AUTOMORPHE VERS GALOIS

MARC REVERSAT

Résumé. L'ambition de cette note est de donner un résumé succinct des travaux de Vincent Lafforgue sur le sujet évoqué par le titre.

Table des matières

1. Notations, définitions

Soient
— $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments,

Date: 18 mai 2019.

— X une courbe définie sur k, projective, lisse et géométriquement irréductible,
— F le corps des fonctions rationnelles sur X, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, $\mathbb{A}^\times$ le groupe des idèles de F et si $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau de valuation du complété F_v de F en la place $v \in |X]$, $\mathbb{O} = \prod_{v\in|X]} \mathcal{O}_v$, $\mathbb{O}^\times = \prod_{v\in|X]} \mathcal{O}_v^\times$,
— G un groupe réductif connexe sur F, que l'on supposera déployé et qui sera GL_n, chaque fois que cela simplifiera notre propos,
— un nombre premier ℓ qui ne divise pas q et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$,
— un sous-schéma fermé fini N de X (un niveau) et $K_N = \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathbb{O}_N))$, avec $\mathbb{O}_N = \prod_{v\in|N|} \mathcal{O}_v$.

Soit

$$\mathcal{C}\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A})\ ,\ \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$$

l'espace des fonctions automorphes sur $G(\mathbb{A})$, c'est à dire des fonctions $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, invariante à gauche sous $G(F)$ et à droite sous un sous groupe ouvert compact K (dépendant de φ), invariante aussi sous $a^{\mathbb{Z}}$, pour un certain $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul.

Soit

$$\mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A})\ ,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

le sous espace du précédent formé par les fonctions automorphes paraboliques (cuspidales), c'est à dire qui de plus vérifient, où φ désigne une telle fonction : pour tout sous-groupe parabolique propre P de G de radical unipotent U, on a pour tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi(ug)du = 0\ .$$

Si Ξ est un réseau de $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$, où Z désigne le centre de G, c'est à dire un $\mathbb{Z}$-module de type fini et de covolume fini (par exemple si $G = \mathrm{GL}_n$, on peut choisir $\Xi = a^{\mathbb{Z}}$, où $a \in \mathbb{A}^\times$ et est de degré non nul), on considère aussi l'espace des fonctions paraboliques Ξ-invariantes et K- invariantes à droite, où K est un sous -groupe ouvert compact ; cet espace se note

$$\mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/(\Xi\cdot K)\ ,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\ ,$$

il est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ([6]).

2. Le problème de Langlands pour GL_n

2.1. **Les représentations ℓ-adiques galoisiennes.** Soient $\overline{F}$ une clôture algébrique de F, fixée, $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. On pose $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$.

Soient $x \in |X|$ et $\overline{x}$ un point de $\overline{X}$ au dessus de x ; le groupe de décomposition de x est

$$D_x = \Big\{ \sigma \in \mathcal{G}_F \ / \ \sigma(\overline{x}) = \overline{x} \Big\} \ ,$$

changer de point $\overline{x}$ au dessus de x revient à conjuguer ce groupe D_x, donc il est défini à conjugaison près. Soient $k(x)$ le corps résiduel en x et $\overline{k(x)}$ l'une de ses clôture algébrique. On sait que $Gal(\overline{k(x)}/k(x))$ est topologiquement engendré par le Frobenius géométrique Fr_x, c'est à dire l'inverse de $\lambda \mapsto \lambda^{q_x}$, où $q_x = \sharp(k(x))$. On a aussi un homomorphisme surjectif naturel

$$D_x \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$$

dont le noyau I_x est le groupe d'inertie de x.

On dit qu'un homomorphisme ρ de $\mathcal{G}_F$ dans un groupe H (une représentation de $\mathcal{G}_F$) est non ramifié en x si $I_x \subset \mathrm{Ker}\rho$ (ceci ne dépend pas du choix de $\overline{x}$), dans ce cas $\rho(\mathrm{Fr}_x) \in H$ est bien défini, sinon c'est une classe de conjugaison.

On s'intéresse aux représentations de $\mathcal{G}_F$ à valeurs dans $G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$, continues pour les topologies profinie de $\mathcal{G}_F$ et ℓ-adique de $G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Une représentation ℓ-adique de dimension n de $\mathcal{G}_F$ est un homomorphisme $\rho : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ possédant les propriétés suivantes

(1) ρ se factorise : $\rho : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_n(E) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$, où $E/\mathbb{Q}_\ell$ est une extension finie dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, ρ est continue ;

(2) ρ est non ramifiée sauf en un nombre fini de points $x \in |X|$.

Soit $\mathcal{G}^n$ l'ensemble des classes d'équivalence de ces représentations irréductibles.

Étant donné une telle représentation on considère l'ensemble des classes de conjugaison $\{\rho(\mathrm{Fr}_x)\}_{x\in|X|}$ dans $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$, à chaque classe de conjugaison on associe la collection non ordonnée de ses valeurs propres

$$\{z_1(\mathrm{Fr}_x), \cdots, z_n(\mathrm{Fr}_x)\}$$

où $x \in |X|$ et ρ est non ramifié en x. Une conséquence du théorème de densité de Tchebotrev dit que si deux telles représentations (ℓ-adiques, de dimension n et irréductibles) ont leurs collections de valeurs propres coïncidant sauf pour un nombre fini de points x, alors elles sont équivalentes.

2.2. **Les représentations automorphes.** Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ opère à droite sur $\mathcal{C}_c := \mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A})\ ,\ \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$, cet espace se décompose sous cette action en uns somme directe de facteurs irréductibles ([14], [**?**]). Ces représentations sont dites paraboliques (ou automorphes paraboliques).

On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des classes d'équivalence de ces représentations irréductibles.

Soit π une représentation parabolique irréductible. Il existe une partie finie S de $|X|$ telle que π_x soit non ramifiée en $x \notin S$, où π_x désigne la représentation π restreinte aux fonctions de la coordonnée x, non ramifiée voulant dire que π_x possède un vecteur non nul v_x, stable sous $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$, qui de fait est unique à un multiple scalaire près. On en fixe un pour chaque x (où π_x est non ramifié). On a

$$\pi = \otimes'_{x\in|X|}\pi_x$$

où à droite se trouve l'espace engendré par les $\otimes_{x\in|X|}w_x$ avec $w_x \in \pi_x$ et $w_x = v_x$ p.p. dans $|X| - S$.

Pour tout $x \in |X|$ soit $\mathcal{H}_x$ l'espace des fonctions

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)\backslash\mathrm{GL}_n(F_x)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

à supports compacts et muni du produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f_1(gh)f_2(h^{-1})dh$$

(la mesure de Haar choisie sur $\mathrm{GL}_n(F_x)$ vérifie $\int_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)} dx = 1$). $\mathcal{H}_x$ s'appelle l'algèbre de Hecke en x.

On a l'isomorphisme d'algèbre

$$\mathcal{H}_x \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}\left[z_1^{\pm1}, \cdots z_n^{\pm1}\right]^{S_n} \tag{1}$$

où S_n désigne le groupe symétrique de rang n. On va expliquer cet isomorphisme plus loin.

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_x$ agit sur les représentations non ramifiées π_x de $\mathrm{GL}_n(F_x)$ et laisse globalement stable le sous-espace de dimension 1 des vecteurs $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_x)$-invariants. Sur ce dernier espace $\mathcal{H}_x$ agit comme un caractère, donc est caractérisé par une collection d'éléments non nuls de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, notée

$$\{z_1(\pi_x), \cdots, z_n(\pi_x)\}$$

et définie à permutation près.

Donc à toute représentation irréductible parabolique π se trouve associée la collection des valeurs propres des opérateurs de Hecke

$$\{z_1(\pi_x), \cdots, z_n(\pi_x)\}_{x\in|X|-S}\ .$$

Le théorème de multiplicité forte de Piatetski-Shapiro dit que cette collection détermine π à isomorphisme près.

2.3. **La correspondance de Langlands.**

Théorème 2.1. *(Drinfeld pour* GL_2 *et Laurent Lafforgue pour* GL_n*) Les ensembles* $\mathcal{A}_n$ *et* $\mathcal{G}^n$ *sont en bijection de telle manière que si* $\pi \in \mathcal{A}_n$ *est associé à* $\rho \in \mathcal{G}^n$ *l'on ait l'égalité des ensembles*

$$\{z_1(\pi_x), \cdots, z_n(\pi_x)\} = \{z_1(\mathrm{Fr}_x), \cdots, z_n(\mathrm{Fr}_x)\}$$

pour presque tout x*.*

2.4. **La formule (1).** Soit G un groupe réductif déployé sur $\mathbb{F}_q$, c'est à dire qu'il possède une tore maximal T isomorphe à une puissance du groupe multiplicatif, soient P et P^v les réseaux des caractères et cocaractères, Δ et Δ^v les racines et coracines de G dans P et P^v.

Soit $x \in |X|$. L'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}\left(G(F_x), G(\mathcal{O}_x)\right)$$

admet la même définition que pour GL_n.

Considérons le morphisme de restriction

$$\mathcal{H}\left(G(F_x), G(\mathcal{O}_x)\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(T(F_x), T(\mathcal{O}_x)\right) \ .$$

L' algèbre de Hecke du tore T est facile à décrire : si t_x est une uniformisante de $\mathcal{O}_x$, on a

$$T(\mathcal{O}_x)\backslash T(F_x)/t(\mathcal{O}_x) = \left\{\lambda(t_x)\right\}_{\lambda \in P^v}$$

donc

$$\mathcal{H}\left(T(F_x), T(\mathcal{O}_x)\right) \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}\left[P^v\right] \ .$$

Théorème 2.2. *(L'isomorphisme de Satake) La restriction*

$$\mathcal{H}\left(G(F_x), G(\mathcal{O}_x)\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(T(F_x), T(\mathcal{O}_x)\right)$$

est un homomorphisme injectif, son image est $\overline{\mathbb{Q}_\ell}\left[P^v\right]^W$ *où* W *est le groupe de Weyl de* G*.*

Une remarque cruciale de Langlands est que $\overline{\mathbb{Q}_\ell}\left[P^v\right]^W$ est l'anneau des représentations de ${}^LG(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. En effet soit $\mathrm{Rep}^LG(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ l'anneau de Grothendieck engendré par les représentations de dimensions finies de ${}^LG(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$, alors le morphisme $\mathrm{Rep}^LG(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}\left[P^v\right]$, qui à une représentation associe son caractère, est injectif et a pour image $\overline{\mathbb{Q}_\ell}\left[P^v\right]^W$. Donc l'isomorphisme de Satake s'écrit aussi

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}\left(G(F_x), G(\mathcal{O}_x)\right) \simeq \mathrm{Rep}^LG(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \ .$$

3. Des fonctions aux faisceaux

L'algèbre de Hecke globale $\mathcal{H}$ est pas définition

$$\mathcal{H} = \otimes'_{x\in|X|}\mathcal{H}_x$$

c'est à dire l'espace sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ des combinaisons linéaires finies des expressions de la forme $\otimes_{x\in|X|}f_x$ où pour presque tout x f_x est l'élément unitaire de l'algèbre $\mathcal{H}_x$. Muni du produit de convolution (toujours pour la mesure de Haar qui attribue la valeur 1 à la mesure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$). L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ agit sur l' espace $\mathcal{C}(\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}))$ par le produit de convolution.

Soit $x \in |X|$. Soit π une représentation ℓ-adique de $\mathrm{GL}_n(F_x)$, resp. de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, elle est dite lisse si tout vecteur de π est stable sous un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_n(F_x)$, resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$.

Soit π une représentation ℓ-adique lisse de $\mathrm{GL}_n(F_x)$, alors $\pi^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$ est muni d'ne action de $\mathcal{H}_x$ ainsi définie : si $v \in \pi^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$ et $f \in \mathcal{H}_x$, on pose

$$f.v = \int_{\mathrm{GL}_n(F_x)} f(g)\cdot\pi(g)v\ dg$$

La représentation est dite sphérique si $\pi^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)} \neq 0$. Il n'est pas difficile de montrer le

Lemme 3.1. *Si π est une représentation lisse sphérique irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_x)$, alors $\pi^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)}$ est une représentation irréductible de $\mathcal{H}_x$.*

On note Bun_n l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés de rang n sur X, on a une bijection

$$\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}) \leftrightarrows \mathrm{Bun}_n \tag{2}$$

qui permet d'interpréter les formes automorphes comme des fonctions sur Bun_n. L'algèbre de Hecke s'interprète alors comme une algèbre de correspondances sur $\mathrm{Bun}_n \times \mathrm{Bun}_n$.

Soit $x \in |X|$. Soit H^i_x l'ensemble des classes d'isomorphisme des triplets $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \beta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}')$ où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont des fibrés vectoriels de rans n sur X et β est un plongement de conoyau supporté par x et isomorphe à $(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-x))^i$ (on écrit en général $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-x)$, c'est le faisceau structural du schéma $\{x\}$). On note H^i la réunion des H^i_x, $x \in |X|$, donc l'ensemble des classes d'isomorphisme des $(x, \mathcal{M}, \mathcal{M}', \beta :$

$\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$), où $x \in |X|$ est le support du conoyau de β. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & H^i & \\ h^{\leftarrow} \swarrow & & \searrow \operatorname{supp} \times h^{\rightarrow} \\ \mathrm{Bun}_n & & X \times \mathrm{Bun}_n \end{array}$$

avec $h^{\leftarrow}$ qui envoie $(x, \mathcal{M}, \mathcal{M}', \beta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}')$ sur $\mathcal{M}$, supp sur x et $h^{\rightarrow}$ sur $\mathcal{M}'$.

On a un diagramme analogue, local, avec H^i_x

$$\begin{array}{ccc} & H^i_x & \\ h^{\leftarrow}_x \swarrow & & \searrow h^{\rightarrow}_x \\ \mathrm{Bun}_n & & \mathrm{Bun}_n \end{array}$$

avec $h^{\leftarrow}_x$ qui envoie $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \beta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}')$ sur $\mathcal{M}$ et $h^{\rightarrow}_x$ sur $\mathcal{M}'$.

On peut remarquer qu'étant donné $x \in |X|$ et $\mathcal{M} \in \mathrm{Bun}_n$, la fibre de $h^{\leftarrow}_x$ au dessus de $\mathcal{M}$ s'identifie avec l'ensemble des sous-espaces de dimension i (sur $\mathcal{O}_x$) de $\mathcal{M}_x$, tandis que la fibre de $h^{\rightarrow}_x$ au dessus de $\mathcal{M}'$ le fait avec les sous-espaces de $\mathcal{M}'_x$ de dimension $n-i$. Donc $(h^{\leftarrow}_x)^{-1}(\mathcal{M}) = \mathrm{Gr}^i(\mathcal{M}_x)(\mathcal{O}_x)$ et $(h^{\rightarrow}_x)^{-1}(\mathcal{M}') = \mathrm{Gr}^{n-i}(\mathcal{M}'_x)(\mathcal{O}_x)$.

Soit $f : \mathrm{Bun}_n \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ une fonction sur Bun_n, on pose $(h^{\rightarrow}_x)^*(f) = f \circ h^{\rightarrow}_x$ tandis que si u est cette fois une fonction définie sur H^i_x on désigne par $(h^{\leftarrow}_x)_!(u)$ la somme des valeurs de u le long des fibres (qui sont finies puisque le corps de base est fini)

Soit $f : \mathrm{Bun}_n \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ une fonction, alors

$$(h^{\leftarrow}_x)_!((h^{\rightarrow}_x)^*(f)) = T_{i,x}(f) \tag{3}$$

où $T_{i,x} \in H_x$ est la fonction caractéristique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x) d_i \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_x)$, où $d_i = (\varpi_x, \cdots, \varpi_x, 1, \cdots, 1)$ a ses i premiers termes égaux à l'uniformisante ϖ_x en x, les autres étant égaux à 1 (cf 2.4).

La condition de parabolicité peut ausi être géométrisée. Soit $n = n_1 + n_2$ une décomposition de n suivant deux entiers naturels. Soit $Dr^n_{n_1,n_2}$ les classes d'isomorphisme des suites exactes de fibrés vectoriels sur X

$$0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}_2 \to 0$$

où $\mathcal{M}_1$ est de rang n_1, $\mathcal{M}_2$ de rang n_2. On a les applications

$$\mathrm{Bun}_n \overset{\alpha}{\leftarrow} Dr^n_{n_1,n_2} \overset{\beta}{\rightarrow} \mathrm{Bun}_{n_1} \times \mathrm{Bun}_{n_2}$$

où α envoie la suite exacte sur $\mathcal{M}$ et β sur $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$. Soit $Fonc(\mathrm{Bun}_n)$ les fonctions sur Bun_n, à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, etc., considérons

$$\begin{array}{ccc} Fonc(\mathrm{Bun}_n) & \longrightarrow & Fonc(Bun_{n_1} \times \mathrm{Bun}_{n_2}) \\ f & \longmapsto & \beta_!(\alpha^*(f)) \end{array}$$

alors f est parabolique, via la relation (2), si et seulement si son image est ici 0.

3.1. **Globalisation.** Le champ de Hecke $\mathcal{H}^i$ sur $\mathbb{F}_q$ est ainsi défini : pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{H}^i(S) = \mathrm{Hom}_{/\mathbb{F}_q}(S, \mathcal{H}^i)$est la catégorie dont les objets sont les quadruplets $(\phi, \mathcal{M}, \mathcal{M}', \beta)$, où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont des fibrés vectoriels de rang n sur $X \times S$, où $\beta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}'$ est un plongement dont le conoyau est supporté par le graphe du morphisme $\varphi : S \to X$ et est sur ce graphe un fibré vetoriel de rang i.

On a le diagramme de champs sur $\mathbb{F}_q$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}^i & \\ h^{\leftarrow} \swarrow & & \searrow \mathrm{supp} \times h^{\rightarrow} \\ \underline{\mathrm{Bun}}_n & & X \times \underline{\mathrm{Bun}}_n \end{array}$$

où pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, $h^{\leftarrow}$ qui envoie $(\varphi, \mathcal{M}, \mathcal{M}', \beta)$ sur $\mathcal{M}$, supp sur φ et $h^{\rightarrow}$ sur $\mathcal{M}'$.

Pour $S = \{x\}$, où $x \in |X|$, on retrouve les définitions et diagramme précédents.

Le foncteur de Hecke $T^i : D^b(\underline{\mathrm{Bun}}_n) \to D^b(X \times \underline{\mathrm{Bun}}_n)$ est défini par

$$\mathcal{K} \longmapsto (\mathrm{supp} \times h^{\rightarrow})_! \left((h^{\leftarrow})^*(\mathcal{K})\right) [i(n-i)]$$

Il faut noter que $D^b(\underline{\mathrm{Bun}}_n)$, $D^b(X \times \underline{\mathrm{Bun}}_n)$, sont des catégories de complexes de faisceau ℓ-adiques sur un champ ; elles sont définies naturellement.

Soit $\pi : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ une représentation et désignons par $\mathcal{E}_\pi$ le système local sur X correspondant. Un objet $\mathcal{K}_\pi$ de $D^b(\underline{\mathrm{Bun}}_n)$ est appelé un faisceau propre de Hecke relativement à π si pour tout $i = 1, \cdots, n$ il existe un isomorphisme (dans le champ $D^b(X \times \underline{\mathrm{Bun}}_n)$)

$$T^i(\mathcal{K}_\pi) \simeq \bigwedge^i (\mathcal{E}_\pi) \boxtimes \mathcal{K}_\pi \ .$$

4. Automorphe vers Galois

Il s'agit de montrer l'existence d'opérateurs sur

$$\mathcal{C}_c \left(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / (\Xi \cdot K_N), \overline{\mathbb{Q}_\ell} \right)$$

qui est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ ([6]), où G est un groupe réductif déployé et chaque fois que cela simplifiera ce sera GL_n, Ξ un réseau de $Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$, N un sous-schéma fermé fini de X et K_N est le noyau du morphisme naturel $G(\mathbb{O}) \to G(\mathbb{O}_N)$. Cela va se faire en expliquant le diagramme, ses termes et ses morphismes,

$$\begin{aligned} S_{I,f,\gamma} : \quad & H_{\emptyset,1,N} \xrightarrow{\sim} H_{\{1\},1,N} \xrightarrow{H(x)} H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}},N} \xrightarrow{\sim} H_{I,W,N} \\ & \xrightarrow{\gamma} H_{I,W,N} \xrightarrow{\sim} H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}},N} \xrightarrow{H(\varphi)} H_{\{1\},1,N} \xrightarrow{\sim} H_{\emptyset,1,N} \end{aligned} \tag{4}$$

où

— I est un ensemble fini,

— $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I/Z(\widehat{G}))$, $\widehat{G}$ étant le dual de Langlands de G,

— $x : 1 \to W^{\mathrm{diag}}$ et $\varphi : W^{\mathrm{diag}} \to 1$ sont des morphismes de $\widehat{G}$-représentations, $\widehat{G}$ étant plongé diagonalement dans $\widehat{G}^I$,

— $\gamma \in \pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$, η étant un point générique de X et $\overline{\eta}$ un point géométrique au dessus de η,

— où f désigne la fonction sur $\widehat{G}\backslash\widehat{G}^I/\widehat{G}$ vérifiant $f(g) = \varphi(gx)$ pour tout $g \in \widehat{G}^I$.

$S_{I,f,\gamma}$ s'appelle un opérateur d'excursion, en fait il ne dépend que de f.

4.1. **Les champs de chtoucas.** Soient I un ensemble fini, $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ une représentation algébrique irréductible de $Z(\widehat{G})\backslash\widehat{G}^I$ de plus haut poids le caractère $w = (w_i)_{i\in I}$ de $Z(\widehat{G})\backslash\widehat{T}^I$, ou $\widehat{T}$ est le tore maximal de $\widehat{G}$ dual de celui T de G.

Définition 4.1. *Soit $S \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ un schéma. Un G-chtouca sur S relativement à I et W est la donnée d'un triplet $E = (E, (x_i)_{i\in I}, \Phi)$ où E est un G-torseur sur $X \times S$, $(x_i)_{i\in I}$ des points de $X(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/\mathbb{F}_q}(S, X)$, les pattes du chtouca , et Φ est un isomorphisme de G-torseurs*

$$\Phi : {}^{\tau}E|_{(X\times S)-\cup_{i\in I}\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} E|_{(X\times S)-\cup_{i\in I}\Gamma_{x_i}}$$

dont l'ordre des singularités en chaque x_i est borné par w_i.

Soit N un diviseur de X et supposons que les x_i ne soient pas dans le support de N, alors une structure de niveau N sur le G-chtouca E est la donnée d'une trivialisation $E|_{N\times S} \simeq G(\mathcal{O}_{N\times S})$ compatible avec l'isomorphisme Φ.

Expliquons la condition sur les singularités de Φ, pour $G = \mathrm{GL}_n$ et en supposant que les x_i sont deux à deux disjoints. Le torseur est alors un fibré vectoriel et Φ devient un isomorphisme de fibrés. Alors les modifications des fibrés vectoriels sur $X \times S$ sont classifiés par des matrices diagonales (grâce aux diviseurs élémentaires), qui peuvent être vus comme des poids : en dehors de Γ_{x_i} l'isomorphisme venant d'une modification en x_i est en fait un poids dans $\widehat{T}$ ou un copoids de T.

On désigne par $\underline{\mathrm{Cht}}_{I,W,N} \to (X-N)^I$ (et quelque fois on oubliera le N dans cette écriture) le champ de Deligne-Mumford réduit des G-chtoucas relativement à I et W et munis de structures de niveau N, et par $\underline{\mathrm{Cht}}_{I,N} \to (X-N)^I$ le ind-champ de Deligne-Mumford réduit des G-chtoucas relativement à I, sans qu'il soit précisé une borne des singularités aux pattes, et munis de structures de niveau N.

Il faut remarquer que le morphisme d'oubli $\underline{\mathrm{Cht}}_{I,W,N} \to \underline{\mathrm{Cht}}_{I,W,\emptyset}$ est fini, étale et galoisien de groupe $G(\mathcal{O}_N)$, $\mathcal{O}_N$ étant le faisceau structural du schéma réduit N.

Si E et L sont respectivement des G-torseurs et Z-torseur sur $X \times S$, où, Z est le centre de G, alors $L \times_{X\times S} E$ est encore un G-torseur sur $X\times S$, on a donc une action de $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}_X)$ sur $\underline{\mathrm{Cht}}_{I,W,N} \to (X-N)^I$. Ceci permet de choisir un réseau Ξ de $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}_X)$ agissant librement sur $\underline{\mathrm{Cht}}_{I,W,N}$ (donc suffisamment grand) et de définir le champ de de Deligne-Mumford réduit

$$\pi_{I,W,N} : \mathrm{Cht}_{I,W,N} := \underline{\mathrm{Cht}}_{I,W,N}/\Xi \longrightarrow (X-N)^I$$

Le champ $\mathrm{Cht}_{I,W,N}$ est de de Deligne-Mumford , localement de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$, et il n'est pas de type fini (sauf dans le cas $G = \mathbb{G}_m$). D'où la nécessité d'introduire sa partie "Hecke finie".

4.1.1. *Troncatures.* Ici on suppose que $G = \mathrm{GL}_n$. Soit $E = (E, (x_i)_{i\in I}, \Phi)$ un G-chtouca sur S, un sous objet $E' = (E', (x_i)_{i\in I}, \Phi')$ de E est par définition un sous-G-torseur E' de E ayant les mêmes pattes, maximal, c'est à dire tel que E/E' soit sans torsion, et tel que Φ' soit la restriction de Φ.

Soit une filtration

$$\{0\} = E_0 \underset{\neq}{\subset} E_1 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} E_k = E$$

du chtouca E par des sous-objets, on lui associe un polygone p défini par

$$p : [0,n] \to \mathbb{R}\ ,\ p(0) = p(n) = 0\ ,\ p(\mathrm{rg}E_i) = \deg E_i - \frac{\mathrm{rg}E_i}{n} \deg E$$

Il est un de ces polygones qui est plus grand que tous les autres, c'est le polygone (canonique) de Harder-Narasimhan du chtouca E.

Soit μ un copoids dominant du groupe adjoint de G (donc pour $G = \mathrm{GL}_n$ un poids de GL_n), on désigne par $\mathrm{Cht}^{\mu}_{I,W,N}$ le sous champ de $\mathrm{Cht}_{I,W,N}$ des chtoucas dont le polygone de Harder-Narasimhan est borné par μ. C'est un sous-champ ouvert, un champ de de Deligne-Mumford de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. En fait $\mathrm{Cht}^{\mu}_{I,W,N}$ est un schéma si le nombre de points de N est assez grand (relativement à μ). On note

$$\pi^{\mu}_{I,W,N} : \mathrm{Cht}^{\mu}_{I,W,N} \longrightarrow (X-N)^I$$

la projection, qui donc est de type fini. Soit F un complexe de faisceaux ℓ-adiques, on définit la cohomologie relative à supports compacts $R^i(\pi_{I,W,N})_!(F)$ par la limite inductive suivant μ

$$R^i(\pi_{I,W,N})_!(F) = \varinjlim R^i\left(\pi^{\mu}_{I,W,N}\right)_!\left(F|_{\mathrm{Cht}^{\mu}_{I,W,N}}\right)$$

C'est une limite inductive de faisceaux constructibles ℓ-adiques sur $(X-N)^I$.

Un G-chtouca sur $X\times S$ de type $(I=\emptyset, W=1)$ muni de la structure de niveau $N=\emptyset$ (i.e. sans structure de niveau) est simplement un G-torseur E sur $X\times S$ muni d'un isomorphisme $\Phi : {}^{\tau}E \xrightarrow{\sim} E$. Alors,si S est connexe, E est image inverse par la projection $p : X\times S\to X$ d'un G-torseur sur X. En effet soit E' le faisceau sur X défini sur tout ouvert V par $E'(V) = E(V\times S)^{(\mathrm{Id}_X\times\mathrm{Frob}_S)}$, où l'exposant signifie que l'on prend les sections invariantes sous $\mathrm{Id}_X\times\mathrm{Frob}_S$; on a clairement un morphisme $p^*(E')\to E$ dont on vérifie que c'est un isomorphisme aux fibres. Donc dans cette situation le champ des chtoucas est discret et est issu du groupoïde des $\mathbb{F}_q$-points du champ des G-torseurs sur X, et ce dernier est le groupoïde

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\left(\Xi\ G(\mathbb{O})\right)\ .$$

La cohomologie de ce champ à supports compacts et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est concentrée en degré 0 et est le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\left(\Xi\ G(\mathbb{O})\right), \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$$

de fonctions localement constantes et à supports compacts. Il n'est pas de dimension finie, contrairement à son sous-espace

$$\mathcal{C}_c := \mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\left(\Xi\ G(\mathbb{O})\right), \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$$

des formes paraboliques ([6]).

Dans le cas où $N\neq\emptyset$, avec toujours $(I,W)=(\emptyset,1)$, on a une conclusion analogue avec l'espace

$$\mathcal{C}_N := \mathcal{C}\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\left(\Xi\ K_N\right), \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)\ .$$

4.1.2. *Le complexe d'intersection.* Le morphisme de champs sur $\mathbb{F}_q$

$$\pi_{I,W,N} : \mathrm{Cht}_{I,W,N} \longrightarrow (X-N)^I$$

n'est pas lisse (sauf si $G = \mathbb{G}_m$). On sait que si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, pur de dimension n, et $U \overset{j}{\hookrightarrow} S$ un ouvert de Zariski dense et lisse, alors on peut prendre comme définition du complexe d'intersection de S

$$\mathrm{IC}_S = j_{!*}\overline{\mathbb{Q}_\ell}[n]$$

où $j_{!*}$ désigne le foncteur "extension intermédiaire", c'est à dire que $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est vu comme un faisceau pervers sur U placé en degré 0 et $j_{!*}\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est l'unique (à quasi-isomorphisme près) faisceau pervers sur S (extension à S) qui n'a pas de quotient ou de sous-objet de la forme $i_*(A)$, où $i : (S-U) \hookrightarrow S$ est l'inclusion et A un faisceau pervers sur $(S-U)$.

La définition d'un tel objet sur un champ de Deligne-Mumford sur $\mathbb{F}_q$ peut se décalquer sur celle-ci, puisqu'un tel champ possède une présentation schématique. On y reviendra plus loin, au moins pour le champ $\mathrm{Cht}_{I,W,N}$.

Définition 4.2. *On pose*

$$\mathcal{H}^\mu_{I,W,N} = R^0\left(\pi^\mu_{I,W,N}\right)_!\left(\mathrm{IC}_{\mathrm{Cht}^\mu_{I,W,N}}\right)$$

Donc $\mathcal{H}^\mu_{I,W,N}$ est une cohomologie à supports compacts (cf [12]), en degré 0 (pour la normalisation perverse), elle dépend du choix de Ξ. On pourrait n'utiliser que la cohomologie étale des schémas car dès que N a suffisamment de points devant μ $\underline{\mathrm{Cht}}^\mu_{I,W,N}$ est un schéma de type fini (ce dernier champ n'a pas été défini, mais il peut se deviner), et $\mathrm{Cht}^\mu_{I,W,N}$ en est un quotient par un groupe fini.

4.1.3. *Les grassmanniennes affines.* Soit I un ensemble fini (d'entiers naturels) et $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ une représentation algébrique irréductible de $\widehat{G}^I$ de plus haut poids $w = (w_i)_{i\in I} \in X^*(\widehat{T}^I)$.

Définition 4.3. *(Beilinson-Drinfeld) La grassmannienne affine de G relative à I et W est le foncteur $\mathrm{Gr}_{I,W}$ qui à tout $\mathbb{F}_q$-schéma S associe l'ensemble des familles $((x_i)_{i\in I}, E, \phi)$ où $(x_i)_{i\in I} \in X(S)^I$, où E est un torseur sur $X \times S$ et où*

$$\phi : G_{(X\times S)-\cup_{i\in I}\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} E_{(X\times S)-\cup_{i\in I}\Gamma_{x_i}}$$

est une trivialisation ; on suppose aussi que les zéros et pôles en les x_i sont bornés par les w_i. Ce foncteur est un schéma de type fini sur X^I, on lui impose d'être réduit.

Pour bien préciser ceci, comme sa nature schématique, on regarde d'abord ce foncteur restreint au cas où le x_i sont deux à deux disjoints. On peut aussi donner cette définition dans le cas où la représentation W n'est pas irréductible, on définit alors $\mathrm{Gr}_I \to X^I$ sans imposer de conditions avec une représentation, c'est un ind-schéma réduit et on définit $\mathrm{Gr}_{I,W}$ lorsque W n'est pas irréductible comme étant la réunion dans Gr_I des $\mathrm{Gr}_{I,W'}$ suivant les facteurs irréductibles W' de W.

Soit $\zeta : I \to J$ une application entre deux ensembles finis. Soient qui s'en déduisent $\zeta_* : \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I) \to \mathrm{Rep}(\widehat{G}^J)$ le foncteur entre les catégories des représentations de dimensions finies, et $\zeta^* : X^J \to X^I$ le morphisme de schémas. Pour tout $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$ on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Gr}_{I,W} \times_{X^I} X^J \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{J,\zeta_* W}$$

d'où un isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_I \times_{X^I} X^J \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_J$$

par suite un morphisme canonique

$$\zeta^* : \mathrm{Gr}_J \longrightarrow \mathrm{Gr}_I$$

dont il résulte entre les catégories de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux constructibles

$$\zeta_* = (\zeta^*)^* : D^b_c(\mathrm{Gr}_I) \longrightarrow D^b_c(\mathrm{Gr}_J)$$

Soit $\mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_I)$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux pervers supportés par une sous-variété de type fini de Gr_I et normalisés relativement à x^I.

Théorème 4.4. *([13]) Il existe un foncteur canonique* $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I) \to \mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_I)$*, noté* $W \mapsto \mathcal{I}_{I,W}$*, tel que pour tout* $\zeta : I \to J$ *l'on ait un isomorphisme canonique entre foncteurs de* $\mathrm{Rep}(\mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_I)) \to \mathrm{Perv}(\mathrm{Gr}_J)$

$$\mathcal{I}_{J,\zeta_*\,\cdot} \xrightarrow{\sim} \zeta_* \mathcal{I}_{I,\,\cdot}$$

Si $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$ *est irréductible,* $\mathcal{I}_{I,W}$ *est isomorphe au complexe d'intersection de* $\mathrm{Gr}_{I,W}$ *normalisé relativement à* X^I*.*

4.2. **Les morphismes de Frobenius partiels et les chtoucas itérés.** Conformément à une définition précédente on pose

$$\mathcal{H}_{I,W,N} = \lim_{\to \mu} \mathcal{H}^{\mu}_{I,W,N}$$

c'est une limite inductive de faisceaux constructibles sur $(X - N)^I$.

Définition 4.5. *Soient* I *un ensemble fini,* $\underline{I} = (I_1, \cdots, I_k)$ *une partition de* I*,* N *un sous schéma fini fermé de* X *et* $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$ *une représentation irréductible de* $\widehat{G}^I$ *à valeur dans sous extension finie de*

$\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell$. *Le champ* $\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}$ *de Deligne-Mumford réduit classifie au dessus d'un schéma* $S/\mathbb{F}_q$ *les données*

$$\Big((x_i)_{i\in I},(\mathcal{G}_0,\psi_0)\overset{\phi_1}{\to}(\mathcal{G}_1,\psi_1)\overset{\phi_2}{\to}\cdots\overset{\phi_{k-1}}{\to}(\mathcal{G}_{k-1},\psi_{k-1})\overset{\phi_k}{\to}({}^\tau\mathcal{G}_0,{}^\tau\psi_0)\Big)$$

où

— *pour tout* $i\in I$, $x_i\in(X-N)(S)$,
— *pour tout* $j=0,\cdots,k-1$, $(\mathcal{G}_j,\psi_j)\in\mathrm{Bun}_{G,N}(S)$, *c'est à dire que* ψ_j *est une trivialisation de* $\mathcal{G}_j$ *sur* $N\times S$,
— *on écrit* $(\mathcal{G}_k,\psi_k)=({}^\tau\mathcal{G}_0,{}^\tau\psi_0)$ *et on demande que pour tout* $j=0,\cdots,k$ *les* ϕ_j *soient des isomorphismes*

$$\phi_j:\mathcal{G}_{j-1}|_{(X\times S)-\cup_{i\in I_j}\Gamma_{x_i}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{G}_j|_{(X\times S)-\cup_{i\in I_j}\Gamma_{x_i}}$$

tel que la position relative de $\phi_j(\mathcal{G}_{j-1})$ *dns* $\mathcal{G}_j$ *soit bornée par le copoids de* G *corresondant au poids dominant de* W_i *(ceci sera dit d'une autre manière plus loin),*
— *les* ϕ_j *induisent des isomorphismes sur* $N\times S$, *on leur impose d'être compatibles avec les structures de niveau.*

On définit aussi $\mathrm{Cht}_{\underline{I},N}$, $\mathrm{Cht}^{\mu}_{\underline{I},W,N}$ et le morphisme des pattes

$$\pi_{\underline{I},W,N}:\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}\longrightarrow(X-N)^I$$

Définition 4.6. *La grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld est l'ind-schéma* $\mathrm{Gr}_{\underline{I}}$ *sur* X^I *qui sur* S *classifie les*

$$\Big((x_j)_{j\in I},\mathcal{G}_0\overset{\phi_1}{\to}\mathcal{G}_1\overset{\phi_2}{\to}\cdots\overset{\phi_{k-1}}{\to}\mathcal{G}_{k-1}\overset{\phi_k}{\to}\mathcal{G}_k\underset{\sim}{\overset{\theta}{\to}}G_{X\times S}\Big)$$

où les $\mathcal{G}_j$ *sont des* G*-torseurs sur* $X\times S$, ϕ_j *un isomorphisme sur* $(X\times S)-\cup_{i\in I_j}\Gamma_{x_j}$.

On étend cette définition aux ind-schémas $\mathrm{Gr}_{\underline{I},W}$ de manière habituelle.

$\mathrm{Gr}_{\underline{I}}$ peut être aussi défini comme l'ind-schéma dont les S points classifient les mêmes objets, mais restreints aux voisinages formels des singularités ([1]), c'est à dire les

$$\Big((x_j)_{j\in I},\mathcal{G}_0\overset{\phi_1}{\to}\mathcal{G}_1\overset{\phi_2}{\to}\cdots\overset{\phi_{k-1}}{\to}\mathcal{G}_{k-1}\overset{\phi_k}{\to}\mathcal{G}_k\underset{\sim}{\overset{\theta}{\to}}G_{X\times S}\Big)$$

où les $\mathcal{G}_j$ sont des G-torseurs sur le voisinage formel $\Gamma_{\sum\infty x_j}$ de la réunion du graphe des x_j dans $X\times S$, où ϕ_j est un isomorphisme sur $\Gamma_{\sum\infty x_j}-\cup_{i\in I_j}\Gamma_{x_i}$ et θ une trivialisation de $\mathcal{G}_k$ La restriction à la Weil de G de $\Gamma_{\sum\infty x_j}$ à S, notée $G_{\sum\infty x_j}$, agit par changement de la trivialisation θ, d'où le morphisme naturel

$$\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}\longrightarrow\mathrm{Gr}_{\underline{I},W}/G_{\sum\infty x_j}$$

Remarquons que l'on a de même un morphisme

$$\mathrm{Cht}_{\underline{I},N} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{\underline{I}}/G_{\sum \infty x_j}$$

par lequel l'image inverse de $\mathrm{Gr}_{\underline{I},W}/G_{\sum \infty x_j}$ est $\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}$; ceci peut être vu comme une définiton de ce dernier.

Un résultat important, dont nous ne disons rien de la démonstration bien qu'elle ne soit pas immédiate, est le suivant

Proposition 4.7. *Soient $\underline{I} = (I_1, \cdots, I_k)$ une partition d'un ensemble fini I, $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I/Z(\widehat{G}))$ et N une structure de niveau, alors le morphisme de champs "oubli de la partition"*

$$\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{I,W,N}$$

est petit.

C'est à dire que les champs ont même cohomologie.

Proposition 4.8. *Pour tout $\underline{I}$, N et W, avec de plus W irréductible, on a un diagramme de champs sur $(X-N)^I$*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N} & & \mathrm{Gr}_{\underline{I},W} \times_{X^I} (X-N)^I \\ \searrow & & \swarrow \\ & \left(\mathrm{Gr}_{\underline{I},W} \times_{X^I} (X-N)^I\right)/G_{\sum \infty x_j} & \end{array}$$

les morphismes étant lisses et de même dimension relative.

Il suit que l'on peut transporter sur $\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}$ les faisceaux pervers définis sur $\mathrm{Gr}_{\underline{I},W} \times_{X^I} (X - N^I)$ et normalisés relativement à $(X-N)^I$, en particulier le complexe d'intersection de $\mathrm{Gr}_{\underline{I},W}$.

On désigne par $\mathrm{IndCons}(X^I)$ la catégorie de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux sur X^Iqui sont des limites inductives de faisceaux constructibles. Si $\zeta : I \to J$ est une application entre ensemble finis, il s'en déduit $\zeta^* : X^J \to X^I$ et $\zeta_* : \mathrm{IndCons}(X^I) \to \mathrm{IndCons}(X^J)$. Les faits racontés au dessus conduisent au

Théorème 4.9. *Il existe un foncteur canonique* $\mathrm{Rep}(G^I) \to \mathrm{IndCons}(X^I)$ *qui à toute représentation W associe*

$$\mathcal{H}_{I,W} = R^0(\pi_{I,W})_!(\mathcal{I}_{I,W})$$

Si $\zeta : I \to J$ est une application entre ensembles finis, il suit un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\mathcal{H}_{I,\zeta_*(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \zeta_* \mathcal{H}_{I,\bullet}$$

On a aussi l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}_{\emptyset,1} \simeq \mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\left(\Xi\ G(\mathbb{O})\right), \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$$

où à droite se trouve l'espace des formes paraboliques.

4.2.1. *Le lemme de Drinfeld.* Pour des ensembles finis $J \subset I$ on désigne par $F_I : (X-N)^I \to (X-N)^I$ le morphisme qui à $(x_i)_{i\in I}$ associe $(x'_i)_{i\in I}$ avec $x'_i = \mathrm{Frob}(x_i)$ si $i \in J$ et $x'_i = x_i$ sinon.

Soit $\underline{I} = (I_1, \cdots, I_k)$ une partition de l'ensemble fini I, on pose $\underline{I}^{(1)} = (I_2, \cdots, I_k, I_1)$. Soit

$$\mathrm{Frob}_{\underline{I},I_1} : \mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\underline{I}^{(1)},W,N}$$

défini par

$$\mathrm{Frob}_{\underline{I},I_1}\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{G}_0,\psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1,\psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1},\psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} ({}^\tau\mathcal{G}_0, {}^\tau\psi_0)\Big)$$
$$= \Big(\mathrm{Frob}_{I_1}((x_i)_{i\in I}), (\mathcal{G}_1,\psi_1) \xrightarrow{\phi_2} (\mathcal{G}_2,\psi_2) \xrightarrow{\phi_3} \cdots \xrightarrow{\phi_k} ({}^\tau\mathcal{G}_0, {}^\tau\psi_0) \xrightarrow{{}^\tau\phi_1} ({}^\tau\mathcal{G}_1, {}^\tau\psi_1)\Big)$$

Ce morphisme est appelé un morphisme de Frobenius partiel. C'est un homéomorphisme local totalement radiciel, d'où un isomorphisme canonique

$$\Big(\mathrm{Frob}_{\underline{I},I_1}\Big)^* \Big(\mathrm{IC}_{\mathrm{Cht}_{\underline{I}^{(1)},W,N}}\Big) \simeq \mathrm{IC}_{\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}}$$

Comme l'on a décomposé $\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}$ suivant le polynôme d'Harder-Narasimhan de $\mathcal{G}_1$ et que les modifications sont bornées en fonction de W il suit l'existence d'un entier κ, ne dépendant que de W et un morphisme fourni par l'isomorphisme précédent

$$F_{I_1} : (\mathrm{Frob}_{I_1})^* \Big(\mathcal{H}^{\leq\mu}_{I,W,N}\Big) \longrightarrow \mathcal{H}^{\leq\mu+\kappa}_{I,W,N}$$

Ce sont des morphismes de Frobenius partiels, que l'on utilisera surtout avec I_1 réduit à un élément. Remarquons que si $I = \{i_1, \cdots, i_n\}$, $F_{\{i_1\}} \circ \cdots F_{\{i_n\}}$ est le morphisme de Frobenius sur la cohomologie, de plus les $F_{\{i_j\}}$ commutent entre eux.

D'une manière générale, les morphismes de Frobenius partiels sont ainsi définis. Soit $\mathcal{L}$ un $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$-système local sur X^n, et soit F_i l'automorphisme de X^n qui est Frob_X sur la i-ème composante et Id_X sur les autres. Des morphismes de Frobenius partiels sont des isomorphismes $F_{i,\mathcal{L}} : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} F_i^*\mathcal{L}$ qui commutent entre eux.

Soient $\overline{\eta} \to X$ un point géométrique générique de la courbe X et $\Delta : X \to X^n$ le morphisme diagonal.

Lemme 4.10. *(Drinfeld) Considérons le foncteur défini sur la catégorie des $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$-systèmes locaux sur X^n et à valeurs dans celle des $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$-modules, qui au faisceau $\mathcal{L}$ associe sa fibre $\mathcal{L}|_{\Delta(\overline{\eta})}$. Ce foncteur induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$-systèmes locaux constructibles sur X^n munis de morpismes de Frobenius partiels, et la catégorie des représentations continues de $\pi_1(X,\overline{\eta})^n$ sur des $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$-modules de type fini.*

Cette équivalence envoie un système local de la forme $\boxtimes_1^n \mathcal{L}_i$ *(où* $\mathcal{L}_i$ *est un* $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$*-système local constructible sur* X*) munis des morphismes de Frobenius partiels standards sur la représentation* $\boxtimes_1^n (\mathcal{L}_i|_{\overline{\eta}})$ *de* $\pi_1(X,\overline{\eta})^n$*.*

Pour voir l'intérêt de ce lemme il faut remarquer que les groupes $\pi_1(X^n, \Delta(\overline{\eta}))$ et $\pi_1(X,\overline{\eta})^n$ ne sont pas proches, le premier ayant des morphismes de Frobenius en moins, comme c'est très bien expliqué dans [16], remarque 1.13.

On a défini précédemment les faisceaux $\mathcal{H}_{I,W,N}$. Soient $I = \{1, \cdots, n\}$ et $\underline{I} = \Big\{\{1\}, \cdots, \{n\}\Big\}$. On a défini des morphismes de Frobenius partiels sur le champ $\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N}$, et le morphisme oubli $\mathrm{Cht}_{\underline{I},W,N} \to \mathrm{Cht}_{I,W,N}$ est petit, donc les cohomologies d'intersection sont les mêmes. Autrement dit, et avec nos arguments c'est au moins vrai lorsque W est irréductible, les faisceaux $\mathcal{H}_{I,W,N}$ sont munis de Frobenius partiels.

Mais $\mathcal{H}_{I,W,N}$ n'est pas ici (contrairement au cas $G = \mathbb{G}_m$) une limite inductive de faisceaux constructibles et l'on ne peux appliquer le lemme de Drinfeld directement. Il y a alors deux options, celle de Laurent Lafforgue qui complète les champs, au prix de raisonnements extrêmement difficiles ([7], [9]), ou bien comme Vincent Lafforgue celle d'introduire la partie Hecke finie

$$H_{I,W,N} = \mathcal{H}_{I,W,N}|^{Hf}_{\Delta(\overline{\eta})} \subset \mathcal{H}_{I,W,N}|_{\Delta(\overline{\eta})}$$

qui est l'union de tous les sous $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$-modules de type fini stables sous l'action des opérateurs de Hecke en dehors de N et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}_\ell}$. C'est un vrai résultat de montrer que cette "cohomologie Hecke finie" est limite inductive de parties stables sous l'action des Frobenius partiels. Avec le lemme de Drinfeld il suit alors que $\mathcal{H}_{I,W,N}|^{Hf}_{\Delta(\overline{\eta})}$ est canoniquement muni d'une action de $\pi_1(\eta,\overline{\eta})^n$.

Lorsque $I = \emptyset$ et $W = 1$ il suit de l'identification comme ind-faisceaux sur $\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q$,

$$\mathcal{H}_{\emptyset,1,N} = \mathcal{C}\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X/\Xi \cdot K_N\ , \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$$

que

$$H_{I,W,N} = \mathcal{H}_{\emptyset,1,N}|^{Hf}_{\Delta(\overline{\eta})} = \mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X/\Xi \cdot K_N\ , \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right)$$

c'est la dire que la cohomologie Hecke finie est l'espace de dimension finie des fonctions paraboliques.

4.3. **Conclusion.** Rappelons la définition (4) des opérateurs d'excursion

$$\begin{aligned} S_{I,f,\gamma} : \quad & H_{\emptyset,1,N} \xrightarrow{\sim} H_{\{1\},1,N} \xrightarrow{H(x)} H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}},N} \xrightarrow{\sim} H_{I,W,N} \\ & \xrightarrow{\gamma} H_{I,W,N} \xrightarrow{\sim} H_{\{1\},W^{\mathrm{diag}},N} \xrightarrow{H(\varphi)} H_{\{1\},1,N} \xrightarrow{\sim} H_{\emptyset,1,N} \end{aligned}$$

où

— I est un ensemble fini,
— $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I/Z(\widehat{G}))$, $\widehat{G}$ étant le dual de Langlands de G,
— $x : 1 \to W^{\mathrm{diag}}$ et $\varphi : W^{\mathrm{diag}} \to 1$ sont des morphismes de $\widehat{G}$-représentations, $\widehat{G}$ étant plongé diagonalement dans $\widehat{G}^I$,
— $\gamma \in \pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$, η étant un point générique de X et $\overline{\eta}$ un point géométrique au dessus de η,
— où f désigne la fonction sur $\widehat{G}\backslash\widehat{G}^I/\widehat{G}$ vérifiant $f(g) = \varphi(gx)$ pour tout $g \in \widehat{G}^I$.

Les termes de cette formule sont maintenant expliqués, en particulier les première, troisième et cinquième flèches sont des isomorphismes d'après le théorème 4.9, l'action de γ est due au lemme de Drinfeld.

Soit $\mathcal{B}$ la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre engendrée par les opérateurs d'excursion $S_{I,f,\gamma}$, qui en fait ne dépendent que de f. Leur propriétés sont données dans le théorème 10.7 de [10], en particulier $\mathcal{B}$ est une algèbre comutative, on peut donc décomposer l'espace $\mathcal{C}_c\left(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_X)/\Xi \cdot K_N\ ,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$ en sous-espaces propres suivant les caractères d'algèbres $b : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Théorème 4.11. *les opérateurs de Hecke hors de N sont des opérateurs d'excursion.*

C'est un résultat difficile de [10], prop.6.2.

Le théorème suivant conclut, c'est aussi un moment difficile, [10], prop.11.7.

Théorème 4.12. *Un caractère d'algèbre $b : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ engendre un paramètre de Langlands $\chi : \pi_1(X - N, \overline{\eta}) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, unique à $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$-conjugaison près, continu, semi-simple, défini par la formule suivante*

$$b(S_{I,f,\gamma}) = f(\chi(\gamma))$$

(où, comme $\gamma \in \pi_1(X - N, \overline{\eta})^I$, $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}$, on a $\chi(\gamma) = (\chi(\gamma_i))_{i\in I}$).

5. Le dictionnaire fonctions-faisceaux

La référence principale est [11].

Le corps de base est noté k, qui est $\mathbb{F}_q$ sauf mention expresse du contraire.

Tous les systèmes locaux ℓ-adiques, les $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux, considérés ici sont constructibles, c'est à dire qu'il existe une stratification du schéma (champ ?) sur lequel ils sont définis, par des sous-schémas localement fermés telle la restriction à chaque strate soit un faisceau localement constant.

5.1. **La formule de traces de Grothendieck.** Soit S un schéma sur k régulier de dimension ≤ 1. Soit $f : X \to Y$ un S morphisme entre deux S-schémas, rappelons que l'on a les foncteurs

$$Rf_! \ , \ Rf_* \ : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \ ,$$
$$f^* \ , \ f^! \ : D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \ .$$

Rappelons (voir par exemple [**?**]) que $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est la limite inductive des $D_c^b(X, E)$, où E décrit les sous extensions finies de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell$, cette dernière catégorie étant la limite projective suivant n des $D_c^b(X, \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\mathcal{O}_E)$, c'est à dire de la catégorie des complexes de faisceaux constructibles à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n\mathcal{O}_E$-modules ($\varpi_E$ est une uniformisante de E) et quasi-isomorphes à des complexes bornés de $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n\mathcal{O}_E$-modules plats.

Rappelons aussi que

$$Rf_! \ : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

est le foncteur "sections à supports propres", que

$$f^! \ : D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

en est un adjoint à droite, c'est à que l'on a un isomorphisme fonctoriel en $L \in \mathrm{Ob}(D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}))$ et $M \in \mathrm{Ob}(D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell}))$

$$\mathrm{Hom}_{D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})}(L, f^!(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_\ell})}(Rf_!(L,)M) \ .$$

Le groupe de Grothendieck $K(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ de la catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est ainsi défini : à un objet L de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ on associe

$$[L] = \sum_i [\mathcal{H}^i(L)] \in K(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \ .$$

L'opération $\otimes$ induit un produit dans $K(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, les foncteurs $Rf_!$ et f^* des homomorphismes de groupes.

On note Frob_q le Frobenius géométrique de $\mathbb{F}_q$, c'est à dire l'automorphisme de $\overline{\mathbb{F}_q}$ (une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ fixée une fois pour toute) qui est l'inverse de l'élévation à la puissance q.

Soient X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et L un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau sur X, si $x \in |X|$ et $\overline{x}$ est un point de $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q}$ au dessus de x, alors la fibre $L_{\overline{x}}$ est un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel de dimension finie sur lequel opère le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\overline{x})/\mathbb{F}_q(x))$. On a $\mathbb{F}_q(x) = \mathbb{F}_{q^{\deg(x)}}$ et l'on pose $\mathrm{Frob}_x = \mathrm{Frob}_{q^{\deg(x)}} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\overline{x})/\mathbb{F}_q(x))$.

Le polynôme $\det(1 - t\mathrm{Frob}_x, L_{\overline{x}}) \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}[t]$, il ne dépend pad du choix de $\overline{x}$ et est noté $\det(1-t\mathrm{Frob}_x, L)$ permet de définir $\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_x, L)$ et $\det(\mathrm{Frob}_x, L)$, les trace et déterminant de Frob_x agissant sur $L_{\overline{x}}$.

Ces fonctions $\det(1 - t\mathrm{Frob}_x, \;\cdot\;)$, $\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_x, \;\cdot\;)$ et $\det(\mathrm{Frob}_x, \;\cdot\;)$ s'étendent au groupe de Grothendieck, mais alors la première n'est plus un polynôme, elle est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}(t)^\times \cap \Big(1 + t\overline{\mathbb{Q}_\ell}[[t]]\Big)$.

Si L est un objet du Groupe de Grothendieck $K(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ (ou de $D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$) on pose pour tout $x \in X(\mathbb{F}_q)$

$$t_L(x) = \mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_x, L) \tag{5}$$

Soit toujours un schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on désigne par $\mathcal{C}(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ la $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-algèbre des applications $t : X(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux schémas sur $\mathbb{F}_q$ de type fini, on a l'homomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espaces vectoriels

$$\begin{array}{cccc} f_! : & \mathcal{C}(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(Y(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \\ & t & \longmapsto & \Big(y \mapsto \sum_{x \in X(\mathbb{F}_q), f(x)=y} t(x)\Big) \end{array}$$

et l'homomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-algèbres

$$\begin{array}{cccc} f^* : & \mathcal{C}(Y(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \\ & u & \longmapsto & (x \mapsto u(f(x))) \end{array}$$

Notons que les fonctions t_L définies par la formule (5) sont dans $\mathcal{C}(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Théorème 5.1. *(1) La formule des traces de Grothendieck. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux schémas sur $\mathbb{F}_q$ de type fini. On a pour tout $L \in \mathrm{Ob}D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$*

$$t_{Rf_!L} = f_! t_L \ .$$

(2) Soient $f : X \to Y$ comme au dessus et $M \in \mathrm{Ob}D^b_c(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, on a

$$t_{f^*M} = f^* t_M \ .$$

5.2. **La transformation de Fourier-Deligne.** Soit J un groupe algébrique commutatif de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Remarquons que pour des entiers naturels n et m on a le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^{nm}}/\mathbb{F}_{q^n}} & : & J(\mathbb{F}_{q^{nm}}) & \longrightarrow & J(\mathbb{F}_{q^n}) \\ & & x & \longmapsto & \prod_{i=0}^{m-1} \mathrm{Frob}_{q^n}^i(x) \end{array}$$

qui fait de $(J(\mathbb{F}_{q^n}))_{n\in\mathbb{N}}$ un système projectif.

On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow J(\mathbb{F}_q) \longrightarrow J \xrightarrow{\lambda} J \longrightarrow 1$$

où $\lambda : x \mapsto x^{-1}\mathrm{Frob}_q(x)$ est l'isogénie de Lang.

Soit $x \in J(\mathbb{F}_{q^n})$, examinons la fibre $\lambda^{-1}(x)$. Soit $y \in \lambda^{-1}(x)$, en appliquant $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}$ à la relation $y^{-1}\mathrm{Frob}_q(y) = x$ il vient $\mathrm{Frob}_{q^n}(y) = y\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(x)$, donc l'action de Frob_{q^n} sur la fibre $\lambda^{-1}(x)$ coïncide avec la multiplication par $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(x)$, de fait, $\lambda^{-1}(x)$ est un $J(\mathbb{F}_q)$-torseur sur $\mathbb{F}_{q^n}$.

Un objet $\mathcal{X}$ de $D^b(J)$ est appelé un faisceau de caractères si c'est un ℓ-système local de dimension 1, sa fibre au dessus de l'unité de J étant triviale et $m^*(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \boxtimes \mathcal{X}$, où m est la multiplication de J. Alors la fonction $\chi : J(\mathbb{F}_{q^n}) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ venant de $\mathcal{X}$ est un caractère.

Inversement étant donné un caractère $\chi : J(\mathbb{F}_{q^n}) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$, on lui asssocie un faisceau de caractères $\mathcal{X}$ par

$$\pi_1(J) \longrightarrow \ker(\lambda) \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

où $\lambda : J \to J$, $\lambda = \mathrm{Frob}_J/\mathrm{Id}_J$, est l'isogénie de Lang, qui est un revêtement galoisien de groupe $\ker(\lambda) = J(\mathbb{F}_{q^n})$.

Soient $m, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : J\times J \to J$ la multiplication et les deux projections pr_1, pr_2. Soit $\mathcal{L}$ est un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau lisse de rang un sur J et $\mathcal{L}^v = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$, on pose

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = m^* \otimes \mathrm{pr}_1^*\mathcal{L}^v \otimes \mathrm{pr}_2\mathcal{L}^v \ .$$

Pour le faisceau $\mathcal{L}_\chi$ on a en particulier les relations

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_\chi) \simeq (\overline{\mathbb{Q}_\ell})_{J\times J} \ \text{ et } \ \mathcal{L}_{\chi^{-1}} \simeq \mathcal{L}_\chi^v$$

$$\forall\ n \geq 1 \ \ t_{\mathcal{L}_\chi|J\otimes\mathbb{F}_{q^n}} = \chi \circ \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}$$

et si χ est non trivial

$$R\Gamma_c\left(J \otimes \overline{\mathbb{F}_q}, \mathcal{L}_\chi\right) = R\Gamma\left(J \otimes \overline{\mathbb{F}_q}, \mathcal{L}_\chi\right) = 0 \ .$$

Soit $\psi : \mathbb{G}_a(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ un caractère et $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau associé comme il vient d'être fait, qui s'appelle alors le faisceau d'Artin-Schrier associé à ψ.

Soient $S/\mathbb{F}_q$ un schéma de type fini, $\pi : E \to S$ un fibré vectoriel de rang $r \geq 1$ constant, $\pi' : E' \to S$ le fibré dual, $< \cdot, \cdot >: E \times_S E' \to \mathbb{G}_{a/\mathbb{F}_q}$ l'accouplement canonique, $\mathrm{pr} : E \times_S E' \to E$ et $\mathrm{pr}' : E \times_S E' \to E'$ les projections.

Définition 5.2. *La transformation de Fourier-Deligne pour $\pi : E \to S$ associée au caractère ψ est le foncteur triangulé*

$$\mathcal{F}_\psi : D^b_c(E, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow D^b_c(E', \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

défini par

$$\mathcal{F}_\psi(K) = R\mathrm{pr}'_! \left(\mathrm{pr}^* K \otimes \mathcal{L}_\psi(< \cdot, \cdot >)\right) [r]$$

Précisons ce qu'est le faisceau $\mathcal{L}_\psi(< \cdot, \cdot >)$ ....

On a aussi une transformée pour les espaces de fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(E(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(E'(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \\ t & \longmapsto & \widehat{t} \end{array}$$

où $\widehat{t}$ est défini par la formule

$$\widehat{t}(e') = \sum_{e \in E(\mathbb{F}_q), m(e) = \pi'(e')} t(e) \psi(< e, e' >) \ .$$

Théorème 5.3. *(le corps de base est $\mathbb{F}_q$) Pour tout objet K de $D^b_c(E, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ on a*

$$t_{\mathcal{F}_\psi(K)} = (-1)^r \widehat{t_K}$$

Soit $a : E \to E''$ (bidual) le S morphisme défini par $a(e) = - < e, \cdot >$.

Théorème 5.4. *Désignons pas $\mathcal{F}'_\psi$ la transformation de Fourier-Deligne pour $\pi' : E' \to S$ associée au caractère ψ. ON a l'isomorphisme fonctoriel en les objets K de $D^b_c(E, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$*

$$\mathcal{F}'_\psi \circ \mathcal{F}_\psi(K) \simeq a_* K(-r) \ .$$

Références

[1] Beauville A., Laszlo Y., Un lemme de descente, C.R.A.S. Paris, I Math. 320, p. 335-340, 1995.

[2] Drinfeld V. G., Two dimensional ℓ-adic representation of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2), Amer. J. of Math. 54, p. 85-114, 1983.

[3] Drinfeld V. G., Langlands conjecture for GL_2 over function fields, Proceedings of the International Congress of Math., Helsinki 1978, vol. 2 p. 565-574.

[4] Drinfeld V. G., Varieties of modules of F-sheaves, Func. Analysis 21-2, 1987.

[5] Grothendieck A., Revêtements étales et groupe fondamental, SGA 1, LN 224 Springer Verlag 1971, nouvelle édition par la SMF en 2003.

[6] Harder G.,

[7] Lafforgue L., Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, J. of the Amer. Math. Soc., vol. 11, n° 4, p.1001-1036, 1998.

[8] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, IHES, Octobre 2000.

[9] Lafforgue L., Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, Invent. Math. 147, 2002.

[10] Lafforgue V., Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale. arXiv : 1209.5352v5 [math. AG] 17 sep 2015.

[11] Laumon G., Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Bull. de l'IHÉS 65, p.131-210, 1987.

[12] Laumon G., Moret-Bailly L., Champs algébriques, Springer Verlag, 1999.

[13] Mirkovic I., Vilonen K., Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups overcommutative rings, Annals of Math. 166, p. 95-143, 2007.

[14] Piatetski-Shapiro, Proc. Symp. Pure Math. 33, part 2, 1979.

[15] Piatetski-Shapiro, Shalika, Ann. of Math. 100, 1974.

[16] Stroh B., Séminaire Bourbaki 1110, janvier 2016.

[17] Varshavsky y., Moduli spaces of principal F-bundles, Selecta Math. (new sery), 10, p. 131-166, 2004.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: marc.reversat@math.univ-toulouse.fr