REMARQUES SUR LE MANUSCRIT D'HERMAN : "UNIFORMITÉ DE LA DISTORTION DE ŚWIĄTEK POUR ..."

A. CHÉRITAT

Dans [H3], Herman démontre que dans une famille (pré)-compacte de produits de Blaschke *de degré borné* et induisant des homéomorphismes sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$, la distortion de Świątek est bornée.

La notion de précompacité étant ici : il existe $\varepsilon > 0$ tel que de toute suite on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur "$1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$".

La distortion de Świątek est celle du relevé $\widetilde{f} : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ de $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ par $x \mapsto \exp(2i\pi x)$.

En fait, le résultat reste vrai dans toute famille précompacte $\mathcal{F}$ d'homéomorphismes analytiques de $\mathbb{S}^1$ définis sur un anneau commun "$1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$".

La démonstration de [H3] fonctionne quasiment sans modification : soit par l'absurde une suite $f_k \in \mathcal{F}$ telle que $SD(\widetilde{f_k}) \longrightarrow +\infty$. Quitte à extraire, on peut supposer f_k convergeant sur l'anneau vers un certain f, qui est nécessairement un homéomorphisme analytique de $\mathbb{S}^1$. Remarquons que le nombre de point critiques, comptés avec multiplicité, de f_k dans un voisinage donné de $\mathbb{S}^1$ est forcément borné. Soit $p(k)$ le nombre d'intervalles où la dérivée Schwarzienne Sf_k est positive. Alors $p(k) \to +\infty$, sinon d'après [H3] la distortion de Świątek $SD(\widetilde{f_k})$ serait bornée. Donc $Sf = 0$, sinon le nombre de zéros de Sf_k au voisinage de $\mathbb{S}^1$ serait borné. Ainsi f_k tend vers un möbius et donc à partir d'un certain rang $\operatorname{Var} \log D\widetilde{f_k} \leqslant M$, et donc $SD(\widetilde{f_k}) \leqslant e^{10M}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Références

[H3] M.R. Herman, *Uniformité de la distortion de Świątek pour les familles compactes de produits de Blaschke*, manuscrit.