APPENDICE. PENSE-BÊTE SUR LES CHAMPS ALGÉBRIQUES

MARC REVERSAT

Résumé. Cet appendice s'inspire essentiellement de [5], [3], [2] et [6].

Table des matières

1. Les champs algébriques.

Soit (Sch/S) la catégorie des schémas sur une base schématique S, (QSch/S) et (Aff/S) les sous-catégories pleines des S-schémas quasi-séparés et des S-schémas affines. Considérer la catégorie (QSch/S) oblige à supposer le schéma S quasi-séparé. On munit (Aff/S) de la topologie étale, on discutera au paragraphe 1.1.2 du choix de cette catégorie pour introduire les notions qui vont suivre.

Date: 30 décembre 2015.

1.1. **Les S-espaces.** Un *S-espace* est un faisceau d'ensembles sur (Aff/S). Produits, morphismes, produits fibrés etc. sont ceux des faisceaux et les S-espaces forment une catégorie notée (Es/S). La catégorie (Sch/S) en est une sous-catégorie pleine.

Lemme 1.1. *(Lemme de Yoneda) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$ (i.e. des foncteurs contravariants $\mathcal{C} \to (\mathrm{Ens})$), U un objet de $\mathcal{C}$, h_U le foncteur $h_U = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, U)$ et F un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$. On a une bijection canonique, fonctorielle eu U et F*

$$F(U) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_U, F)$$

ainsi définie : à $x \in F(U)$ on associe l'élément $\widehat{x} : h_U \to F$ tel que pour tout objet V de $\mathcal{C}$ l'on ait $\widehat{x}(V) : h_U(V) \to F(V)$, $f \mapsto F(f)(x)$; inversment à $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_U, F)$ on associe $\sigma(U)(\mathrm{Id}_U)$.

Dans la suite, en particulier pour les schémas, on écrit U à la place de h_U. Soient donc X un S-espace et $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, on a donc une bijection, fonctorielle en U et X, unique,

$$X(U) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Es}/S)}(U, X)$$

ainsi définie : soit $x \in X(U)$,son image est la flèche $U \to X$ qui, pour tout $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, est l'application $\alpha \in U(V) \mapsto X(\alpha)(x) \in X(V)$.

On reprend les notations du lemme 1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un élément F de $\widehat{\mathcal{C}}$ est dit représentable([1]) s'il est isomorphe à un h_U, pour un certain objet U de $\mathcal{C}$. Un morphisme $\sigma : F \to G$ dans $\widehat{\mathcal{C}}$ est dit représentable si pour tout objet U de $\mathcal{C}$ et tout $u \in G(U)$ le produit fibré (dont on suppose qu'il existe)

$$U \times_{u,G,\sigma} F$$

est représentable.

Un morphisme $f : X \to Y$ de S-espaces est dit schématique si pour tous objet U de (Aff/S) et $y \in Y(U)$ le produit fibré

$$U \times_{y,Y,f} X$$

est un schéma. Une propriété des morphismes de schémas stable par changement de base peut alors être définie pour les morphismes schématiques de S-espaces. Une telle propriété P sera vérifiée par un morphisme schématique $f : X \to Y$ de S-espaces si pour tous objets U de (Aff/S) et $y \in Y(U)$ elle est vraie pour le morphisme de schémas

$$\mathrm{pr}_1 : U \times_{y,Y,f} X \longrightarrow U \ .$$

1. Le mot "représentable" sera repris à la fin de ce paragraphe dans un sens un peu différent.

Lemme 1.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie stable par les produits fibrés et les produits finis. Soit F un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$, alors le morphisme diagonal $\Delta_F : F \to F \times F$, dans $\widehat{\mathcal{C}}$, est représentable si et seulement si pour tout objet U de $\mathcal{C}$ et tout $x \in F(U)$ le morphisme $\widehat{x} : h_U \to F$, de $\widehat{\mathcal{C}}$, est représentable.*

Supposons ceci établi, alors Δ_F satisfait une propriété P des flèches de $\mathcal{C}$ si et seulement si pour tout objet U de $\mathcal{C}$ et tous $x, y \in F(U)$ le morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$, naturel (de foncteurs représentables)

$$U \times_{x,F,y} U \to U \times U$$

satisfait P.

Démonstration. ([2], prop. 2.1.14) On confond dorénavant U et h_U, pour un objet U de $\mathcal{C}$.

Supposons que Δ_F soit représentable. Soient U et V deux objets de $\mathcal{C}$, $x \in F(U)$ et $y \in F(V)$, alors le diagramme suivant de $\widehat{\mathcal{C}}$ est cartésien

$$\begin{array}{ccc} U \times_{x,F,y} V & \longrightarrow & F \\ \downarrow & \square & \downarrow \Delta_F \\ U \times V & \xrightarrow{x \times y} & F \times F \end{array}$$

Inversement, soit U un objet de $\mathcal{C}$, $x, y \in F(U)$, considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & U \times_{x,F,y} U & \longrightarrow & F \\ \downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow \Delta_F \\ U & \xrightarrow{\Delta_U} & U \times U & \xrightarrow{x \times y} & F \times F \end{array}$$

formé de deux carrés cartésiens, celui de gauche définissant Z. Comme $(x \times y) \circ \Delta_U = (x, y)$ on a

$$U \times_{(x,y),F \times F,\Delta_F} F \simeq Z\ .$$

$\square$

Un *S-espace algébrique* est un S-espace X qui vérifie les deux assertions suivantes

(1) le morphisme diagonal $\Delta_X : X \to X \times_S X$ est schématique et quasi-compact,

(2) il existe un S-schéma X' et un morphisme de S-espaces $\pi : X' \to X$ (schématique d'après la première assertion et le lemme 1.2) étale et surjectif.

Il faut remarquer que l'utilisation de la catégorie (Aff/S) fait automatiquement du morphisme diagonal un morphisme quasi-compact, c'est à dire de X *un S-espace algébrique quasi-séparé.*

Soit $f : X \to Y$ une flèche de (Es/S) On dit que f *est représentable* si pour tout objet U de (Sch/S) et tout $y \in Y(U)$ le S-espace

$$U \times_{y,Y,f} X$$

est un S-espace algébrique.

On dit aussi d'un *S-espace* qu'il est *représentable* s'il est algébrique.

1.1.1. *Espaces algébriques et relations d'équivalences. Une relation d'équivalence dans* (Es/S) est la donnée de deux S-espaces X_0 et X_1 et d'un monomorphisme de S-espaces (i.e. de faisceaux)

$$X_1 \xrightarrow{\delta} X_0 \times_S X_0$$

tel que pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$

$$X_1(U) \xrightarrow{\delta(U)} X_0(U) \times X_0(U)$$

soit une relation d'équivalence dans (Ens). *Un quotient par cette relation d'équivalence* est par définition un faisceau conoyau de

$$X_1 \underset{\mathrm{pr}_1 \circ \delta}{\overset{\mathrm{pr}_2 \circ \delta}{\rightrightarrows}} X_0 \ ,$$

un tel quotient Q existe toujours et X_1 s'identifie canoniquement à $X_0 \times_Q X_0$. Inversement, soit $X_0 \to Q$ un épimorphisme dans (Es/S), alors Q s'identifie à un S-espace quotient de la relation d'équivalence donnée par la flèche naturelle (dans (Es/S))

$$X_0 \times_Q X_0 \longrightarrow X_0 \times_S X_0 \ .$$

Proposition 1.3. *Soient X un S-espace algébrique, $\pi : X' \to X$ le morphisme schématique de S-espaces donné par la définition, où X' est un S-schéma. Alors les projections* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : X' \times_X X' \to X'$ *sont étales et le morphisme (de S-espaces algébriques)*

$$X' \times_X X' \longrightarrow X' \times_S X'$$

est quasi-compact et X est le quotient par la relation d'équivalence ainsi définie.

Inversement, si

$$X_1 \xrightarrow{\delta} X_0 \times_S X_0$$

est une relation d'équivalence dans (Sch/S), *avec* $\mathrm{pr}_1 \circ \delta$ *et* $\mathrm{pr}_2 \circ \delta$ *étales et δ quasi-compact, alors le S-espace quotient Q est algébrique et le morphisme canonique $X_0 \to Q$ est schématique, étale et surjectif.*

(Pour la démonstration [5], prop. 1.2, renvoie à [4], II, 1.3.)

1.1.2. *Sur le choix de la catégorie* (Aff$/S$). (cf [2], ch. 6, p.87) On aurait pu choisir comme “catégorie de base” (QSch$/S$) au lieu de (Aff$/S$), mais il aurait fallu ajouter dans la définition des morphismes schématiques que les fibres ne sont pas seulement des schémas, mais des schémas quasi-séparés. Il aurait aussi fallu ajouter dans la définition des S-espaces algébriques que les présentations sont des schémas quasi-séparés. Dans cette situation les S-espaces algébriques sont encore automatiquement quasi-séparés.

Supposons, le temps de ce sous-paragraphe, que nous ayons choisi (QSch$/S$) *comme catégorie de base.* Un S-espace est dit faiblement algébrique si c'est un faisceau d'ensembles sur la catégore (Sch$/S$) et si, sur cette même catégorie, il vérifie les axiomes de S-espaces algébriques donnés plus haut, avec en plus l'hypothèse qu'il est quasi-séparé (cf la suite de la définition). De même on définit les morphismes faiblement schématiques. Un morphisme schématique est faiblement schématique, la réciproque est fausse. Mais un S-espace faiblement algébrique est algébrique. Montrons ceci.

Soit X un S-espace faiblement algébrique, alors Δ_X est schématique, en effet Δ_X est faiblement schématique par hypothèse, c'est un monomorphisme, et pour tous objet V de (QSch$/S$) et flèche $f : V \to X \times X$, le morphisme induit (de schémas)

$$W := V \times_{f, X\times X, \Delta_X} X \longrightarrow V$$

est aussi un monomorphisme, donc est quasi-séparé([2]), donc W est quasi-compact. On a montré que le morphisme diagonal est schématique, pour la catégorie de base (QSch$/S$). Montrons maintenant que X possède une présentation quasi-séparée. Si $P : U \to X$ est un morphisme surjectif et étale, où U est un schéma, il existe un morphisme $U' \to U$ étale et surjectif, où U' est un schéma affine (il suffit de prendre pour U' la réunion disjointe d'un recouvrement affine de U), alors $U' \to U \xrightarrow{P} X$ est étale, surjectif et affine.

1.2. **Les S-groupoïdes.** Les S-champs sont d'abord des S-groupoïdes, que nous commençons par définir. Un S-groupoïde est une catégorie fibrée en groupoïdes sur (Aff$/S$), un groupoïde est une catégorie où toutes les flèches sont inversibles. Précisons ceci.

Un S-groupoïde est une catégorie $\mathcal{X}$ munie d'un foncteur $a : \mathcal{X} \to$ (Aff$/S$), appelé *morphisme structural* et vérifiant les deux axiomes suivants.

2. Soit $\sigma : Z \to Y$ un morphisme de schémas, si c'est un monomorphisme (par exemple si c'est une immersion, un morphisme diagonal...) alors σ est séparé, en fait le morphisme diagonal $Z \to Z \times_{f,Y,f} Z$ est alors un isomorphisme.

(1) Pour toute flèche $\varphi : V \to U$ dans (Aff/S) et tout objet x de $\mathcal{X}$ au dessus de U (i.e. tel que $a(x) = U$) il existe une flèche $f : y \to x$ de $\mathcal{X}$ au dessus φ.

(2) Pour tout diagramme dans $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[dr, "h"] & \\ & x \\ y \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd}$$

d'image par a dans (Aff/S)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "\xi"] & \\ & U \\ V \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

et pour toute flèche $\psi : W \to V$ rendant le deuxième diagramme commutatif il exite une *unique* flèche $z \to y$ de $\mathcal{X}$ au dessus de ψ et rendant le premier diagramme commutatif.

Il suit du deuxième axiome que la flèche f de $\mathcal{X}$ postulée dans le premier axiome est unique à isomorphisme unique près.

Soit $\mathcal{X}$ un S-groupoïde. Pour tout objet U de (Aff/S) on note $\mathcal{X}_U$ *la catégorie fibre de* $\mathcal{X}$ *en* U, c'est à dire la sous-catégorie de $\mathcal{X}$ dont les objet sont les x tels que $a(x) = U$ et dont les flèches s'envoient par a sur Id_U. Cette catégorie $\mathcal{X}_U$ est un groupoïde. Soit $\varphi : V \to U$ une flèche de (Aff/S). Soit x un objet de $\mathcal{X}_U$, on sait donc qu'il existe une flèche $\mathcal{X}$, unique à isomorphisme unique près, $f : y \to x$, on en choisit une que l'on note $\varphi^* x \to x$, ou encore $x_V \to x$. Ceci définit le foncteur $\varphi^* : \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}_V$, appelé *foncteur de changement de base par* φ. Si $W \overset{\psi}{\to} V \overset{\varphi}{\to} U$ sont des flèches de (Aff/S), on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\psi^* \circ \varphi^* \simeq (\varphi \circ \psi)^* \ ,$$

ainsi son morphisme structural fait de $\mathcal{X}$ une catégorie fibrée en groupoïdes.

Les S-groupoïdes forment une 2-catégorie (les 2-flèches sont des isomorphismes), notée (Gr/S). Un 1-morphisme $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un monomorphisme, resp. un isomorphisme, si pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ le foncteur $F_U : \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}_U$ est pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories.

1.2.1. *Quelques constructions.* Les S groupoïdes étant des catégories fibrées, on voit que (Gr/S) est stable par limites injectives et projectives, qui se font donc fibres à fibres.

Une somme disjointe $\coprod_{i\in I} \mathcal{X}_i$ dans (Gr/S) est ainsi définie : un objet est un couple (i, x_i), où x_i est un objet de $\mathcal{X}_i$, $\mathrm{Hom}((i, x_i), (j, y_j))$ est vide si $i \neq j$ et égal à $\mathrm{Hom}(x_i, y_i)$ sinon.

Soient $\mathcal{X}' \xrightarrow{F'} \mathcal{Y} \xleftarrow{F''} \mathcal{X}''$ des 1-flèches de (Gr/S), définissons *le produit fibré*

$$\mathcal{Z} := \mathcal{X}' \times_{F',\mathcal{Y},F''} \mathcal{X}'' \ .$$

Pour tout objet U de (Aff/S) la catégorie fibre $\mathcal{Z}_U$ a pour objets les (x', x'', g), où x' est un objet de $\mathcal{X}'_U$, x'' un objet de $\mathcal{X}''_U$ et $g : F'(x') \to F''(x'')$ une flèche de $\mathcal{Y}_U$; elle a pour flèche $(x'_1, x''_1, g_1) \to (x'_2, x''_2, g_2)$ les couples $(x'_1 \xrightarrow{f'} x'_2, x''_1 \xrightarrow{f''} x''_2)$ de flèches de $\mathcal{X}'_U$ et $\mathcal{X}''_U$ respectivement, tels que

$$g_2 \circ F'(f') = F''(f'') \circ g_1 \ ;$$

si $V \xrightarrow{\varphi} U$ est une flèche de (Aff/S), le foncteur de changement de base qui s'en déduit est

$$\varphi^*(x', x'', g) = (\varphi^* x', \varphi^* x'', \varphi^* g) \ , \ \varphi^*(f', f'') = (\varphi^* f', \varphi^* f'') \ .$$

Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ une flèche de (Gr/S). Le morphisme diagonal

$$\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$$

se décrit ainsi. Pour tous objets U de (Aff/S) et x, y de $\mathcal{X}_U$ et toute flèche $f : x \to y$ de $\mathcal{X}_U$, on a

$$(\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})_U(x) = (x, x, F(\mathrm{Id}_x)) \ , \ (\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})_U(f) = (x \xrightarrow{f} y, x \xrightarrow{f} y) \ .$$

L'énoncé suivant est bien connu (sur les fibres)

Proposition 1.4. *Soient* $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ *une flèche de* (Gr/S) *et* U *un objet de* (Aff/S)*, alors*

(1) le foncteur $(\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})_U$ *est fidèle,*

(2) le foncteur $(\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})_U$ *est pleinement fidèle si et seulement si* $\mathcal{X}_U \xrightarrow{F_U} \mathcal{Y}_U$ *est fidèle,*

(3) le foncteur $(\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}})_U$ *est une équivalence de catégories si et seulement si* $\mathcal{X}_U \xrightarrow{F_U} \mathcal{Y}_U$ *est pleinement fidèle.*

En particulier une flèche de (Gr/S) *(un* 1*-morphisme) est un isomorphisme si et seulement si sa diagonale est un isomorphisme.*

1.2.2. *Exemples.* Soit X un préfaisceau (d'ensembles) sur (Aff/S), on en fait un groupoïde de la manière suivante : pour tout objet U de (Aff/S), la catégorie fibre X_U a pour objet les éléments de $X(U)$ et pour ensemble de flèches $\mathrm{Hom}(x,y)$ le vide si $x \neq y$ et $\{\mathrm{Id}_x\}$ sinon (on dit que X_U est une catégorie discrète) ; les changements de bases sont donnés par les restrictions du préfaisceau X.

On a les résultats suivants (voir [5], p.10), qui caractérisent les S groupoïdes provenant des préfaisceaux, ou encore les flèches de (Gr/S) dont "les fibres sur les préfaisceaux" sont encore des préfaisceaux.

Proposition 1.5. *Soit $\mathcal{X}$ un S-groupoïde. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *$\mathcal{X}$ est (1-)isomorphe à un groupoïde venant d'un préfaisceau,*
(2) *pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, la catégorie $\mathcal{X}_U$ est équivalente à une catégorie discrète,*
(3) *$\Delta_{\mathcal{X}/S} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est un monomorphisme.*

Proposition 1.6. *Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ une flèche de (Gr/S). Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *pour toute flèche $f : X \to \mathcal{Y}$ de (Gr/S), où X est un préfaisceau, le produit fibré $\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},f} X$ est un S-groupoïde associé à un préfaisceau,*
(2) *pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, $\mathcal{X}_U \xrightarrow{F_U} \mathcal{Y}_U$ est fidèle,*
(3) *le morphisme diagonal*
$$\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$$
est un monomorphisme.

Ainsi, si $f_i : X_i \to \mathcal{Y}$, $i = 1, 2$, désignent deux flèches de (Gr/S), où les X_i sont des préfaisceaux, le produit fibré $X_1 \times_{f_1,\mathcal{Y},f_2} X_2$ est lui aussi un préfaisceau.

1.2.3. *Les S-espaces en groupoïdes.* Ce sont des lois de groupes sur les produits fibrés de S-espaces.

Un S-espace en groupoïdes $X.$ est la donnée de deux S-espaces X_0 et X_1 munis de morphismes : *source* $s : X_1 \to X_O$, *but* $b : X_1 \to X_0$, *origine* $\varepsilon : X_0 \to X_1$, *inverse* $i : X_1 \to X_1$, *composition* $m : X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \to X_1$ soumis aux axiomes suivants

(1) $s\circ\varepsilon = b\circ\varepsilon = \mathrm{Id}_{X_0}$, $s\circ i = b$, $b\circ i = s$, $s\circ m = s\circ\mathrm{pr}_2$, $b\circ m = b\circ\mathrm{pr}_1$,
(2) (associativité) les deux flèches
$$X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \xrightarrow{m\times\mathrm{Id}} X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \to X_1$$

$$X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \xrightarrow{\mathrm{Id}\times m} X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \to X_1$$

sont égales,

(3) (élément neutre) les deux flèches

$$X_1 = X_1 \times_{s,X_0,\mathrm{Id}} X_0 \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\varepsilon} X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \xrightarrow{m} X_1$$

$$X_1 = X_0 \times_{\mathrm{Id},X_0,b} X_1 \xrightarrow{\varepsilon\times\mathrm{Id}} X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \xrightarrow{m} X_1$$

sont égales,

(4) (inverse) les deux carrés

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{i\times\mathrm{Id}} & X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \\ s\downarrow & & \downarrow m \\ X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & X_1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mathrm{Id}\times i} & X_1 \times_{s,X_0,b} X_1 \\ b\downarrow & & \downarrow m \\ X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & X_1 \end{array}$$

sont commutatifs.

Soit $X.$ un S-espace en groupoïdes, on lui associe le S-groupoïde $[X.]'$ suivant : pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ l catégorie fibre $[X.]'_U$ a pour objet les éléments de $X_0(U)$ et pour flèches ceux de $X_1(U)$, les applications s, b et m donnant la composition de ces flèches ; pour tout $\varphi : V \to U$ dans (Aff/S), le foncteur $\varphi^* : [X.]'_U \to [X.]'_V$ est donné par la restrictions des faisceaux X_0 et X_1. On a un 1-morphisme canonique $p : X_0 \to [X.]'$, qui vient de $X_0(U) = \mathrm{Ob}([X.]'_U)$, et un 2-isomorphisme canonique $p \circ s \xrightarrow{\sim} p \circ b$ entre ces 1-flèches de X_1 vers $[X.]'$. Il suit de ces données un 1-isomorphisme de S-groupoïdes

$$X_1 \xrightarrow{\sim} X_0 \times_{p,[X.]',p} X_0\ .$$

1.2.4. *Les classifiants.* Soient E un S-espace et G un E-espace en groupes agissant à droite sur E. On désigne par $B(G/E)$ le S-groupoïde suivant. pour tout objet U de (Aff/S) la catégorie $B(G/E)_U$ a pour objet les (e,P), où $e \in E(U)$ et P est un $G \times_{E,e} U$ torseur sur U (voir plus bas). Les changements de bases sont évidents. B(G/E) *s'appelle le classifiant de G sur E.*

Rappelons que si U est un objet de (Aff/S) et H un U-espace en groupes, un H-torseur à droite est un U-espace P muni d'une action à droite de H telle qu'il existe une famille couvrante $U' \to U$ dans (Aff/S) et un isomorphisme $G \times_U U'$-équivariant $P \times_U U' \simeq G \times_U U'$.

Ces groupoïdes sont des champs, ceci sera détaillé au paragraphe 1.4.2.

1.3. Généralités sur les champs. *Un S-préchamp* est un S-groupoïde $\mathcal{X}$ qui de plus vérifie l'axiome suivant :

— pour tout objet U de (Aff/S) et tous objets x, y de $\mathcal{X}_U$, le préfaisceau

$$\begin{array}{rccc} Isom(x,y): & (\mathrm{Aff}/U) & \longrightarrow & (\mathrm{Ens}) \\ & V \to U & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_V}(x_V, y_V) \end{array}$$

est un faisceau sur (Aff/U).

On dit que le préchamp $\mathcal{X}$ est un champ si de plus il vérifie :

— pour toute famille couvrante $(V_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$ dans (Aff/S), toute donnée de descente $(x_i, f_{i,j})$ relative à cette famille est effective.

Détaillons ce dernier axiome. On écrit $V_{j,i} = V_j \times_U V_i$, $V_{k,j,i} = \cdots$; x_i est un objet de $\mathcal{X}_{V_i}$, $f_{j,i} : (x_i)_{V_{j,i}} \to (x_j)_{V_{j,i}}$ est une flèche de $\mathcal{X}_{V_{j,i}}$ et l'on a la “condition de cocycle”

$$(f_{k,i})_{V_{k,j,i}} = (f_{k,j})_{V_{k,j,i}} \circ (f_{j,i})_{V_{k,j,i}} \ .$$

Le fait que cette donnée de descente soit effective signifie qu'il existe x un objet de $\mathcal{X}_U$ et des isomorphismes $f_i : x_{V_i} \xrightarrow{\sim} x_i$ dans $\mathcal{X}_{V_i}$ tels que

$$(f_j)_{V_{j,i}} = (f_{j,i}) \circ (f_i)_{V_{j,i}} \ ,$$

l'axiome de préchamp assurant l'unicité de $(x, (f_i)_{i \in I})$, à isomorphisme unique près.

La sous-catégorie (strictement pleine) de (Gr/S) des S-champs se note (Ch/S).

Étant donné un préchamp il lui est associé un champ à la manière des préfaisceaux et des faisceaux : soit $\mathcal{X}$ un S-préchamp, il existe un champ $\widetilde{\mathcal{X}}$ et un morphisme de S-groupoïdes $\iota : \mathcal{X} \to \widetilde{\mathcal{X}}$, qui pour tout S-champ $\mathcal{Y}$ induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Hom}_S(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}_S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \ .$$

Précisons le champ $\widetilde{\mathcal{X}}$: soit $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, un objet de $\widetilde{\mathcal{X}}_U$ est un triplet $\tilde{x} = (U' \to U, x', f)$, où $U' \to U$ est un recouvrement dans (Aff/S) (à un élément), $x' \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_{U'}$ et f est une donnée de descente pour x' relativement au recouvrement, c'est à dire qu'il existe $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_U$ et que l'on a $f : x_{U'} \xrightarrow{\sim} x'$ dans $\mathcal{X}_{U'}$; une flèche $(U'_1 \to U, x'_1, f_1) \to (U'_2 \to U, x'_2, f_2)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{X}_{U'_1 \times_U U'_2}$

$$(x'_1)_{U'_1 \times_U U'_2} \xrightarrow{\sim} (x'_2)_{U'_1 \times_U U'_2}$$

qui est compatible avec les données de descente. Le changement de base est évident. Le morphisme ι vérifie : si x est un objet de $\mathcal{X}_U$, $\iota(x) = (U \xrightarrow{\mathrm{Id}} U, x, \mathrm{Id})$.

Un (1-)morphisme de S-champs est un monomorphisme, resp. un isomorphisme, si et seulement si il l'est dans la catégorie de S-groupoïdes. Par définition, *un morphisme $F : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ de S-champs est un épimorphisme* si pour tous $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_U$ il existe une famille couvrante $(U' \to U)$ à un élément dans (Aff/S) et $y \in \mathrm{Ob}\mathcal{Y}_{U'}$ tels que $F_{U'}(y)$ soit isomorphe à $x_{U'}$ dans $\mathcal{X}_{U'}$.

La catégorie (Ch/S) est stable par les limites projectives, mais une limite inductive de S-champs n'est en général qu'un préchamp, c'est le champ associé que l'on appelle limite inductive.

Somme. La somme $\coprod_{i\in I}\mathcal{X}_i$ d'une famille de S-champs est ainsi définie : soit $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, un objet de $(\coprod_{i\in I}\mathcal{X}_i)_U$ est un couple $(U = \coprod_{i\in I} U_i, (x_i)_{i\in I})$, où $U = \coprod_{i\in I} U_i$ est une décomposition de U en une réunion disjointe d'objets de (Aff/S) et où $x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_i)_{U_i}$; une flèche dans $(\coprod_{i\in I}\mathcal{X}_i)_U$ est un couple $(U = \coprod_{i\in I} U_i, (x'_i \xrightarrow{f_i} x''_i)_{i\in I})$, où $x'_i \xrightarrow{f_i} x''_i$ est une flèche dans $(\mathcal{X}_i)_{U_i}$; si $\varphi : V \to U$ est une flèche dans (Aff/S),le changement de base s'écrit

$$\varphi^*(U = \coprod_{i\in I} U_i, (x_i)_{i\in I}) = (V = \coprod_{i\in I} \varphi^{-1}(U_i), (\varphi^* x_i)_{i\in I}) \ .$$

1.3.1. *Champs et groupoïdes.* Le S-groupoïde associé à un S-espace est un S-champ, (Es/S) est une sous-catégorie pleine de (Ch/S). Il suit de propriétés des S-groupoïdes rappelées plus haut que *pour qu'un S-champ $\mathcal{X}$ soit un isomorphe à un S-espace il faut et il suffit que le morphisme diagonal $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ soit un monomorphisme, ou bien, ce qui est équivalent, que les catégories $\mathcal{X}_U$, $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, soient équivalentes à des catégories discrètes.*

Le S-groupoïde $[X.]'$ associé à un S-espace en groupoïdes n'est pas en général un S-champ mais seulement un S-préchamp et le S-champ associé se note $[X.]$ et s'appelle le S-champ associé au S-espace en groupoïde $X.$. On a le 1-morphismes de champs $p : X_0 \to [X.]$ et le 2-isomorphisme $p \circ s \xrightarrow{\sim} p \circ b$ entre ces 1-flèches de X_1 vers $[X.]$. Il en résulte encore un 1-isomorphisme de champs

$$X_1 \xrightarrow{\sim} X_0 \times_{p,[X.],p} X_0 \ .$$

Proposition 1.7. *(*[5]*, prop. 3.8) Soient $\mathcal{X}$ un S-champ, X_0 un S-espace et $F : X_0 \to \mathcal{X}$ un morphisme de champs. Considérons le S-espace en groupoïdes $X.$ défini par X_0, $X_1 = X_0 \times_{F,\mathcal{X},F} X_0$, $s = \mathrm{pr}_1$, $b = \mathrm{pr}_2$ (et dit canoniquement déduit de F), le S-champ associé $[X.]$ et le morphisme de S-champ $\Phi : [X.] \to \mathcal{X}$ venant de F. Alors Φ est un monomorphisme et c'est un épimorphisme si et seulement si F est un épimorphisme*

Jointe au fait qu'un morphisme de S-champs est un isomorphisme si et seulement si c'est un monomorphisme et un epimorphisme ([5], corollaire 3.7.1), cette proposition donnera plus bas une description intéressante des champs algébriques, cf 1.4.1.

1.3.2. *Représentabilité.* Un *S-champ est dit représentable* s'il est isomorphe à un S-espace algébrique.

Un *morphisme $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de S-champs est dit représentable, resp. schématique*, si pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}\mathcal{Y}_U$, le produit fibré $U \times_{y,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$ est représentable, resp. représentable par un S-schéma.

Donc une S-champ $\mathcal{X}$ est représentable si pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ la catégorie $\mathcal{X}_U$ est équivalente à une catégorie discrète X_U et si le foncteur

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Aff}/S) & \longrightarrow & (\mathrm{Ens}) \\ U & \longmapsto & \mathrm{Ob}X_U \end{array}$$

est représentable par un S-espace algébrique.

On dit qu'*un morphisme représentable $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de S-champs possède la propriété P* si pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $y \in \mathrm{Ob}\mathcal{Y}_U$, la projection canonique

$$U \times_{y,\mathcal{Y},F} \mathcal{X} \longrightarrow U$$

possède cette propriété (c'est un morphisme de S-espaces algébriques). Cette définition vaut pour les propriété entre S-espaces algébriques qui sont stables par changement de base, par exemple, si P est surjectif, radiciel, séparé, quasi-compact, universellemnt ouvert ou fermé, localement de type fini ou de présentation finie, de type fini, plat, non ramifié, lisse étale, etc. (cf [5], p. 20-21).

1.3.3. *Sur la diagonale.* On a en particulier le résultat suivant ([5], corollaire 3.13)

Proposition 1.8. *Soit $\mathcal{X}$ un S-champ. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) le morphisme de S-champs diagonal $\Delta : \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est représentable,

(2) pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tous $x, y \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_U$, le faisceau $Isom(x, y)$ sur (Aff/U) est représentable par un U-espace algébrique,

(3) pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_U$, le morphisme de S-champs $x : U \to \mathcal{X}$ est représentable,

(4) pour tout S-espace algébrique X, tout morphisme de S-champs $P : X \to \mathcal{X}$ est représentable.

Nous énonçons le résultats suivants pour les S-champs, mais il vaut aussi pour les S-groupoïdes.

Proposition 1.9. *Soient $\mathcal{X}$ un S-champ et $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ le morphisme digonal. Soient $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et $(x', x'') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X} \times_S \mathcal{X})_U$.*

(1) On a un isomorphisme de faisceaux sur (Aff/U)

$$U \times_{(x',x''), \mathcal{X}\times_S\mathcal{X}, \Delta} \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} Isom(x', x'') \ .$$

Les notations sont les suivantes :

— le produit fibré $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est sur le champ S, ce dernier vu comme une catégorie discrète, donc, si $a : \mathcal{X} \to (\mathrm{Aff}/S)$ désigne le morphisme structural, les objets de $(\mathcal{X} \times_S \mathcal{X})_U$ sont les $(x', x'', a(x') \to a(x'')) = (x', x'', \mathrm{Id}_U)$ que l'on note (x', x'') ;

— $U \times_{(x',x''), \mathcal{X}\times_S\mathcal{X}, \Delta} \mathcal{X}$ est vu ici comme un faisceau d'ensembles sur (Aff/U), qui à $(V \xrightarrow{\varphi} U) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/U)$ associe l'ensemble des morphismes $h : \varphi^*x' \to \varphi^*x''$ dans $\mathcal{X}_V$, au dessus de Id_V, tels qu'il existe t un objet de $\mathcal{X}_V$, $g' : \varphi^*x' \to t$ et $g'' : \varphi^*x'' \to t$ deux flèches de $\mathcal{X}_V$ au dessus de Id_V, avec la propriété que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \varphi^*x' \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ & t \\ \varphi^*x'' \arrow[ur, "g''"'] & \end{tikzcd}$$

— le faisceau $Isom(x', x'')$ est à valeur dans la catégorie des ensembles et à $(V \xrightarrow{\varphi} U) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/U)$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_V}(\varphi^*x', \varphi^*x'')$.

(2) Avec les notations et les hypothèses précédentes on a l'isomorphisme de faisceaux sur (Aff/U)

$$U \times_{x', \mathcal{X}, x''} U \xrightarrow{\sim} Isom(x', x'') \ ,$$

où le faisceau $U \times_{x', \mathcal{X}, x''} U$ sur (Aff/U) à $(V \xrightarrow{\varphi} U)$ associe l'ensemble des morphismes $\rho : \varphi^*x' \to \varphi^*x''$ de $\mathcal{X}_V$ tels que $((V \xrightarrow{\varphi} U), (V \xrightarrow{\varphi} U), \varphi^*x' \overset{\rho}{\simeq} \varphi^*x'')$ soit un objet de $(U \times_{x', \mathcal{X}, x''} U)_V$.

Démonstration. (1) Soit $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/U)$. Les objets de $(U \times_{(x',x''), \mathcal{X}\times_S\mathcal{X}, \Delta} \mathcal{X})_V$ sont les (u, t, g) où $u \in U(V)$, c'est à dire que u est un homorphisme $u : V \to U$ de schémas, où t est un objet de $\mathcal{X}_V$ et où g est une flèche de $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$, $g : (x', x'')(u) \to \Delta(t)$ et l'on a d'après le lemme de Yoneda $(x', x'')(u) = (u^*x', u^*x'')$, aussi $\Delta(t) = (t, t, \mathrm{Id}_V)$, c'est à dire que dans $(\mathcal{X} \times_S \mathcal{X})_V$

$$(g : (u^*x', u^*x'') \to (t, t)) = (u^*x' \xrightarrow{g'} t, u^*x'' \xrightarrow{g''} t) \ .$$

On a donc le diagramme dans $\mathcal{X}_V$

$$\begin{tikzcd} u^*x' \arrow[dr, "g'"] & \\ & t \\ u^*x'' \arrow[ur, "g''"] & \end{tikzcd}$$

qui est au dessus de

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "\mathrm{Id}_V"] & \\ & V \\ V \arrow[ur, "\mathrm{Id}_V"] & \end{tikzcd}$$

et par les propriétés des groupoïdes il vient l'existence de $h : u^*x' \to u^*x''$ rendant le premier diagramme commutatif, h étant au dessus de Id_V. D'où le morphisme, pout tout $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/U)$

$$\begin{array}{rcl} U \times_{(x',x''),\mathcal{X}\times_S\mathcal{X},\Delta} \mathcal{X} & \longrightarrow & Isom(x',x'')(V) \\ (u,t,(g',g'')) & \longmapsto & h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_V}(u^*x', u^*x'') \end{array}$$

Ceci donne l'isomorphisme cherché.

L'isomorphisme de (2) est simple à décrire, à

$$((V \overset{\varphi}{\to} U), (V \overset{\varphi}{\to} U), \varphi^*x' \overset{\rho}{\simeq} \varphi^*x'') \in \mathrm{Ob}((U \times_{x',\mathcal{X},x''} U)_V)$$

et au dessus de $(V \overset{\varphi}{\to} U)$, il associe $\rho \in Isom(\varphi^*x', \varphi^*x'')$. □

Soit $\mathcal{X}$ un S-champ. On sait que vérifier que $\Delta : \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ satisfait une propriété P revient à montrer que pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tout $(x', x'',) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X} \times_S \mathcal{X})_U$ le morphisme de projection

$$U \times_{(x',x''),\mathcal{X}\times_S\mathcal{X},\Delta} \mathcal{X} \longrightarrow U$$

la satisfait, qui avec cette dernière proposition revient à examiner le morphisme de faisceaux sur (Aff/U)

$$Isom(x', x'') \longrightarrow U\ .$$

1.4. **Les champs algébriques.** *Un S-champ algébrique* $\mathcal{X}$ est un S-champ (quasi-séparé) soumis aux axiomes suivants

(1) le morphisme de S-champs diagonal $\Delta_{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est représentable, séparé et quasi-compact,

(2) il existe un S-espace algébrique X et un morphisme de champs $P : X \to \mathcal{X}$ (représentable d'après le premier axiome), qui est surjectif et lisse, ce morphisme P s'appelle une présentation de $\mathcal{X}$.

Un S-champ de Deligne-Mumford est un S champ algébrique admettant un présentation P étale.

Les S-champs algébriques forment une une-2-catégorie pleine de celle (Ch/S) des S-champs, notée $(\mathrm{Ch.alg}/S)$; la catégorie $(\mathrm{Es.alg}/S)$ des S-espaces algébriques est une sous-2-catégorie pleine de $(\mathrm{Ch.alg}/S)$, en fait les S-espaces algébriques sont des champs de Deligne-Mumford . Tout S-champ représentable est algébrique.

Avec les propriétés des diagonales explicitées plus haut on voit que le premier axiome a le sens suivant : pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et tous $x, y \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_U$, le préfaisceau $Isom(x, y)$, sur (Aff/U) et dont on sait que c'est ici un faisceau, est en fait un U-espace algébrique quasi-compact et séparé (sur U). Il est même de type fini (sur U) puisque ([5], lemme 4.2) *le morphisme diagonal $\Delta_{\mathcal{X}}$ d'un S-champ algébrique est de type fini*, si de plus $\mathcal{X}$ est de Deligne-Mumford ce morphisme $\Delta_{\mathcal{X}}$ est schématique.

Proposition 1.10. *([5], prop. 4.5, p. 28)*

(1) La catégorie des S-champs algébriques, resp ; des S-champs de Deligne-Mumford , est stable pour la formation des sommes disjointes (arbitraires) et des produits fibrés finis.

(2) Soit $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme représentable de S-champs, alors si $\mathcal{Y}$ est algébrique il en est de même de $\mathcal{X}$.

(3) Soit S' un S-schéma, alors un S'-champ $\mathcal{X}$ est algébrique si et seulement si c'est un S-champ algébrique.

Proposition 1.11. *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ deux S-champs algébriques et $\mathcal{V} \xrightarrow{F} \mathcal{X}$ un morphisme représentable, alors le morphisme diagonal*

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \times_{F,\mathcal{X},F} \mathcal{V}$$

est localement fermé.

Démonstration. $\mathcal{V} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{V}$ est un champ algébrique. En effet il suit du fait que $\mathcal{V} \xrightarrow{F} \mathcal{X}$ est représentable, par changement de base, que $\mathcal{V} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ est représentable, par suite, cf la proposition précédente, que $\mathcal{V} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{V}$ est algébrique.

Soient $P \to \mathcal{V}$ et $Q \to \mathcal{X}$ des présentations de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ respectivement, alors $P \times_Q P \to \mathcal{X}$ est une présentation de $\mathcal{V} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{V}$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \times_Q P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{V} \end{array}$$

le morphisme horizontal (et diagonal) du haut est localement fermé, cela découle d'une propriété de schémas, puisque P et Q sont des espaces algébriques, donc sont munis de présentations surjectives et étales par des schémas. On a alors avec ce diagramme le résultat voulu. □

1.4.1. *S-champs algébrique et S-espaces en groupoïdes.* Soient $\mathcal{X}$ un S-champ et $P : X \to \mathcal{X}$ l'une de ses présentations, P est un épimorphisme, donc, cf la proposition 1.7, $\mathcal{X}$ est isomorphe au S-champ associé au S-espace en groupoïdes

$$X_1 := X \times_{P,\mathcal{X},P} X \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} X =: X_0 \ ,$$

qui possède les propriétés suivantes
— les S-espaces X_0 et X_1 sont représentables,
— les morphismes projections pr_1 et pr_2 sont lisses,
— le morphisme $X_1 \to X_0 \times_S X_0$ est déparé et de type fini.
La réciproque de ceci est vraie.

Proposition 1.12. *Soit*

$$X_1 \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X_0$$

un S espace en groupoïdes, où
— X_0 et X_1 sont des S-espaces algébriques
— p_1 et p_2 sont lisses, resp. étales,
— $(p_1, p_2) : X_1 \to X_0 \times_S X_0$ est séparé et quasi-compact;
alors (p_1, p_2) est de type fini, le S champ associé (on le dit S-champ quotient)

$$\mathcal{X} = [X_1 \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X_0]$$

est algébrique, resp. de Deligne-Mumford , et le morphisme canonique $p : X_0 \to \mathcal{X}$ en est une présentation, resp. une présentation étale.

C'est la proposition 4.3.1 de [5], elle est suivie de

Proposition 1.13. *Soit $P : X \to \mathcal{X}$ un morphisme de S-champs, tel que*

(1) X est un S-espace algébrique,

(2) P est représentable surjectif et lisse,

(3)

$$(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) : X \times_{P,\mathcal{X},P} X \to X \times_S X \ ,$$

qui est un morphisme de S-espaces algébriques d'après les deux hypothèses précédentes, est quasi-compact et séparé.

Alors $\mathcal{X}$ est un S-champ algébrique et P en est une présentation.

1.4.2. *Les champs classifiants.* Soient E un S-espace, G un E-espace en groupes agissant à droite sur E et $B(G/E)$ le S-groupoïde classifiant de G sur E (cf 1.2.4). C'est un S-champ ([5], 3.4.2, p.17). Si E est un S-espace algébrique et G un S-schéma lisse, resp. étale, séparé et de présentation finie, alors $B(G/E)$ est un S-champ algébrique, resp. de Deligne-Mumford (op. cit. 4.6.1 p.29).

1.4.3. *Critères de représentabilité.* Nous énonçons ici des résultats importants et renvoyons pour les démonstrations à [5], th. 8.1 p. 73 et corollaires.

Théorème 1.14. *Soient $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique et $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ le morphisme diagonal. Pour que $\mathcal{X}$ soit un champ de Deligne-Mumford il faut et il suffit que Δ soit non ramifié.*

Corollaire 1.15. *(1) Soient $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique et $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ le morphisme diagonal. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\mathcal{X}$ est représentable,

(b) $\mathcal{X}$ est un S-espace,

(c) pour tous $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ et $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{X}_U$ on a $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}_U} = \{\mathrm{Id}_x\}$,

(d) Δ est un monomorphisme de S-champs.

(2) Soit $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ un 1-morphisme de S-champs algébriques. Les assertions suivantes sont équivalentes

(a) F est représentable,

(b) le 1-morphisme $\Delta_F : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$ est un monomorphisme.

(3) Un monomorphisme de S-champs algébriques est représentable.

2. Faisceaux sur les champs algébriques.

2.1. **Le site.** On définit *le site lisse-étale d'un S-champ algébrique $\mathcal{X}$*. On considère la catégorie qui a pour

— objets les 1-morphismes (représentables) lisses de S-champs $u : U \to \mathcal{X}$ où U est un S-espace algébrique, un tel objet se note (U, u) et est appelé un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$;
— flèches les couples $(\varphi, \alpha) : (U, u) \to (V, v)$ où $\varphi : U \to V$ est un 1-morphisme d'espaces algébriques et où $\alpha : u \xrightarrow{\sim} v \circ \varphi$ est un 2-isomorphisme ;
— si (U, u) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$ on note $Cov(U, u)$ l'ensemble des familles de morphismes

$$((\phi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \to (U, u))_{i \in I}$$

telles que le 1-morphisme de S-espaces algébriques

$$\coprod_{i \in I} \varphi_i : \coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow U$$

soit étale et surjectif.

Ceci est une prétopologie, qui engendre *la topologie lisse-étale sur $\mathcal{X}$*. Le site lisse-étale de $\mathcal{X}$ est noté $\mathrm{Lis} - \mathrm{\acute{e}t}(\mathcal{X})$.

On définit *le site étale d'un S-champ de Deligne-Mumford $\mathcal{X}$* en imposant dans la définition précédente que les objets (U, u) soient *les 1-morphismes $u : U \to \mathcal{X}$ étales* et le site de $\mathcal{X}$ se note alors $\mathrm{\acute{E}t}(\mathcal{X})$.

Les topos associés, c'est à dire les catégories de faisceaux d'ensembles sur ces sites, se notent $\mathcal{X}_{\mathrm{lis-\acute{e}t}}$ ou $\mathcal{X}_{\mathrm{\acute{e}t}}$ (pour ce dernier si $\mathcal{X}$ est de Deligne-Mumford). De même, on désigne par $\mathrm{Zar}(\mathcal{X})$ le site de Zariski sur $\mathcal{X}$, par $\mathcal{X}_{\mathrm{zar}}$ le topos sur ce site.

Si $f^{-1} : Top\mathcal{S} \to Top\mathcal{S}'$ est un morphisme continu, où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des sites et $Top(\ )$ des topologies sur ces sites, on note

$$f = (f^{-1}, f_*) : \mathcal{S}'_{top} \to \mathcal{S}_{top}$$

le morphisme de topos qui s'en déduit, où f^{-1} est l'adjoint à gauche de f_* ([3]) (f^{-1} sera noté f^* dans le cadre des topos annelés).

2.1.1. *Les faisceaux lisses-étales.* Soient $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique et $\mathcal{F}$ un faisceau d'ensembles lisse-étale sur $\mathcal{X}$, i.e. un faisceau sur $\mathrm{Lis} - \mathrm{\acute{e}t}(\mathcal{X})$ ou encore un élément du topos $\mathcal{X}_{\mathrm{lis-\acute{e}t}}$. Soit (U, u) un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$, on note $\mathcal{F}_{U,u}$ la restriction de $\mathcal{F}$ à U, c'est un faisceau étale sur

3. Soit $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ une application continue entre deux espaces topologiques, $f^{-1} : Top\mathcal{S} \to Top\mathcal{S}'$ l'application "image inverse" entre les sites correspondants ; si B est un faisceau sur $\mathcal{S}'$, i.e. sur $Top\mathcal{S}'$, le faisceau f_*B sur $Top\mathcal{S}$ est défini par $f_*B(U) = B(f^{-1}(U))$ pour tout objet U de $Top\mathcal{S}$, i.e. tout ouvert U de $\mathcal{S}$; on a pour tout faisceau A sur $Top\mathcal{S}$

$$\mathrm{Hom}_{Top\mathcal{S}'}(f^{-1}A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{Top\mathcal{S}}(A, f_*B) \ .$$

U. Si $(\varphi, \alpha) : (U, u) \to (V, v)$ est une flèche de $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$, il suit un morphisme de faisceaux étales

$$\theta_{\varphi,\alpha} : \mathcal{F}_{V,v} \to \varphi_* \mathcal{F}_{U,u} \ ,$$

donc par adjonction

$$\theta^{\sharp}_{\varphi,\alpha} : \varphi^{-1} \mathcal{F}_{V,v} \to \mathcal{F}_{U,u} \ .$$

On peut montrer que la catégorie des faisceaux d'ensembles lisses-étales $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$ est équivalent à la catégorie des systèmes $(\mathcal{F}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$, où pour chaque ouvert lisse-étale (U, u) de $\mathcal{X}$, $\mathcal{F}_{U,u}$ est un faisceau étale sur U et, où pour chaque flèche $(\varphi, \alpha) : (U, u) \to (V, v)$ de $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$, $\theta_{\varphi,\alpha} = \mathcal{F}_{V,v} \to \varphi_* \mathcal{F}_{U,u}$ est un morphisme de faisceaux étales vérifiant les deux conditions suivantes

(1) pour tous $(U, u) \overset{(\varphi,\alpha)}{\to} (V, v) \overset{(\psi,\beta)}{\to} (W, w)$ dans $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$ on a

$$\psi_* \theta_{\varphi,\alpha} \circ \theta_{\psi,\beta} = \theta_{\psi\circ\varphi,(\varphi^*\beta)\circ\alpha} \ ,$$

(2) pour tout $(U, u) \overset{(\varphi,\alpha)}{\to} (V, v)$ dans $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$ avec $\varphi : U \to V$ étale, le morphisme $\theta^{\sharp}_{\varphi,\alpha} = \varphi^{-1} \mathcal{F}_{V,v} \to \mathcal{F}_{U,u}$ est un isomorphisme.

Proposition 2.1. *Soit $\mathcal{X}$ un S-champ de Deligne-Mumford , alors l'inclusion de catégories* $\mathrm{Ét}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$ *induit une équivalence de catégories $\mathcal{X}_{\text{ét}} \simeq \mathcal{X}_{\text{lis}-\text{ét}}$.*

Il faut aussi noter qu'à équivalence de topos près on peut supposer que les recouvrements dans $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$ et $\mathrm{Ét}(\mathcal{X})$ (où pour ce dernier $\mathcal{X}$ est de Deligne-Mumford) sont finis ([5], lemme 12.1.2).

Pour finir ce paragraphe nous énonçons une définition : *Un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ lisse-étale sur le S-champ $\mathcal{X}$ est dit cartésien* si pour toute flèche $(U, u) \overset{(\varphi,\alpha)}{\to} (V, v)$ dans $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$ le morphise de faisceaux étales $\theta^{\sharp}_{\varphi,\alpha} = \varphi^{-1} \mathcal{F}_{V,v} \to \mathcal{F}_{U,u}$ est un isomorphisme.

Si $\mathcal{X}$ est un S-champ de Deligne-Mumford (donc par exemple si $\mathcal{X}$ est un espace algébrique ou un schéma), la catégorie $\mathcal{X}_{\text{lis}-\text{ét}}$ est équivalente à sa sous-ctégorie des faisceaux cartésiens ([5], prop. 12.3.3).

2.2. **Les S-champs algébriques annelés.** Soit $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique. *Un anneau du topos $\mathcal{X}_{\text{lis}-\text{ét}}$* est un système $(\mathcal{A}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$, où (U, u) décrit les ouverts lisses-étales de $\mathcal{X}$ et $(U, u) \overset{(\varphi,\alpha)}{\to} (V, v)$ leurs morphismes, où $\mathcal{A}_{U,u}$ est un faisceau sur U étale en anneaux, où $\theta_{\varphi,\alpha} : \mathcal{A}_{V,v} \to \varphi_* \mathcal{A}_{U,u}$ est un morphisme de faisceaux étales en anneaux, le système $(\mathcal{A}_{U,u}, \theta_{\varphi,\alpha})$ etant supposé vérifier les conditions de recollement énoncées dans le paragraphe 2.1.1. *Un tel anneau est dit plat* si pour toute flèche $(U,u) \overset{(\varphi,\alpha)}{\to} (V,v)$ dans $\mathrm{Lis}-\mathrm{ét}(\mathcal{X})$ avec φ lisse, l'homomorphisme $\theta^{\sharp}_{\varphi,\alpha} : \varphi^{-1}\mathcal{A}_{V,v} \to \mathcal{A}_{U,u}$ d'anneaux étales est plat (un anneau dont les faisceau d'ensembles sous-jacent est cartésien est plat).

Lorsque $\mathcal{A}_{U,u} = \mathcal{O}_U$ pour tout ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$, où $\mathcal{O}_U$ est le faisceau structural de U pour la topologie étale, l'anneau du topos $\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}$ ainsi défini est noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ ou $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}}$ et s'appelle *l'anneau structural de* $\mathcal{X}$, il est plat (tout morphisme de S-espaces algébriques est plat). Dans des cas particuliers, par exemple si $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford , on pourra considérer $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{ét}}}$ et même $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{zar}}}$ si $\mathcal{X}$ est un schéma, etc.

Un S-champ algébrique annelé est un couple $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, où $\mathcal{X}$ est un S-champ algébrique et $\mathcal{A}$ un anneau du topos $\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}$.

La catégorie abélienne des $\mathcal{A}$-modules du topos $\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}$ est notée $Mod(\mathcal{A})$, ses objets sont les systèmes $(\mathcal{M}_{U,u},\theta_{\varphi,\alpha})$ où $\mathcal{M}_{U,u}$ est un $\mathcal{A}_{U,u}$-module, avec les conditions de recollement habituelles (cf § 2.1.1). Par adjonction les morphismes $\theta_{\varphi,\alpha}$ induisent des morphismes

$$\theta^{\mathcal{A},\sharp}_{\varphi,\alpha} : \varphi^*\mathcal{M}_{V,v} = \mathcal{A}_{U,u} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{A}_{V,v}} \varphi^{-1}\mathcal{M}_{V,v} \longrightarrow \mathcal{A}_{U,u}$$

et *le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ est dit cartésien* si les $\theta^{\mathcal{A},\sharp}_{\varphi,\alpha}$ sont des isomorphismes chaque fois que φ est lisse. Comme plus haut, si $\mathcal{X}$ est un S-champ de Deligne-Mumford et $\mathcal{A}_{\mathrm{ét}}$ l'anneau du topos $\mathcal{X}_{\mathrm{ét}}$ induit par $\mathcal{A}$, la catégorie $Mod(\mathcal{A}_{\mathrm{ét}})$ est équivalent à sa sous-catégorie des modules cartésiens.

2.3. **Les modules quasi-cohérents.** (voir § 3.3) Soit X un S-espace algébrique. *Un $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ét}}}$-module $\mathcal{M}$ est dit quasi-cohérent s'il existe un recouvement étale $\pi : X' \to X$, où X' est un S-schéma, tel que $\pi^*\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ét}}}$-module.*

Soit $\mathcal{X}$ un S-champ de Deligne-Mumford . *Un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{ét}}}$-module $\mathcal{M}$ dit quasi-cohérent s'il existe une présentation étale $p : X \to \mathcal{X}$ telle que $p^*\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ét}}}$-module quasi-cohérent.*

Proposition 2.2. *Soient $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}}$-module. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe une présentation $p : X \to \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ telle que le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}}$-module $p^*\mathcal{M}$ soit isomorphe au conoyau d'un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{lis-ét}}}$-modules libres.

(2) $\mathcal{M}$ est cartésien et pour tout ouvert lisse-étale (U,u) de $\mathcal{X}$ le $\mathcal{O}_{U_{\mathrm{ét}}}$-module $\mathcal{M}_{U,u}$ est quasi-cohérent.

(3) $\mathcal{M}$ est cartésien et il existe une présentation $p : X \to \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ telle que le $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ét}}}$-module $\mathcal{M}_{X,p}$ soit quasi cohérent.

La démonstration est longue : p. 123 à 125 de [5].

Cette proposition permet *d'étendre la notion de module quasi-cohérent aux S-champs algébriques qui ne sont pas nécessairement de Deligne-Mumford .* Les propriétés des modules quasi-cohérents sur les schémas se transportent à cette situation (quand elles y ont un sens).

2.3.1. *Le faisceau des différentielles.* Soit $\mathcal{X}$ un champ algébrique. Si (U, u) est un ouvert lisse-étale de $\mathcal{X}$ on pose

$$(\Omega^1_{\mathcal{X}/S})_{U,u} = \Omega^1_{U/S} \ .$$

Pour montrer que ceci est un faisceau il faut préciser deux choses

— ce qu'est $\Omega^1_{U/S}$ lorsque U est un espace algébrique,

— vérifier les conditions de recollement du paragraphe 2.1.1.

Si U est un S-espace algébrique (ou d'ailleurs un S-champ de Deligne-Mumford), il existe un schéma U' et un morphisme de S-espaces $p : U' \to U$ qui est étale et surjectif, et p est schématique. On pose

$$\Omega^1_{U/S} = \Omega^1_{U'/S}$$

et il faut vérifier que cela ne dépend pas du choix de $p : U' \to U$. Soit $q : U'' \to U$ une autre présentation étale, comme p et q sont schématiques $U'' \times_{q,U,p} U'$ est un schéma et les deux projections sont étales et surjectives ; ceci montre le résultat cherché.

La vérification des conditions de recollement est simple.

2.4. **Dimensions des champs algébriques.** (cf [5], ch. 11) Soit $\mathcal{X}$ un S-champ, considérons

$$\coprod_K \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_{\mathrm{Spec} K})$$

où K décrit les S-corps (les corps munis d'un morphisme $\mathrm{Spec} K \to S$). Sur cet ensemble on définit la relation d'équivalence
$(x', K') \sim (x'', K'')$ *si et seulement si il existe une extension K commune à K' et K'' et un isomorphisme $x'_{\mathrm{Spec} K} \simeq x''_{\mathrm{Spec} K}$.*
On appelle *point de $\mathcal{X}$* un classe d'équivalence, leur ensemble est noté $|\mathcal{X}|$. Si $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{Y}$ est un morphisme de S-champs, il vient un application naturelle $|\mathcal{X}| \xrightarrow{|F|} |\mathcal{Y}|$. Si $\mathcal{X}$ est un schéma, $|\mathcal{X}|$ est l'ensemble sous-jacent à $\mathcal{X}$.

Soit $P : X \to \mathcal{X}$ une présentation du S-champ algébrique $\mathcal{X}$. Soit ξ un point de $\mathcal{X}$ représenté par (x, K), alors

$$\mathrm{Spec}(K) \times_{x,\mathcal{X},P} X$$

est un S-espace algébrique, soit (z, L) un représentant de l'image dans X d'un de ses points, c'est un point de X ($z : \mathrm{Spec}(L) \to X$ est un monomorphisme), alors $(P \circ z, L)$ représente le point ξ de $\mathcal{X}$. Il résulte de cette remarque que l'on peut choisir dans la définition des points de $\mathcal{X}$ uniquement les S-corps qui sont corps résiduels de X. On sait que par définition ([5], p18) *un* 1*-morphisme* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *de* S*-champs est un épimorphisme si pour tous* $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$ *et* $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Y}_U)$ *il existe une famille couvrante* $U' \to U$ *dans* (Aff/S) *et il existe* $x' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_{U'})$ *tels que* $F_{U'}(x') \simeq y$ *dans* $\mathcal{Y}_{U'}$. Il vient aussi

Proposition 2.3. *(*[5]*, prop. 5.4, p.39) Un* 1*-morphisme* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *de* S*-champs algébriques est surjectif si et seulement si l'application induite* $|F| : |\mathcal{X}| \to |\mathcal{Y}|$ *est surjective.*

Un S-champ algébrique $\mathcal{X}$ est *localement noethérien* s'il possède une présentation $X \to \mathcal{X}$ où X est un S-espace algébrique localement noethérien, alors il en est ainsi pour toute présentation de $\mathcal{X}$. Ce type de définition se généralise.

Soit P une propriété des S-espaces algébriques de nature locale pour la topologie lisse, c'est à dire telle que pour tout morphisme surjectif lisse $X \to Y$ de S-espaces algébriques, Y possède la propriété P si et seulement si X la possède, par exemple, P peut être "localement noethérien", "réduit", "normal", ou encore "de caractéristique p"... *On dit que le* S*-champ possède la propriété* P *si pour une, et donc pour toutes, présentation* $X \to \mathcal{X}$ *le* S*-espace algébrique* X *la possède. Pour les champs de Deligne-Mumford on peut remplacer la topologie lisse par la topologie étale.*

Un S-champ $\mathcal{X}$ est dit *quasi-compact* s'il possède une présentation $X \to \mathcal{X}$ où X est un S-espace algébrique quasi-compact, si de plus il est localement noethérien il est dit *noethérien.*

2.4.1. *Points algébriques.* Soit ξ un point du S-champ algébrique $\mathcal{X}$, représenté par le couple (x, K), en particulier x peut être vu comme un morphisme $\mathrm{Spec}K \to \mathcal{X}$. Soit $\mathcal{G}$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont ainsi définis : si $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Aff}/S)$, les objets de $\mathcal{G}_U$ sont les $g \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X}_U)$ tels qu'il existe un recouvrement $U' \xrightarrow{\alpha} U$ fppf de U, qu'il existe $t \in \mathrm{Ob}(U'_{\mathrm{Spec}K})$ avec $t^*x \simeq \alpha^* g$. Il n'est pas difficile de prouver que le faisceau fppf sur (Aff/S)

$$G_\xi : U \longmapsto \{\text{classes d'isomorphie des objets de } \mathcal{G}_U\}$$

est indépendant du choix du représentant (x, K) du point ξ. On dit que *le point* ξ *est algébrique si le faisceau* G_ξ *est un* S*-espace algébrique*, alors G_ξ est de la forme $\mathrm{Spec}k$ où k est un S-corps ([4], II, 6.2 ; cité par [5], 11.2, p.93). On a le

Théorème 2.4. *([5], 11.3, p.94) Soit $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique localement noethérien. Alors tous ses points sont algébriques.*

2.4.2. *Dimension.* Pour les propiétés des schémas nous renvoyons au § 3.1. Soit X un S-espace algébrique localement noethérien et x un point de X. Soit $X_0 \to X$ une présentation étale de X par un S-schéma et x_0 un poit de X_0 au desus de x. *La dimension de X en x*, $\dim_x X$, est par définition $\dim_{x_0} X_0$, et cela ne dépe,d pas de la présentation étale choisie.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini entre deux S-espaces algébriques. Soit x un point de X. La dimension de F en x est $\dim_x(f) = \dim_x(X_{f(x)})$ (avec toujours $X_{f(x)} = \{f(x)\} \times_Y X$). Les propriété de cette dimension pour les schémas s'étendent ici.

Soit $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique localement noethérien et soit $P : X \to \mathcal{X}$ l'une de ses présentations. Soit x un point de X, on définit la dimension de P en x, $\dim_x P$, comme étant la dimension en (x, x) du morphisme de S-espaces algébriques $\mathrm{pr}_1 : X \times_{P,\mathcal{X},P} X \to X$. Cette dimension est compatible aux changements de base. Il faut remarquer que si l'on a $q : Y \to \mathcal{X}$ où Y est un S-espace algébrique, alors si $\mathrm{pr}_Y : Y \times_{Q,\mathcal{X},P} X \to Y$ est la première projection, si z est un point de $Y \times_{Q,\mathcal{X},P} X$ d'image x par la second projection, alors $\dim_x P = \dim_Z \mathrm{pr}_Y$.

Soit $\mathcal{X}$ un S-champ algébrique localement noethérien. Soit ξ un point de $\mathcal{X}$ $P : X \to \mathcal{X}$ une présentation de $\mathcal{X}$ et x un point de X au dessus de ξ. On définit la *dimension de $\mathcal{X}$ en ξ* par la formule

$$\dim_\xi(\mathcal{X}) = \dim_x(X) - \dim_x(P) \ ,$$

cela ne dépend pas des choix de p,x...(cf les propiétés de la dimension des schémas). On pose

$$\dim(\mathcal{X}) = \sup_\xi \dim_\xi(\mathcal{X}) \ .$$

Il faut noter que si le S-champ algébrique est noethérien et non vide, alors $\dim(\mathcal{X}) \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$ et $\dim(\mathcal{X}) = -\infty$ si et seulement si $\mathcal{X} = \emptyset$. Cette dimension peut être négative, par exemple si G est un schéma en groupes lisse de type fini sur un S-corps k, alors $\dim(B(G/k) = -\dim G$.

3. Rappels de géométrie algébrique [1], [3].

Soit S un schéma.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.

Le *morphisme diagonal* est l'unique morphisme $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ tel que $\mathrm{pr}_i \circ \Delta_{X/Y} = \mathrm{Id}_X$,où pr_i, $i = 1, 2$, désignent les projections.

On dit que f est *localement de présentation finie* si pour tout $x \in X$ il existe des voisinages affines U de x dans X et V de $f(x)$ dans Y tels que $f(U) \subset V$ et que $\mathcal{O}_X(U)$ soit de présentation finie sur $\mathcal{O}_Y(V)$. Il suit que quels que soient U et V des ouverts affines de X et Y respectivement tels que $f(U) \subset V$, alors $\mathcal{O}_X(U)$ est de présentation finie sur $\mathcal{O}_Y(V)$. Il suit aussi que cette propriété est stable par composition (de morphismes tous localement de présentations finies) ainsi que par changement (quelconque) de base.

Le morphisme f est *quasi-compact* si l'image inverse d'un ouvert quasi-compact de Y est quasi-compacte. Il revient au même de demander que l'image inverse de tout ouvert affine de Y soit quasi-compacte. Le composé de deux morphismes quasi-compacts est quasi-compact. Cette propriété est stable par changement de base.

Le morphisme f est séparé si, par définition, le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}$ est une immersion fermée. Les immersions ouvertes et fermées sont des morphismes séparés. Cette propriété est stable par composition (de morphismes séparés) et changement (quelconque) de base.

Le morphisme f est dit propre s'il est séparé, de type fini et universellement fermé. Cette propriété est stable par composition (de morphismes propres) et changement (quelconque) de base.

Critères valuatifs. On suppose que le mrophisme f est de type fini, que X est noathérien. Alors f est séparé, resp. propre, si pour tout anneau de valuation discrète R et tout diabramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathrm{Fr}R) & \longrightarrow & X \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}R & \longrightarrow & Y \end{array}$$

il existe au plus un, resp. un unique,morphusme $\mathrm{Spec}R \to X$ gardant le daigramme commutatif, c'est à dire tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathrm{Fr}R) & \longrightarrow & X \\ \cap & \nearrow & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}R & \longrightarrow & Y \end{array}$$

soit commutatif.

Le morphisme f est quasi-séparé si, par définition, le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}$ est quasi-compact. Tout monomorphisme est quasi-séparé ;

la composition de deux morphismes quasi-séparés est quasi-séparée ; le morphisme induit entre les schémas réduits par un morphsme quasi- séparé est encore quasi-séparé. Cette propriété est stable par changement de base.

Le morphisme f est *plat* si pour tout $x \in X$ le morphisme $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ est plat. Il revient au même de demander que quels que soient U et V des ouverts affines de X et Y respectivement tels que $f(U) \subset V$, alors $\mathcal{O}_X(U)$ est $\mathcal{O}_Y(V)$-plat. Le composé de deux morphismes plats est plat. La propriété d'être plat est stable par changement de base.

On dit que le morphisme f est *fidèlemet plat* s'il est plat et surjectif. Si X et Y sont des schémas affines, $X = \mathrm{Spec}A$ et $Y = \mathrm{Spec}B$, il revient au même de dire que A est un B-module fidèlement plat.

Le morphisme f est dit *non ramifié* en $x \in X$ si, via $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ est engendré par celui $\mathfrak{m}_{f(x)}$ de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ et l'extension (des corps résiduels) $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ de $k(f(x)) := \mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}$ est finie et séparable. Une définition équivalente est de demander que le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ soit localement en x un isomorphisme, une autre est

$$\Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(x) = 0 \ .$$

Un morphisme est non ramifié s'il l'est en tout point. Cette propriété est stable par changement de base.

Le morphisme f est dit *étale* en $x \in X$ s'il et non ramifié et si de plus $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est plat. Un morphisme est étale s'il l'est en tout point. C'est une propriété stable par changement de base. Un morphisme étale est un morphisme non ramifié qui est lisse de dimension relative 0, cette dernière notion est décrite en dessous.

Le morphisme f est lisse de dimension relative n s'il est localement de présentation finie et s'il satisfait l'une des conditions équivalente suivantes,

(1) f est plat et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y (de corps résiduel $k(\overline{y})$ algébriquement clos), la fibre $X_{\overline{y}} = X \times_Y k(\overline{y})$ est régulière de dimension n sur $k(\overline{y})$,

(2) pour tout $x \in X$ il existe des voisinages ouverts U de x dans X et V de $f(x)$ dans Y tel que $f(U) \subset V$ et que U soit un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^m_V = \mathcal{O}_Y(V)[T_1, \cdots, T_m]$, défini par un idéal engendré par $g_1, \cdots, g_n$ et tels que le rang de la matrice $(\partial g_i/\partial T_j(x))_{i,j}$ soit n.

Si f est lisse de dimension relative n, le faisceau $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de rang n ; si de plus X et Y sont lisses sur une base S et si donc

f est un morphisme lisse de S-schémas, on a alors une suite exacte

$$0 \to f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0\ .$$

Proposition 3.1. *(cf* [1]*, prop. 6, § 2.2, p. 37) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas localement de présentation finie, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) f est non ramifié, resp. lisse, resp. étale.

(2) Pour tout Y-schéma Z affine et pour tout sous schéma fermé Z_0 de Z défini par un idéal de carré nul, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_Y(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y(Z_0, X)$$

est injective, resp. surjective, resp. bijective.

Sur les différentielles. Rappelons que si $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ sont des morphismes de schémas, on a une suite exacte de faisceaux sur X (pour la topologie de Zariski)

$$f^*\Omega^1_{X/Y} \to \Omega^1_{Z/Y} \to \Omega^1_{Z/X} \to 0\ .$$

Si $Z \xrightarrow{g} X$ est l'inclusion d'un sous-schéma fermé Z de X correspondant au faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$, on a aussi la suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 & \to & \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z & \to & \Omega^1_{Z/X} & \to 0 \\ u & \mapsto & du \otimes 1 & & & \end{array}$$

3.1. **Dimensions des schémas.** Soit X un schéma, sa dimension est la borne supérieure des longueure des chaînes de fermés irréductibles, si x est un point de X la dimension en x de X, notée $\dim_x(X)$ est la borne inférieure des dimensions des voisinages ouverts de x.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini de schémas et x un point de X, alors on pose par définition $\dim_x(f) = \dim_x(X_{f(x)})$ où $X_{f(x)} = \{f(x)\} \times_Y X$ est la fibre de f en $f(x)$. On a les résultats suivants.

(1) Soient $f : X \to Y$ un morphisme lisse de schémas et x un point de X, alors le $\mathcal{O}_{X,x}$-module $\Omega^1_{X/Y,x}$ est libre de rang $\dim_x(f)$. Donc f est étale en x si et seulement si $\dim_x(f) = 0$.

(2) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes lisses de schémas, soit x un point de X alors

$$\dim_x(g \circ f) = \dim_x(f) + \dim_{f(x)}(g)\ .$$

(3) Soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse de schémas, alors la fonction dimension $\{\text{points de } X\} \to \mathbb{N}$ est compatible aux changements de bases.

(4) Soit $f : X \to Y$ un morphisme lisse entre deux schémas localement noethériens, soit x un point de X, alors
$$\dim_x(X) = \dim_x(f) + \dim_{f(x)}(Y) \ .$$

3.2. **Topologies.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une topologie de Grothendieck ([4]) sur $\mathcal{C}$ est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'une collection $\mathcal{R}_X$ d'ensembles de flèches $\{U_i \to X\}_i$ de $\mathcal{C}$, les recouvrements de X, telle que

(1) les isomorphismes $U \to X$ sont dans $\mathcal{R}_X$,

(2) si $\{U_i \to X\}_i$ est dans $\mathcal{R}_X$ et si $Y \to X$ est une flèche de $\mathcal{C}$, alors $\{U_i \times_X Y \to Y\}_i$ est dans $\mathcal{R}_X$,

(3) si $\{U_i \to X\}_i$ est dans $\mathcal{R}_X$ et $\{V_{i,j} \to U_i\}_j$ est dans $\mathcal{R}_{U_i}$ pour tout i, alors $\{V_{i,j} \to U_i \to X\}_{i,j}$ est dans $\mathcal{R}_X$.

Une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une telle topologie est appelée un *site*.

Soit (Sch/S) la catégorie des schémas de base le schéma S, elle possède plusieurs structures de site.

La topologie fppf (fidèlement plate et de présentation finie). Les recouvrements $\{U_i \to X\}_i$ sont tels que $\coprod_i U_i \to X$ est plat, surjectif et localement de présentation finie.

La topologie étale. Les recouvrements $\{U_i \to X\}_i$ sont tels que $\coprod_i U_i \to X$ est surjectif, étale et localement de présentation finie.

La topologie fpqc (fidèlement plate et quasi-compacte). *Un morphisme fpqc de schémas* est un morphisme fidèlement plat satisfaisant l'une des assertions de la proposition suivante.

Proposition 3.2. *(cf* [3]*, prop 2.33, p. 27) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, supposé surjectif. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Tout ouvert quasi-compact de Y est l'image d'un ouvert quasi-compact de X.

(2) Il existe un recouvrement (au sens de la topologie de Zariski) $(Y_i)_i$ de Y par des ouverts affines tel que chaque Y_i soit l'image d'un ouvert quasi-compact de X.

(3) Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $f(U)$ soit un ouvert de Y et que $U \xrightarrow{f} f(U)$ soit quasi-compact.

4. initialement appelée une pré-topologie dans EGA

(4) Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert quasi-compact U de x dans X tel que $f(U)$ soit un ouvert affine de Y.

La propriété d'un morphisme d'être fpqc est stable par changement de base.

La topologie fpqc sur la catégorie (Sch$/S$) est celle dont les recouvrements $(U_i \to U)_i$ sont tels que les morphismes induits $\coprod_i U_i \to U$ soient fpqc.

Proposition 3.3. *(cf* [3]*, prop 2.36, p. 29) Soient $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas et $(V_i \to Y)_i$ un recouvrement fpqc. On suppose que les projections $V_i \times_Y X \to V_i$ possèdent toutes similtanément l'une des propriétés (1) à (12) suivantes, qu'elles sont : (1) séparées, (2) quasi-compactes, (3) localement deprésentations finies, (4) propres, (5) affines, (6) finies, (7) plates, (8) lisses, (9) non ramifiées, (10) étales, (11) sont des immersions, (12) sont des immersions fermées. Alors il en est de même de $X \to Y$.*

3.3. **Modules quasi-cohérents.** Soit X un schéma, pour une topologie Top sur X on note $Top(X)$ le site et X_{top} le topos correspondant. On a l'inclusion $\mathrm{Zar}(X) \hookrightarrow \mathrm{\acute{E}t}(X)$, d'où le foncteur naturel de topos (la restriction)

$$\varepsilon_* : X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{zar}} \ ,$$

et l'on note ε^{-1} son adjoint à droite, d'où le morphisme de topos

$$(\varepsilon^{-1}, \varepsilon_*) : X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{zar}} \ .$$

De manière plus explicite, si $(U, u) = (U, U \xrightarrow{u} X)$ est un ouvert étale de X et $(U_i, u_i)_{i \in I}$ est l'un de ses recouvrements étales, alors $u(U)$ est un ouvert de Zariski de X et $(u_i(U_i))_{i \in I}$ l'un de ses recouvrement de Zariski, si $\mathcal{F}$ est un faisceau dans X_{zar}, alors

$$(\varepsilon^{-1}\mathcal{F})(U, u) = \varinjlim_{(U_i, u_i)} \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathcal{F}(u_i(U_i)) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(u_{i,j}(U_i \times_U U_j))\right) \ .$$

Le morphisme d'adjonction $\mathcal{F} \to \varepsilon_*\varepsilon^{-1}\mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Les deux topos sont annelés par leurs anneaux structuraux. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X_{\text{zar}}}$-module on pose

$$\varepsilon^*\mathcal{M} = \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{X_{\text{zar}}}} \varepsilon^{-1}\mathcal{M}$$

et l'on a le morphisme de topos annelés

$$(\varepsilon^*, \varepsilon_*) : X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{zar}} \ .$$

Le foncteur ε^* est exact, car il exact à droite, à gauche aussi puisque $\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{zar}}} \to \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ est plat. Si (U, u) est un ouvert étale tel que U soit un ouvert de Zariski et u l'inclusion, on a $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{zar}}}(U) = \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}(U, u)$, il suit que le morphisme d'adjonction $\mathcal{M} \to \varepsilon^*\varepsilon_*\mathcal{M}$ est un isomorphisme et ε^* est un foncteur pleinement fidèle.

Par définition la sous-catégorie (strictement pleine) $Mod_{qcoh}(X_{\text{ét}})$ est l'image essentielle de la restriction du foncteur pleinement fidèle ε^* à $Mod_{qcoh}(X_{\mathrm{zar}})$ et $(\varepsilon^*, \varepsilon_*)$ induit une équivalence de catégorie entre $Mod_{qcoh}(X_{\mathrm{zar}})$ et $Mod_{qcoh}(X_{\text{ét}})$.

Ces catégories sont stables par extensions, limites inductives arbitraires, limites projectives finies, donc leurs flèches possèdent des noyaux et conoyaux, ce sont des catégories abéliennes épaisses.

Lemme 3.4. *Un $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$-module $\mathcal{M}$ est quasi-cohérent si et seulement si il existe un recouvrement étale $\pi : X' \to X$ tel que $\pi^*\mathcal{M}$ soit isomorphe au conoyau d'un morphisme de $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$-modules libres $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}^{(A)} \to \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}^{(B)}$, pour certains ensembles A et B.*

Références

[1] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M., Néron Models, Spinger Verlag, 1990.

[2] Canonaco Alberto, Introduction to algebraic stacks, http ://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/seminari/geo-alg/dispense/stacks.pdf

[3] Fundamental Algebraic Geometry, Mathematical Surveys and Monographs, vol 123, Amer Math. Soc., 2005.

[4] Knutson D., Algebraic Spaces, Springer L. N. 203, 1971.

[5] Laumon G., Mauret-Bailly L., Champs algébriques, Springer Verlag, 2000.

[6] Stacks Project, http ://stacks.math.columbia.edu/

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: marc.reversat@math.univ-toulouse.fr