré dans V relativement à $(d_1, d_2, \cdots, d_{r-1})$ et soit $\widehat{W}$ un sous-espace de $\widehat{V}$ compatible avec la filtration canonique associée à M, on désigne par r' la dimension de $\widehat{W}$ sur $K_{\widehat{A_X}}$.*

Soit $M' = \widehat{M} / \left(\pi_A \widehat{M} + \widehat{M} \cap \widehat{W}\right)$, c'est un φ-réseau itéré relativement à $(d_1, \cdots, d_{r'-1}, d_{r'} + 1, d_{r'+1}, \cdots, d_{r-1})$ et la filtration de $\widehat{V}$ canoniquement associée à M' est la réunion de celle associée à M et de $\widehat{W}$.

7.2. **φ-réseaux itérés et chtoucas .** Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 7.10. *Soit A un $\mathbb{F}_q$-anneau de valuation discrète. Le foncteur, qui à tout $\mathcal{O}_{X\otimes A}$-module localemnt libre associe d'une part sa restriction à la fibre générique $X\otimes K_A$ et d'autre part sa fibre au dessus de* $\mathrm{Spec}A_X$*, est une équivalence de catégorie, c'est à dire qu'il admet un foncteur quasi-inverse, noté $(\mathcal{E}, M) \mapsto \mathcal{E}(M)$.*

Soit au dessus de $\mathrm{Spec}K_A$ un chtouca de rang $r \geq 1$ $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}'' & & \end{array}\right)$.
Sa fibre générique est un φ-espace, noté V, de dimension r sur K_A.

Les considérations précédentes montrent qu'à tout φ-réseau itéré on peut associer quelque chose qui n'est pas encore un chtouca itéré et que l'on appell un *chtouca dégénéré induit par M*. C'est

— un $\mathcal{O}_{X\otimes A}$-module $\mathcal{E}(M)$ localement libre de rang r,

— une modification $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(M) & \to & \mathcal{E}'(M) \\ & \nearrow & \\ \mathcal{E}''(M) & & \end{array}\right)$,

— une famille d'homomorphismes ${}^\tau\wedge^s\mathcal{E}(M) \to \wedge^s\mathcal{E}''(M)$, $1 \leq s \leq r$.

Les faisceaux $\mathcal{E}^M = \mathcal{E}(M)/\pi_A\mathcal{E}(M)$, $\mathcal{E}'^M = \mathcal{E}'(M)/\pi_A\mathcal{E}'(M)$, $\mathcal{E}''^M = \mathcal{E}''(M)/\pi_A\mathcal{E}''(M)$ sur la fibre spéciale $X \otimes \kappa_A$ sont localement libres de rang r de fibres génériques $V^M = M/\pi_a M$. Les filtrationds de V^M et ${}^\tau V^M$ définies au paragraphe 7.1.2 induisent des filtrations analoguse sur les fibrés :

$$0 = \mathcal{E}_0^M \subsetneq \mathcal{E}_{r_1}^M \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{r_k}^M = \mathcal{E}^M \ ,$$

$$0 = \mathcal{E'}_0^M \subsetneq \mathcal{E'}_{r_1}^M \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E'}_{r_k}^M = \mathcal{E}'^M \ ,$$

$$0 = \mathcal{E''}_0^M \subsetneq \mathcal{E''}_{r_1}^M \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E''}_{r_k}^M = \mathcal{E}\text{"}^M \ ,$$

ainsi que

$${}^\tau\mathcal{E}^M = \overline{\mathcal{E}}_0^M \supsetneq \overline{\mathcal{E}}_{r_1}^M \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{\mathcal{E}}_{r_k}^M = 0$$

et les sous-fibrés considérés ici sont maximaux.

On a aussi, pour tout $s \in \underline{r}$, au dessus d'un ouvert non vide de $X\otimes\kappa_A$ un isomorphisme

$$\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\overline{\mathcal{E}}_s^M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E''}_s^M/\mathcal{E''}_{s^-}^M \tag{34}$$

et l'on sait que $\overline{\mathcal{E}}_s^M \cap {}^\tau\mathcal{E}_s^M = 0$, que ${}^\tau\mathcal{E}^M/(\overline{\mathcal{E}}_s^M \oplus {}^\tau\mathcal{E}_s^M)$ est de torsion. En fait ce quotient est de dimension 0 ou 1 sur κ_A et le fait qu'il soit de dimension 1 implique que le chtouca dégénéré est un pré-chtouca itéré de type celui de M. Ceci est encore vrai si le morphisme (34) est partout défini, avec d'autres propriétés (cf [18], § 2, prop. 8).

On arrête ici la description de la complétion de ce champ de chtoucas. On a vu les ingrédients essentiels, que le chtouca recherché est associé à un φ-réseau itéré dans la fibre générique du chtouca donné, et que ce φ-réseau doit être bien choisi, d'où des augmentations de ses filtrations.

Il faut remarquer que la suite de la démonstration dans [18] demande 15 pages supplémentaires, donc nous omettons beaucoup d'arguments, parfois difficiles.

8. Les champs de chtoucas munis de structures de niveau.

On en dit que quelques mots, consistant à recopier une partie de l'introduction du chapitre III de [20], puis à en expliquer les termes. Soit $N = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_N$ un niveau, c'est à dire un sous-schéma fermé fini de la courbe X. Les compactifications $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ des champs $\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}$ de chtoucas munis de structures de niveau N par produits fibrés dans les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_N^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \times_{X\times X} ((X-N)\times(X-N)) & \xrightarrow{\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N} & \mathcal{C}^{r,N} \end{array}$$

où $\cdot\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_N$ désigne le morphisme lisse restrictions des chtoucas itérés de X à N, où $\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}$ désigne le champ des chtoucas de degré d, on a, si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X de degré non nul

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}/\mathcal{L}^{\mathbb{Z}} = \coprod_{d,\ \mathrm{fini}} \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}\ .$$

Expliquons ce que sont $\mathcal{C}_N^r$ et $\mathcal{C}^{r,N}$.

Soit $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}$ le champ qui a tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde dont ls objets sont ainsi constitués :

— de $\mathcal{O}_{N\times S}$-modules $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ localement libres de rang r,

— de deux homomorphismes de $\mathcal{O}_{N\times S}$-modules $\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'' \xrightarrow{t} \mathcal{F}'$ dont les conoyaux sont localement sur S des $\mathcal{O}_s$-modules monogènes,

— de faisceaux inversibles $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{r-1}$ sur S munis de sections globales respectivement $\ell_1, \cdots, \ell_{r-1}$,

— d'un homorphisme complet de ${}^\tau\mathcal{F} = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}''$ (cf définition 6.1 et lemme 6.6).

c'est un champ algébrique au sens d'Artin, muni d'un morhisme sur le champ $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$. La "réduction de X à N" induit des mrophismes

$$\overline{\mathrm{Cht}^r} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^{r,N} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}^{r,N}.$$

Soit $\mathcal{C}^{r,N}$ l'ouvert de $\overline{\mathcal{C}}^{r,N}$ ds éléments qui n'ont ni pôles ni zéro dans N. il résulte de propriété dont nous n'avons rien dit que le morphisme

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}\times_{X\times X}((X-N)\times(X-N))\longrightarrow \mathcal{C}^{r,N}\times((X-N)\times(X-N))$$

est lisse de dimension relative $2r-2$ si p est assez convexe (en fonction de X et de N).

$\mathcal{C}_N^r$ est le prolongement par normalisation du revêtement de Lang au dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$.

En fait l'espace $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ n'a pas toutes les proprétés requises, en particulier de lissité. Le champ $\mathcal{C}_N^r$ admet la définition suivante. a tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ il associe le groupoïde dont les objets sont constitués par

— un $\mathcal{O}_{N\times S}$-module $\mathcal{F}$ localement libre de rang r,
— des faisceaux inversibles $\mathcal{L}_1,\cdots,\mathcal{L}_{r-1}$ sur S munis de sections globales respectivement $\ell_1,\cdots,\ell_{r-1}$,
— un homorphisme complet de ${}^\tau\mathcal{F}=(\mathrm{Id}_N\times\mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}''$, c'est à dire d'une famille d'homorphismes de fibrés

$$u_s:{}^tau\Big(\wedge^s\mathcal{F}\otimes\Big(\otimes_{t<s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\Big)\Big)\longrightarrow\wedge^s\mathcal{F}\otimes\Big(\otimes_{t<s}\mathcal{L}_t^{\otimes(s-t)}\Big)\ ,\ 1\leq s\leq r$$

qui sont non nuls en tout point géométrique de $N\times S$.

On définit l'ouvert $\mathcal{C}'^{r,N}$ en demandant qu'en tout point géométrique de $N\times S$ les u_s ne soient jamais τ-nilpotents, ou, ce qui revient au même, que pour tout s $\mathrm{Ker}u_s$ et $\mathrm{Im}u_s$ soient en somme directe.

Soit $\mathcal{C}'^r_N$ l'image réciproque de $\mathcal{C}'^{r,N}$ dans $\mathcal{C}_N^r$, c'est un champ absolument lisse.

Proposition 8.1. *(corollaire II-14 de* [20]*) Soit $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ l'ouvert de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}$ égal à l'image inverse de l'ouvert $\mathcal{C}'^r_N$ de $\mathcal{C}_N^r$ (cf le diagramme au début de ce paragraphe). Alors si le polygone p est assez convexe (en fonction de X et S) $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ est lisse sur $(X-N)\times(X-N)\times(\mathbb{A}^1/\mathbb{A}_m)^{k-1}$.*

De même soit $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ l'ouvert de

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}\times_{X\times X}((X-N)\times(X-N))$$

égal à l'image inverse de l'ouvert $\mathcal{C}'^r_N$. Alors $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ est représentable, fini et plat, au dessus de $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\overline{p}\leq p}}'$ et le groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ opère transitivement sur les fibres.

Mais il est donné dans [20] une résolution des singularités des champs $\mathcal{C}^{r,N}$ lorque le niveau N est sans multiplicité (th. III-17).

Références

[1] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M., Néron Models, Spinger Verlag, 1990.

[2] Bourbaki, Algèbre, chapitre 10

[3] Canonaco Alberto, Introduction to algebraic stacks, http ://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/seminari/geo-alg/dispense/stacks.pdf

[4] Deligne P., Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, LN in Math. 349, p.143-316, 1973.

[5] Drinfeld V. G., Elliptic Modules, russian Math. Sb. 94, p. 594-627, 1974 ; english trans. Math. USSR-Sb 23, p. 561-592, 1976.

[6] Drinfeld V. G., Two dimensional ℓ-adic representation of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2), Amer. J. of Math. 54, p. 85-114, 1983.

[7] Drinfeld V. G., Langlands conjecture fr GL(2) over function fields, Proceedings of the International Congress of Math., Helsinki 1978, vol. 2, p. 565-574.

[8] Drinfeld V. G., Commutative subrings of certain noncommutative rings, Func. Analysis 11-1, 1977.

[9] Drinfeld V. G., Varieties of modules of F-sheaves, Func. Analysis 21-2, 1987.

[10] Fundamental Algebraic Geometry, Mathematical Surveys and Monographs, vol 123, Amer Math. Soc., 2005.

[11] Grothendieck Alexandre, Sur quelques pointe d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., p. 119-221, 1957.

[12] Grothendieck Alexandre, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert, exposé 221 du séminaire Bourbaki, 1961.

[13] Harder G., Kazhdan D.A., Automorphic forms on GL_2 over function fields (after V.G. Drinfeld), in Proceedings un Symposia in Pure Mathematics, vol. 33, part. 2, p. 357-379, 1979.

[14] Hartshorne R., Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[15] Jacquet Hervé, Langlands Robert P., Automorphic forms on GL(2), LN 114, Springer Verlag 1970.

[16] Knutson D., Algebraic Spaces, Springer L. N. 203, 1971.

[17] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson, Astérisque 243, Soc. Math. France, 1997.

[18] Lafforgue L., Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, J. of the Amer. Math. Soc., vol. 11, n° 4, p.1001-1036, 1998.

[19] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, IHES, Octobre 2000.

[20] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, Invent. Math. 147, 2002.

[21] Laumon G., Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions, Duke Math. J. 54, n°2, 1987.

[22] Laumon G., Faisceaux automorphes pour GL(n) : la première construction de Drinfeld, arXiv :alg-geom/9511004v1 7Nov 1995.

[23] Laumon G., Mauret-Bailly L., Champs algébriques, Springer Verlag, 2000.

[24] Oesterlé J. Construction de la variété de modules des fibrés stables sur une courbe algébrique lisse, dans Modules des fibrés stables ur les courbes algébriques, Verdier-Le Potier éditeurs, PM 54

[25] Serre J.-P., Groupes algébriques et corps de classes, Hermann paris, 1959.

[26] Seshadri C. S., Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, Astérisque 96, Soc. Math. France, 1982.

[27] Stacks Project, http ://stacks.math.columbia.edu/

[28] Weil A., Dirichlet Series and Automorphic Forms, LN 189, Springer Verlag, 1971.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: `marc.reversat@math.univ-toulouse.fr`