UNIFORMITÉ DE LA DISTORTION DE ŚWIĄTEK POUR LES FAMILLES COMPACTES DE PRODUITS DE BLASCHKE

M.R. HERMAN

Note du transcripteur : ce document fait suite à *Conjugaison quasi symétrique des homéomorphismes analytiques du cercle à des rotations* [H]. Herman l'a écrit peu après [H] et tout comme ce dernier, il s'agissait d'une version préliminaire. Aussi je me suis permis d'ajouter quelques notes en fin de document pour en faciliter la lecture. Voici un petit résumé du présent article : dans [H], Herman démontre qu'un homéomorphisme analytique du cercle avec nombre de rotation de type constant est conjugué à la rotation par une application quasisymétrique. Ici, il démontre que pour des familles *compactes* de produits de Blaschke de degré borné, induisant sur le cercle des homéomorphismes à nombre de rotation fixé, la constante de quasisymétrie est majorée.

0. Introduction

On se propose de montrer que, si $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fractions rationnelles, qui induisent sur $\mathbb{S}^1$ des homéomorphismes préservant l'orientation, qui convergent sur un voisinage de $\mathbb{S}^1$, alors (théorème §2)

$$\sup_i SD(\widetilde{g}_i) < +\infty$$

($\widetilde{g}_i$ désigne un relèvement à $\mathbb{R}$ et $SD(\widetilde{g}_i)$ la distortion de Świątek de $\widetilde{g}_i$ définie §9). Świątek a montré [S] que pour tout i

$$SD(\widetilde{g}_i) < +\infty.$$

Il faut montrer l'uniformité sur i. La principale difficulté est au voisinage des points critiques : plusieurs points critiques dans le complexe peuvent tendre vers un point.

Il faut d'abord montrer que la distortion des birapports reste bornée même si plusieurs points critiques convergent dans $\widehat{\mathbb{C}}$ vers un même point de $\mathbb{S}^1$. C'est l'objet des §4 et 5 (l'idée de la démonstration de 4.2 m'a été communiquée par J.C. Yoccoz en 1987). Le §3 sert à réduire le problème à un problème local.

Il faut ensuite montrer que la distortion de Świątek reste bornée, localement au voisinage de points critiques, même si plusieurs viennent se confondre. C'est l'objet du §6. Les intervalles où la dérivée Schwarzienne est < 0 ne posent pas de problèmes. Ce qui fait tout marcher c'est que la variation totale de $\log D\widetilde{g}_i$ reste bornée sur les intervalles où $S(\widetilde{g}_i) \geqslant 0$. Si le théorème §2 est vrai on doit pouvoir le démontrer. C'est plus facile à dire qu'à faire si on veut éviter des problèmes combinatoires insortables[1].

Nous reprenons les notations de [H] et aux paragraphes 5 et 10 nous indiquons seulement les changements qu'il faut faire pour conclure.

1. On se donne une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fractions rationnelles de Blaschke vérifiant

- $g_i\big|_{\mathbb{S}^1}$ est un homéomorphisme préservant l'orientation ;

[1] Ndt : inextricables ?

- degré$(g_i) = d_i \leqslant d < +\infty$;
- (g_i) converge uniformément sur $\{1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon\}$ vers g, où $\varepsilon > 0$ est donné. $g\big|_{\mathbb{S}^1}$ est nécessairement un homéomorphisme.

2. Théorème. *On a*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} SD(\widetilde{g}_i) < +\infty$$

où SD désigne la distortion de Świątek du relèvement $\widetilde{g}_i$ de g_i au revêtement universel $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathbb{S}^1$, de $\mathbb{S}^1$. (Pour la définition de $SD(\widetilde{g}_i)$ voir §9).

La démonstration se trouve au §10.

2.1. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer la conclusion du théorème si on extrait une sous-suite (g_{i_k}), $0 < i_k < i_{k+1}$ de la suite g_i.

Świątek a démontré que pour tout i, $SD(\widetilde{g}_i) < +\infty$. Il faut montrer une uniformité, on peut toujours supposer $i > k_0$.

2.2. Remarquons.

1. Par les inégalités de Cauchy, $g_i \longrightarrow g$ en topologie C^∞.
2. g_j a au plus $2d-2$ points critiques $\widehat{c}_1^{(j)}, \ldots, \widehat{c}_p^{(j)}$.

3.1. Quitte à extraire une sous suite (g_{i_k}) de la suite (g_i), on peut supposer que les points critiques $(\widehat{c}_j^{(l)})_{1\leqslant j\leqslant q}$ de $(g_{i_k})_k$ peuvent être séparés en $n+1$ ensembles disjoints $I_i \subset \{1,\ldots,q\}$

$$I_1 \amalg \cdots \amalg I_{n+1} = \{1,\ldots,q\}$$

où $\mathrm{Card}(I_j)$ est indépendant de j et vérifiant :

3.2. Si $j \in I_{q_1}$ et $q_1 \neq n+1$, alors, si $k \longrightarrow +\infty$,

$$\widehat{c}_j^{(k)} \longrightarrow z_{q_1} \in \mathbb{S}^1$$

avec $z_{q_1} \neq z_{q_2}$ pour $q_1 \neq q_2$.

3.3. Si $j \in I_{n+1}$,

$$\mathrm{distance}(\widehat{c}_j^{(k)}, \mathbb{S}^1) \geqslant \delta_1 > 0$$

pour un $\delta_1 > 0$ indépendant de i_k.

3.4. Pour tout[2] $\delta_2 > 0$, on peut trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant k_0$, alors[3] les disques $\{|z - z_{q_1}| \leqslant 2\delta_2\}$, $q_1 = 1,\ldots,n$ sont disjoints et $\widehat{c}_j^{(k)} \in \{|z - z_{q_1}| < \delta_2/2\}$ $\forall j \in I_{q_1}$.

3.3 et 3.4 impliquent en utilisant le théorème de Rouché

$$\min_{k\geqslant k_0} \min_{z\in\mathbb{S}^1 - \bigcup_1^n\{|z-z_{q_1}|<\delta_2\}} \big|Dg_{i_k}(z)\big| \geqslant \delta_3 > 0 \tag{3.5}$$

où δ_3 dépend de δ_2 et $\delta_3 \longrightarrow 0$ si $\delta_2 \longrightarrow 0$.

[2]Ndt : suffisamment petit

[3]Ndt : On pourra consulter l'illustration en fin d'article.

3.6. En utilisant 3.4 en supposant que $0 < \delta_2 \leqslant \delta_2'$ pour $j = 1, \ldots, n$ on peut trouver des transformations de Möbius $h_1, \ldots, h_n$ ne dépendant que de δ_2' vérifiant :

$$h_j(z_j) = 0, \qquad h_j : \mathbb{S}^1 - \{1 \text{ point}\} \to \mathbb{R}$$

et pour tout $\delta_2 \leqslant \delta_2'$, h_j est difféomorphisme de $\big\{|z - z_j| \leqslant 2\delta_2,\ |z| = 1\big\}$ sur $[-3\delta, 3\delta]$ où δ dépend de δ_2,

$$\delta \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \delta_2 \longrightarrow 0. \tag{3.6.1}$$

De plus, on peut supposer que

$$h_j\big(\big\{|z - z_j| \leqslant \delta_2,\ |z| = 1\big\}\big) \subset [-\delta, \delta].$$

3.7. Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, $r \in \mathbb{N}$, soit $\lambda_{r,k} \in \mathbb{S}^1$ tel que $\lambda_{r,k} g_{i_k}(z_r) = z_r$.

En supposant que δ_2' est assez petit pour $k \geqslant k_1$ puisque $\widehat{c}_j^{(k)} \longrightarrow z_r$ on a

$$\lambda_{r,k} \cdot g_{i_k}\big(\{|z - z_r| \leqslant 2\delta_2,\ |z| = 1\}\big) \subset \{|z - z_r| \leqslant 2\delta_2,\ |z| = 1\}. \tag{3.8}$$

On définit([4])([5]) $f_k = h_r \circ (\lambda_{r,k} \cdot g_{i_k}) \circ h_r^{-1}$, qui vérifie, pour $k \geqslant \sup(k_0, k_1)$,

$$f_k([-3\delta, 3\delta]) \subset \mathbb{R}\ ; \tag{3.9}$$

(3.10) f_k est un homéomorphisme C^∞ sur son image convergeant en topologie C^∞ vers un homéomorphisme $f : [-3\delta, 3\delta] \to$ son image.

De plus, la suite (f_k) vérifie les conditions suivantes :

3.11.

$$Df_k(x) = \phi_k(x) \prod_{j=1}^{l_1} (x - c_j^{(k)})^{2q_j} \prod_{j=1}^{l_2} \big((x - b_j^{(k)})^2 + (\varepsilon_j^{(k)})^2\big)^{p_j}$$

où q_j, p_j sont des entiers $\geqslant 0$, indépendants de k,
l_1, l_2 sont des entiers $\geqslant 0$, indépendants de k et vérifiant $l_1 + l_2 \geqslant 1$, $c_j^{(k)} \in [-\delta, \delta]$,
$b_j^{(k)} \in [-\delta, \delta]$,
$\varepsilon_j^{(k)} > 0$,
$c_j^{(k)} \longrightarrow 0$, $b_j^{(k)} \longrightarrow 0$, $\varepsilon_j^{(k)} \longrightarrow 0$, si $k \longrightarrow +\infty$,
et la suite

$$(\log \phi_k)_k : x \in [-3\delta, 3\delta] \mapsto \log \phi_k(x)$$

est bornée en topologie C^∞ (C^2 suffira dans la suite) si $k \longrightarrow +\infty$ (cela suit de 2.2.1, 3.3, 3.4 en utilisant le théorème de Rouché).

Les suites (f_k), (ϕ_k), $c_j^{(k)}$, $\ldots$, dépendent de $r = 1, \ldots, n$; nous allons supprimer cette dépendance et considérer abstraitement une suite $(f_k)_{k \geqslant k_3}$ vérifiant les conditions (3.9) à 3.11 que nous avons énoncées ci-dessus.

4.1. Si $\hat{l} \in \mathcal{L}_1 = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R},\ a < b < c\big\}$ on pose

$$b(\hat{l}) = \frac{b - a}{c - a}$$

[4] Ndt : Notez que ce n'est plus une dynamique. Les §3 4 et 5 étudient en effet la distortion du birapport sous *une seule* itérée de g_k.

[5] Ndt : Une raison pour laquelle Herman a préféré ce changement de variables à l'application $z \mapsto e^{2i\pi z}$ est qu'il a majoré la distortion de Świątek de f_k en fonction entre autres du nombre d'intervalles où la Schwarzienne Sf_k est positive ou nulle, nombre qu'il a majoré en fonction du nombre de zéros de la dérivée Schwarzienne. Avec sa définition, f_k reste une fraction rationnelle, et de même degré que f, d'où une borne sur le nombre de zéros de Sf_k. Mais ce n'est pas là le point essentiel.

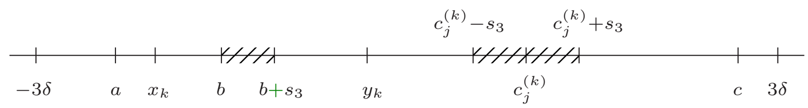
et si $f : K \to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme sur son image, où K est un intervalle compact, on pose

$$|f|_{D_1,K} = \sup_{\substack{\hat{l} \in \mathcal{L}_1 \\ [a,c] \subset K}} \frac{b(f(\hat{l}))}{b(\hat{l})}.$$

4.2. Proposition. *On a*

$$\sup_k |f_k|_{D_1,[-3\delta,3\delta]} < +\infty$$
$$= \sup_k \sup_{-3\delta<a<b<c<3\delta} \frac{f_k(a)-f_k(b)}{a-b} \frac{a-c}{f_k(a)-f_k(c)} < +\infty.$$

4.3. Démonstation. (L'idée de la démonstration m'a été communiquée par J.C. Yoccoz en 1987).



On pose
$$c-b = s, \qquad b-a = s_1.$$
On peut supposer que
$$s_1 < \frac{s}{2}$$
(ce que nous ferons dans la suite) puisque
$$s_1 \geqslant \frac{s}{2} \qquad \text{implique}$$
$$\frac{f_k(a)-f_k(b)}{a-b} \frac{a-c}{f_k(a)-f_k(c)} \leqslant \frac{s_1+s}{s_1} \leqslant 3.$$
On pose $s_3 = \dfrac{s}{4(l_1+l_2+1)}$, où l_1, l_2 sont les entiers définis en 3.11. On pose

$$W^k = [b,c] - \left[ ]b, b+s_3[\cup \Big(\bigcup_{j=1}^{l_1}]c_j^k - s_3, c_j^k + s_3[\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{l_2}]b_j^k - s_3, b_j^k + s_3[\Big) \right].$$

On a
$$\frac{f_k(a)-f_k(b)}{a-b} \leqslant Df_k(x_k)$$
où
$$Df_k(x_k) = \sup_{x\in[a,b]} Df_k(x).$$

$$\begin{aligned} \frac{f_k(c)-f_k(a)}{c-a} &\geqslant \frac{1}{c-a}\int_a^c Df_k(y)dy \geqslant \frac{1}{c-a}\int_{W^{(k)}} Df_k(y)dy \\ &\geqslant \frac{1}{c-a} Df_k(y_k) \int_{W^{(k)}} 1\,dy \\ &\geqslant Df_k(y_k)\frac{s/2}{s+s_1} \geqslant Df_k(y_k)/3 \end{aligned}$$

où $Df_k(y_k) = \min_{y\in W^{(k)}} Df_k(y)$.

Il suffit de montrer

$$\sup_k \frac{Df_k(x_k)}{Df_k(y_k)} < +\infty. \tag{4.4}$$

On a par 3.11

$$\sup_k \log\left(\frac{\phi_k(x_k)}{\phi_k(y_k)}\right) < +\infty. \tag{4.5}$$

On pose $p_{k,j}(x) = |x - c_j^{(k)}|$ et $Q_{k,j}(x) = (x - b_j^{(k)})^2 + (\varepsilon_j^{(k)})^2$. Pour avoir 4.4 comme

$$\frac{Df_k(x_k)}{Df_k(y_k)} = \frac{\phi_k(x_k)}{\phi_k(y_k)} \prod_{j=1}^{l_1} \left(\frac{p_{k,j}(x_k)}{p_{k,j}(y_k)}\right)^{2q_j} \prod_{j=1}^{l_2} \left(\frac{Q_{k,j}(x_k)}{Q_{k,j}(y_k)}\right)^{p_j}$$

il suffit, par 4.5, de montrer

$$\sup_{j,k} \frac{p_{k,j}(x_k)}{p_{k,j}(y_k)} < +\infty\ ; \tag{4.6}$$

$$\sup_{j,k} \frac{Q_{k,j}(x_k)}{Q_{k,j}(y_k)} < +\infty. \tag{4.7}$$

On suppose

$$c_j^{(k)} \leqslant x_k \quad \text{et} \quad b_{j'}^{(k)} \leqslant x_k. \tag{4.8}$$

Puisque

$$\begin{aligned} |x_k - c_j^{(k)}| &\leqslant |y_k - c_j^{(k)}|\ ; \\ |x_k - b_{j'}^{(k)}| &\leqslant |y_k - b_{j'}^{(k)}|\ ; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{p_{k,j}(x_k)}{p_{k,j}(y_k)} &\leqslant 1\ ; \\ \frac{Q_{k,j'}(x_k)}{Q_{k,j'}(y_k)} &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Si j vérifie

$$x_k \leqslant c_j^{(k)} \leqslant b, \qquad x_k \leqslant b_{j'}^{(k)} \leqslant b. \tag{4.9}$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_k - c_j^{(k)}| \leqslant s/2\ ; \\ |y_k - c_j^{(k)}| \geqslant \frac{s}{4(l_1+l_2+1)} = s_3 \qquad \text{(cf. la définition de } W^{(k)})\ ; \end{array} \right. \tag{4.10}$$

et donc

$$\frac{p_{k,j}(x_k)}{p_{k,j}(y_k)} \leqslant 2(l_1 + l_2 + 1).$$

On a les mêmes inégalités que 4.10 en remplaçant $c_j^{(k)}$ par $b_{j'}^{(k)}$ d'où

$$\frac{Q_{k,j}(x_k)}{Q_{k,j}(y_k)} \leqslant \frac{\frac{s^2}{4} + \left(\varepsilon_{j'}^{(k)}\right)^2}{\frac{s^2}{16(l_1+l_2+1)^2} + \left(\varepsilon_{j'}^{(k)}\right)^2} = u_{k,j}$$

et on conclut en utilisant

$$u_{k,j} - 1 \leqslant 4(l_1 + l_2 + 1)^2.$$

On considère finalement les j tels que

$$b \leqslant c_j^{(k)}, \qquad b \leqslant b_{j'}^{(k)}. \tag{4.11}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_k - c_j^{(k)}| \leqslant c - a \leqslant \frac{3}{2}s \\ |y_k - c_j^{(k)}| \geqslant \frac{s}{4(l_1+l_2+1)} = s_3 \qquad \text{cf. la définition de } W^{(k)} \end{array} \right. \tag{4.12}$$

et on a les mêmes inégalités 4.12 en remplaçant $c_j^{(k)}$ par $b_{j'}^{(k)}$. On conclut

$$\begin{aligned} \frac{p_{k,j}(x_k)}{p_{k,j}(y_k)} &\leqslant 6(l_1+l_2+1)\ ; \\ \frac{Q_{k,j'}(x_k)}{Q_{k,j'}(y_k)} &\leqslant 36(l_1+l_2+1)^2+1. \end{aligned}$$

4.8, 4.9 et 4.11 épuisent tous les cas et on a bien montré 4.6 et 4.7. ∎

4.13. En changeant x en $-x$ on obtient :

Proposition. *On a*

$$\sup_k \sup_{-3\delta<b<c<d<3\delta} \frac{f_k(d)-f_k(c)}{d-c}\,\frac{d-b}{f_k(d)-f_k(b)} < +\infty.$$

5.1. On se place avec les hypothèses de 4.1. On suppose que $h : K_1 \to K$ et $g : K \to K_2$ sont des homéomorphismes bi-lipschitziens. Alors

$$|g\circ f\circ h|_{D_1,K_1} \leqslant \operatorname{Lip}(g)\operatorname{Lip}(g^{-1})\operatorname{Lip}(h)\operatorname{Lip}(h^{-1})|f|_{D_1,K}. \tag{5.2}$$

5.3. Soit $\widetilde{g}_{i_k}$ la suite relevée.

Proposition. *On a*[6]

$$\sup_k \sup_{l\in\mathcal{L}_1} D(l,\widetilde{g}_{i_k}) < +\infty.$$

5.4. Démonstration. Par 2.2

$$\sup_k \|D\widetilde{g}_{i_k}\|_{C^0} < +\infty. \tag{5.5}$$

On a $(\widetilde{g}_i)$ converge uniformément vers $\widetilde{g}\in\mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$ et donc

$$\widetilde{g}_i^{-1} \text{ converge uniformément vers } \widetilde{g}^{-1}. \tag{5.6}$$

Soit $\varepsilon>0$, $l=(a,b,c)\in\mathcal{L}_1$, $c-a\geqslant\varepsilon$, alors

$$D(l,\widetilde{g}_i) \leqslant \|D\widetilde{g}_i\|_{C^0}\frac{\varepsilon}{\widetilde{g}_i(c)-\widetilde{g}_i(a)}$$

et donc en utilisant 5.5 et 5.6, pour tout $\varepsilon>0$ fixe

$$\sup_i \sup_{\substack{l\in\mathcal{L}_1\\ c-a\geqslant\varepsilon}} D(l,\widetilde{g}_i) < +\infty. \tag{5.5bis}$$

Au voisinage des points critiques, on utilise 5.1[7], 4.2, 3.6 et 3.8. La démonstration de la proposition 2, §6 de [H] s'applique sans changement en utilisant 2.2 et 3.5, et, permet d'obtenir une uniformité et de conclure. ∎

On obtient par les mêmes arguments en utilisant §6 de [H] :

5.6bis. Proposition. On a

$$\sup_k \sup_{\mathcal{L}_2} D(l,\widetilde{g}_{i_k}) < +\infty\ ;$$

ce qui implique avec 5.3

$$\sup_k \sup_{\mathcal{L}} D(l,\widetilde{g}_{i_k}) < +\infty.$$

[6] Ndt : Voir les notes situées après la bibliographie pour la définition de $D(l,\widetilde{g}_{i_k})$.

[7] Ndt : en effet on passe de $\widetilde{g}_{i_k}$ à f_k par un changement de variable (exponentielle puis möbius)

6.1. Si $f : [-3\delta, 3\delta] \to \mathbb{R}$ est homéomorphisme[8] sur son image de classe C^ω (f peut avoir des points critiques). Soit $C(f) = \{x \in [-3\delta, 3\delta],\ Df(x) = 0\}$. On définit sur $[-3\delta, 3\delta] - C(f)$ la dérivée Schwarzienne de f

$$S(f) = D^2 \log Df - \frac{1}{2}\Big(D \log Df\Big)^2.$$

L'ensemble $\Delta = \{x,\ S(f)(x) \geqslant 0\}$ est compact dans $[-3\delta, 3\delta]$ et inclus dans $[-3\delta, 3\delta] - C(f)$.

6.2. On suppose que $\Delta \neq \varnothing$. On peut écrire

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{p} \Delta_j$$

où Δ_j est un intervalle compact $\Delta_{j_1} \cap \Delta_{j_2} = \varnothing$ si $j_1 \neq j_2$.

6.3. Si f est une fraction rationnelle de degré $\leqslant d$ alors $S(f)$ est une fraction rationnelle de degré $\leqslant 2(3d-2)$ et donc $p \leqslant 2(3d-2)+1$.[9]

6.4. Sur chaque Δ_j on a $D^2 \log Df(x) > 0$ si $x \in \mathrm{Int}(\Delta_j)$ et donc $\log Df$ est *convexe* sur Δ_j.

6.5. Si $\eta : \Delta_j \to \mathbb{R}$ est une fonction, on pose

$$\operatorname*{Osc}_{\Delta_j}(\eta) = \max_{\Delta_j} \eta(x) - \min_{\Delta_j} \eta(x).$$

Si $(\eta_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ est une suite finie de fonctions sur Δ_j on a

$$\operatorname*{Osc}_{\Delta_j}(\sum_1^l \eta_i) \leqslant \sum_1^l \operatorname*{Osc}_{\Delta_j}(\eta_i).$$

6.6. Puisque $\log Df$ est convexe sur Δ_j on a

$$\mathrm{Var}_{\Delta_j}(\log Df) \leqslant 2 \operatorname*{Osc}_{\Delta_j}(\log Df)$$

et

$$\mathrm{Var}_{\Delta}(\log Df) \leqslant 2 \sum_{j=1}^{p} \operatorname*{Osc}_{\Delta_j}(\log Df)$$

où Var_Δ désigne la variation totale sur Δ.

6.7. On suppose que

$$\begin{aligned} Df(x) &= \phi(x) \prod_1^{l_1} P_j(x)^{2q_j} \prod_1^{l_2} Q_j(x)^{p_j} \qquad (6.8)\\ P_j(x) &= |x - c_j|, \qquad c_j \in [-\delta, \delta]\ ;\\ Q_j(x) &= (x-b_j)^2 + \varepsilon_j^2, \quad b_j \in [-\delta, \delta]\ ;\\ p_j &\in \mathbb{N} \text{ et les } \varepsilon_j \text{ sont petits, } \varepsilon_j > 0, \text{ et } l_1 + l_2 \geqslant 1. \end{aligned}$$

On a

$$D^2 \log Df(x) = D^2 \log \phi(x) + \sum_1^{l_1} \frac{-2q_j}{(x-c_j)^2} + \sum_1^{l_2} 2p_j \frac{\varepsilon_j^2 - (x-b_j)^2}{((x-b_j)^2 + \varepsilon_j^2)^2}. \qquad (6.9)$$

[8] Ndt : croissant

[9] Ndt : on peut améliorer ces bornes

Soit

(6.10) $$\Phi_j(x) = \frac{\varepsilon_j^2 - (x-b_j)^2}{((x-b_j)^2+\varepsilon_j^2)^2}$$

qui vérifie

(6.11) $\Phi_j(x) \geqslant 0 \implies |x-b_j| \leqslant \varepsilon_j.$

(6.12) $\sup_x \Phi_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^2}.$

([10])

(6.14) $\Phi(x) \leqslant -\frac{2}{25}\,\frac{1}{(x-b_j)^2},$ si $|x-b_j| \geqslant 2\varepsilon_j.$

Soit $q>0$ alors il existe $C(q)>0$ tel que

(6.15) $$\underset{|x\text{-}b_j|\leqslant q\varepsilon_j}{\mathrm{Osc}}(\log Q_j) \leqslant C(q) = \log(1+q^2).$$

(En effet
$$\frac{1}{1+q^2} \leqslant \frac{(x-b_j)^2+\varepsilon_j^2}{(y-b_j)^2+\varepsilon_j^2} \leqslant 1+q^2$$
si $|x-b_j| \leqslant q\varepsilon_j$ et $|y-b_j| \leqslant q\varepsilon_j$.)

6.16. On suppose que δ_1 est petit et $D^2\log\phi$ est borné indépendamment de $\delta<\delta_1$. Comme $l_1+l_2 \geqslant 1$ on a (en utilisant (6.14))

(6.17) $$\bigcup_1^p \Delta_j \subset \bigcup_{j=1}^{l_2}\big\{|x-b_j| \leqslant 2\varepsilon_j\big\}.$$

6.18. On considère les points $b_j \pm 10\varepsilon_j$ inclus dans Δ_k. Ces points avec les extrémités de Δ_k découpent Δ_k en au plus $2l_2+1$ intervalles
$$\bigcup_{i=1}^{p_2} I_i^k = \Delta_k$$
$\mathrm{Int}(I_{i_1}^k) \cap \mathrm{Int}(I_{i_2}^k) = \varnothing$, si $i_1 \neq i_2$. Par (6.17)

(6.19) $$\mathrm{Int}(I_i^k) \cap \big\{|x-b_j| \leqslant 10\varepsilon_j\big\} \neq \varnothing$$

pour au moins un $j \geqslant 1$.

6.20. Lemme. *Si on suppose (6.19) alors*
$$I_i^k \subset \big\{|x-b_j| \leqslant 10\varepsilon_j\big\}.$$

Démonstration. $\mathrm{Int}(I_i^k) \cap \big\{|x-b_j| \leqslant 10\varepsilon_j\big\}$ est fermé dans $\mathrm{Int}(I_i^k)$. Il est ouvert car par le choix des extrémités de I_i^k,
$$\mathrm{Int}(I_i^k) \cap \big\{|x-b_j| \leqslant 10\varepsilon_j\big\} = \mathrm{Int}(I_i^k) \cap \big\{|x-b_j| < 10\varepsilon_j\big\}$$
et on conclut en utilisant (6.19). ■

La proposition essentielle par la suite est la suivante.

6.21. Proposition. *On suppose*[11] *que* $l_2 \geqslant 1$, $\varepsilon' > 0$ *et*

(6.22) $$\sup_{-3\delta\leqslant x\leqslant 3\delta}\Big(\big|\log\phi(x)\big|, \big|D\log\phi(x)\big|, \big|D^2\log\phi(x)\big|\Big) = w < \varepsilon'^{-1}.$$

[10] Ndt : Le 6.13 a été supprimé.

[11] Ndt : On se place dans les hypothèses de 6.7.

Il existe $\delta_1 > 0$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon'$ *tels que si* $0 < \delta < \delta_1$, $\sup_j \varepsilon_j \leqslant \varepsilon_0$ *alors*

$$\operatorname*{Var}_{I_i^k}(\log Df) \leqslant 2 \operatorname*{Osc}_{I_i^k}(\log \phi) + C$$

où C *est une constante indépendante de* c_j, $b_{j'}$, I_i^k, $\varepsilon_{j'}$ *et dépendant seulement de* l_2 *et* p_j, $1 \leqslant j \leqslant l_2$.

6.23. Démonstration. D'après 6.5 et 6.6 il suffit de borner $\operatorname*{Osc}_{I_i^k}(\log Q_j)$ et $\operatorname*{Osc}_{I_i^k}(\log P_{j'})$, $1 \leqslant j \leqslant l_2$, $1 \leqslant j' \leqslant l_1$. On peut supposer, si δ_1 est assez petit, que 6.16 est vérifié si $\delta < \delta_1$.

6.24. En utilisant 6.20 on peut trouver un entier $\nu \geqslant 1$ tel que

$$I_i^k \subset \big\{|x - b_\nu| \leqslant 10\varepsilon_\nu\big\}$$

et

$$\varepsilon_j \geqslant \varepsilon_\nu \text{ si } I_i^k \subset \big\{|x - b_j| \leqslant 10\varepsilon_j\big\}.$$

On considère les

$$j \text{ tels que } \varepsilon_j \geqslant \varepsilon_\nu. \tag{6.25}$$

On veut majorer $\operatorname*{Osc}_{I_i^k}(\log Q_j)$. On considère 2 cas :

1. $|b_j - b_\nu| \leqslant 20\varepsilon_\nu$ (on permet $j = \nu$).
On a

$$I_i^k \subset [b_j - c_2\varepsilon_j, b_j + c_2\varepsilon_j]$$

où $c_2 \leqslant \dfrac{30\varepsilon_\nu}{\varepsilon_j} \leqslant 30$ et on applique 6.15 pour obtenir

$$\operatorname*{Osc}_{I_i^k}(\log Q_j) \leqslant \log(1 + c_2^2). \tag{6.26}$$

2. $|b_j - b_\nu| \geqslant 20\varepsilon_\nu$.
On a, si $x, y \in [u_1, u_2] = I_i^k$,

$$\begin{cases} |b_j - x| \leqslant |b_j - b_\nu| + 10\varepsilon_\nu \leqslant \frac{3}{2}|b_j - b_\nu| \ ; \\ |b_j - y| \geqslant |b_j - b_\nu| - 10\varepsilon_\nu \geqslant \frac{1}{2}|b_j - b_\nu|. \end{cases} \tag{6.26bis}$$

6.27. Lemme. *Soient* $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, $x \neq 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *alors*

$$\inf(1, c_3/c_4) \leqslant \psi(x) = \frac{c_3x^2 + \varepsilon^2}{c_4x^2 + \varepsilon^2} \leqslant \sup(1, c_3/c_4).$$

Démonstration.
Soit $0 < k \leqslant 1$ avec $kc_3 \leqslant c_4$, alors $\frac{k}{k}\psi(x) \leqslant \frac{1}{k}$.
Soit $0 < k \leqslant 1$ avec $kc_4 \leqslant c_3$, alors $\frac{k}{k}\psi(x) \geqslant k$. ∎

Il suit que, si $x, y \in I_i^k$, en utilisant 6.26bis

$$\frac{1}{9} \leqslant \frac{Q_j(x)}{Q_j(y)} \leqslant 9 \iff \operatorname*{Osc}_{I_i^k}(\log Q_j) \leqslant \log 9. \tag{6.28}$$

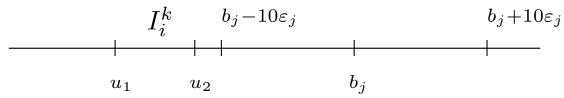
On considère les

$$j \text{ tels que } \varepsilon_j < \varepsilon_\nu. \tag{6.29}$$

On a par la définition de ν en 6.24 et 6.20

$$\operatorname{Int}(I_i^k) \cap [b_j - 10\varepsilon_j, b_j + 10\varepsilon_j] = \varnothing.$$

On peut supposer qu'on a la figure suivante quitte à changer l'orientation (on permet a priori $u_2 = b_j - 10\varepsilon_j$)



Par 6.4, 6.9, 6.12 et 6.14, si $x \in I_i^k$,[12]

$$\begin{aligned} 0 \leqslant D^2 \log Df(x) &\leqslant \sup_x D^2 \log \phi(x) + \frac{2\sum_1^{l_2} p_{j'}}{\varepsilon_\nu^2} - \frac{2}{25}\frac{1}{(x-b_j)^2} \\ &\underset{6.22}{\leqslant} (1 + 2\sum_1^{l_2} p_{j'})/\varepsilon_\nu^2 - \frac{2}{25}\frac{1}{(x-b_j)^2} \end{aligned}$$

et donc

$$|x - b_j| \geqslant c_5 \varepsilon_\nu$$

où c_5 est une constante.

On en déduit en utilisant $|u_1 - u_2| \leqslant 20\varepsilon_\nu$

$$\operatorname*{Osc}_{x \in I_i^l} \log |x - b_j| \leqslant c_6$$

et on conclut en utilisant 6.27

(6.30) $$\operatorname*{Osc}_{I_i^k} (\log Q_j) \leqslant c_7$$

où c_6 et c_7 sont des constantes dépendant seulement de $(p_l)_{1 \leqslant l \leqslant l_2}$.

La même démonstration que ci-dessus montre, que si $x \in I_i^k$,

$$|x - c_j| \geqslant c_{10} \varepsilon_\nu$$

d'où

$$\operatorname*{Osc}_{x \in I_i^k} \big(\log |x - c_j|\big) \leqslant c_9 \;;$$

ce qui implique pour tout j, $\quad 1 \leqslant j \leqslant l_1$,

(6.31) $$\operatorname*{Osc}_{I_i^k} (\log P_j) \leqslant c_8$$

où c_7 et c_8 ne dépendent que de $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant l_2}$. La proposition suit en utilisant 6.5, 6.6, 6.26, 6.28, 6.30 et 6.31. ■

Il résulte de (6.21) que si $\delta < \delta_1$ et $\sup_j \varepsilon_j \leqslant \varepsilon_0$

7. Corollaire. *On a*[13]

$$\operatorname{Var}_\Delta(\log Df) \leqslant 2 \operatorname{Var}_\Delta(\log \phi) + (2l_2 + 1)pC$$

où p est l'entier défini en 6.2 et par 6.3

$$p \leqslant 2(3d - 2) + 1.$$

Par 6.22 $\operatorname{Var}_\Delta(\log \phi) \leqslant w$.

---

[12]Ndt : dans le troisième terme du membre de droite de 6.9, c'est à dire $\sum_{j'=1}^{l_2} 2p_j \Phi_{j'}(x)$, les termes positifs nécessitent $|x - b_{j'}| < \varepsilon_{j'}$ d'après 6.11, et donc par 6.20 $I_i^k \subset \{|x - b_{j'}| < 10\varepsilon_{j'}\}$ et donc par 6.24, $\varepsilon_{j'} \geqslant \varepsilon_\nu$ d'où par 6.12 $\Phi_{j'}(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}$

[13]Ndt : la constante C est celle de 6.21 et dépend elle-même de l_2, ainsi que des p_j définis au 6.7

8.1. On se donne $(l_i)_{0\leqslant i\leqslant j-1} \in \mathcal{L}$, $l_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ tel que $[l_i] = [a_i, d_i] \subset [-3\delta, 3\delta]$ vérifiant pour tout $x \in [-3\delta, 3\delta]$

$$\operatorname{card}\big\{j \in J,\ x \in [a_i, d_i]\big\} \leqslant 5 \text{ où } J = \{0, \dots, j-1\}. \tag{8.2}$$

On définit

$$\underset{[-3\delta,3\delta]}{SD}(f) = \sup \prod_{0}^{j-1} D(l_i, f),$$

le sup étant pris sur tous les $(l_i)_{i\in J}$ et J vérifiant (8.2).

8.3. On considère la suite $(f_k)_{k\geqslant k_0}$ donnée en 3.7. En utilisant 3.6, 3.6.1 et 3.11 on peut supposer que 6.22 est vérifiée[14].

8.4. Proposition. *On a, si $\delta < \delta_1$ où δ_1 est défini en 6.21*

$$\sup_k \underset{[-3\delta,3\delta]}{SD}(f_k) < +\infty.$$

Démonstration. On se donne $(l_i)_{i\in J}$ vérifiant 8.2 on veut majorer

$$\prod_{0}^{j-1} D(f_k, l_i) \tag{8.6}$$

indépendamment de $(l_i)_{i\in J}$, J et k. Soit $\Delta^{(k)}$ associé à f_k et défini en 6.1. Soit $J_1 = \big\{j \in J \,\big|\, [l_j] \cap \{c_1, \dots, c_{l_1}\} \neq \varnothing\big\}$. On a

$$\operatorname{card}(J_1) \leqslant 5 \operatorname{card}(\{c_1, \dots, c_{l_1}\}).$$

On majore

$$\prod_{j\in J_1} D(l_j, f_k) \leqslant c_1 \tag{8.7}$$

en utilisant 5.6bis, où c_1, c_2, c_3 désignent des constantes indépendantes de J, $(l_i)_{i\in J}$ et k.

Soit $J_2 \subset J - J_1$, $J_2 = \big\{j \in J - J_1,\ [l_j] \cap \partial\Delta^{(k)} \neq \varnothing\big\}$ où $\partial\Delta^{(k)}$ désigne les extrémités de $\Delta^{(k)}$. On a par 6.3

$$\operatorname{card}(J_2) \leqslant 5(2(3d-2)+1)$$

et en utilisant 5.6bis

$$\prod_{j\in J_2} D(l_i, f_k) \leqslant c_2. \tag{8.8}$$

Si $j \in J - J_1 \cup J_2$ alors

$$[l_j] \subset [-3\delta, 3\delta] - \big(\{c_1, \dots, c_{l_1}\} \cup \partial\Delta^{(k)}\big).$$

Soit $J_3 = \big\{j \in J - (J_1 \cup J_2),\ [l_j] \subset \operatorname{Int}\Delta^{(k)}\big\}$. On majore en utilisant 7 ([15])

$$\prod_{j\in J_3} D(l_j, f_k) \leqslant e^{10 \operatorname{Var}_{\Delta^{(k)}}(\log Df_k)} \leqslant c_3 \tag{8.9}$$

et finalement

$$\prod_{j\in J-J_1\cup J_2\cup J_3} D(l_j, f_k) \leqslant 1 \tag{8.10}$$

puisque $Sf < 0$ sur un voisinage de l_j (cf. [H])

$$D(l_j, f_k) \leqslant 1.$$

[14]Ndt : avec un ε' uniforme

[15]Ndt : voir [H], section 9, partie J_3 de la démonstration du théorème §2

La proposition suit en multipliant (8.7), …, (8.10). ■

9. On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme qui vérifie $R_p \circ f = f \circ R_p$, $p \in \mathbb{Z}$, $R_p : x \mapsto x + p$, i.e. $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$. On considère $(l_i)_{i\in J}$, $J = \{0, 1, \dots, j-1\}$ vérifiant[16]

$$\forall x \in \mathbb{T}^1 \text{ card}\left\{j,\ x \in [l_j] \bmod 1\right\} \leqslant 5. \tag{9.1}$$

On définit si $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{T}^1)$

$$SD(f) = \sup \prod_{j\in J} D(l_j, f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{9.2}$$

le sup étant pris sur tous les $(l_j)_{j\in J}$ et J vérifiant 9.1. On a si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$SD(f + \lambda) = SD(f) \tag{9.3}$$

et si $h \in \mathcal{D}^1(\mathbb{T}^1)$ tel que $\mathrm{Var}_{\mathbb{T}^1}(\log Dh) = V < +\infty$ alors[17]

$$SD(h \circ f \circ h^{-1}) \leqslant e^{20V} SD(f). \tag{9.4}$$

Si K est un intervalle $[u, v]$, $u \neq v$ et si f est un homéomorphisme sur son image, on définit $\underset{K}{SD}(f)$ comme nous l'avons fait en 9.2

$$\underset{K}{SD}(f + \lambda) = \underset{K}{SD}(f) \tag{9.5}$$

et si $g : K_1 \to K$ et $h : K \to K_2$ sont des difféomorphismes $C^{1+\text{variation bornée}}$

$$\underset{K_1}{SD}(h \circ f \circ g) \leqslant C(g, h)\ \underset{K}{SD}(f) \tag{9.6}$$

où $C(g, h) < +\infty$ est une constante dépendant de g et h.

10. Démonstration du théorème §2.

Par 2.1 il suffit de démontrer

$$\sup_k SD(\widetilde{g}_{i_k}) < +\infty.$$

La démonstration est la même que celle de [H, p.15 à 18][18]. On a bien une uniformité (c.f. 5.6bis) pour $\sup_{l\in\mathcal{L}} D(l, \widetilde{g}_{i_k})$ et au voisinage des points critique l'inégalité résulte de 8.4, en utilisant 9.6 et 3.6[19]. L'uniformité de la variation de $\log D\widetilde{g}_{i_k}$ sur $[0,1] - U_\varepsilon$ (notation de [H]) résulte de 2.2 et 3.5. ■

11. On se donne α un nombre de type constant et g_i une suite vérifiant les hypothèses de 1. On suppose que $\rho(\widetilde{g}_i) = \alpha$. Nous avons montré [H] que

$$\widetilde{g}_i = \widetilde{h}_i \circ R_\alpha \circ \widetilde{h}_i^{-1},\ h_i \in \mathcal{D}^{\mathrm{qs}}(\mathbb{T}^1),\ \widetilde{h}_i(0) = 0 \text{ et}$$

$$\left|\widetilde{h}_i\right|_{\mathrm{qs}} \leqslant C(\alpha, SD(\widetilde{g}_i))$$

---

[16]Ndt : On demande en fait que $\text{card}\left\{(j,k),\ x + k \in [l_j]\right\} \leqslant 5$. Si on impose que la longueur des l_j est < 1, alors c'est équivalent.

[17]Ndt : En effet, d'une part $\forall f, g,\ SD(f \circ g) \leqslant SD(f)SD(g)$, d'autre part $\forall h,\ SD(h) \leqslant e^{10\,\mathrm{Var}_{\mathbb{T}^1}(\log Dh)}$, voir la référence citée en note 15.

[18]Ndt : Ces numéros de page réfèrent au manuscrit. Elles correspondent à la preuve du théorème 2 de [H].

[19]Ndt : en effet on passe de $\widetilde{g}_{i_k}$ à f_k par un changement de variable (exponentielle puis möbius)

où C est une constante ne dépendant que de α et de $SD(\widetilde{g}_i)$. Il suit de la démonstration [H] et de 2 que
$$\sup_i C(\alpha, SD(g_i)) < +\infty.$$

12. On étend $\widetilde{h}_i$ en un homéomorphisme K_i-quasi conforme $\widetilde{H}_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant
$$K_i \leqslant 2\Big(C\big(\alpha(SD(\widetilde{g}_i))\big)\Big)^2$$

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_i(z+(1,0)) &= (1,0) + \widetilde{H}_i(z) \quad \forall z\ ;\\ \widetilde{H}_i\big|_{\mathbb{R}} &= \widetilde{h}_i.\end{aligned} \tag{12.1}$$

Pour cela, il suffit de prendre l'extension de Beurling Ahlfors
$$\widetilde{H}_i(x+iy) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(h(x+yt)+h(x-yt)\Big)dt + \frac{i}{2}\int_0^1 \Big(h(x+yt)-h(x-yt)\Big)dt.$$
En utilisant (12.1), par $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{2\pi i z} \in \mathbb{C}$ et par passage au quotient, $\widetilde{h}_i$ se projette en $h_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$
$$\text{et } \widetilde{H}_i \text{ en } H_i : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$$
où H_i est un homéomorphisme K_i-quasi conforme vérifiant
$$\begin{aligned}&H_i(0) = 0\ ;\\ &H_i\big|_{\mathbb{S}^1} = h_i\\ \text{et}\quad &\sup_i K_i < +\infty.\end{aligned}$$
De plus $H_i \circ r_\alpha \circ H_i\big|_{\mathbb{S}^1}^{-1} = g_i$ avec $r_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z$.

13. On se donne $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$. Soit
$$\mathcal{H}_d = \left\{g(z) = \lambda z^d \prod_{i=1}^{d-1} \frac{1-\overline{a}_i z}{z-a_i},\ 0<|a_i|<1,\ |\lambda|=1,\ g\big|_{\mathbb{S}^1} \text{ est un homéomorphisme}\right\}.$$

14. Proposition. *On a*
$$\sup_{g\in\mathcal{H}_d} \big(SD(\widetilde{g}\big|_{\mathbb{S}^1})\big) < +\infty$$
$\widetilde{g}\big|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *désignant un relèvement de* g *à* $\mathbb{R}$.

15. Lemme. *Soit* $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_d$ *une suite et* $a^{(j)} = (a_1^{(j)}, \ldots, a_{d-1}^{(j)}) \in (\mathbb{D}^*)^{d-1}$ *où*
$$g_j(z) = \lambda_i z^d \prod_{k=1}^{d-1} \frac{1-\overline{a}_k^{(j)} z}{z - a_k^{(j)}}$$
alors
$$\sup_j |a_k^{(j)}| < 1.$$

[20]
Ce lemme était connu de l'auteur depuis décembre 1988.

[20] Ndt : Le degré peut chuter à la limite si l'un des $a_k \longrightarrow 0$.

Démonstation. Raisonnons par l'absurde. Soit une sous-suite $a^{(j_k)}$ telle que

$$\sup_k |a^{(j_k)}| = 1,$$

quitte à extraire une sous-suite et à réordonner la suite $a_1^{(j_k)}, \dots, a_{d-1}^{(j_k)}$ on peut supposer que $a^{(j_k)} \longrightarrow b \in \overline{\mathbb{D}}^{d-1}$,

$$\begin{aligned} &b = (b_1, \dots, b_q, \dots, b_{d-1}),\\ &|b_j| = 1 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant q,\\ &\sup |b_j| < 1 \text{ si } q < j \leqslant d-1. \end{aligned}$$

On peut toujours supposer $\lambda_j = 1$. Sur $\widehat{\mathbb{C}} - \{b_1, \dots, b_q, 0, \infty\}$, $g_{i_k} \longrightarrow g$ converge localement uniformément

$$g(z) = z^{d_1} \prod_{j=1}^{q} (-\bar{b}_j) \prod_{j \in J} \frac{1 - \bar{b}_j z}{z - b_j}$$

$$J = \big\{k,\ b_k \neq 0,\ k > q\big\}$$

$$d_1 = d - (d - 1 - \operatorname{card}(J) - q) = 1 + q + \operatorname{card}(J) > 1 + \operatorname{card}(J)$$

$g\big|_{\mathbb{S}^1}$ est de degré $q + 1 > 1$.

Soit $z_0 \in \mathbb{S}^1 - \{b_1, \dots, b_q\}$ et λ_k tel que

$$\lambda_k g_{i_k}(z_0) = z_0, \quad |\lambda_k| = 1.$$

Quitte à extraire des sous-suites on peut supposer que $\lambda_k \longrightarrow \lambda$ si $k \longrightarrow +\infty$. Comme $G_k = \lambda_k g_{i_k}$ est une suite d'homéomorphismes vérifiant $G_k(z_0) = z_0$ par le théorème de Helly[21], comme G_k converge sur $\mathbb{S}^1 - \{b_1, \dots, b_q\}$ on conclut que $\lambda g : \mathbb{S}^1 - \{z_0\} \to \mathbb{S}^1 - \{z_0\}$ est monotone non décroissante, et comme λg est continue, λg est un homéomorphisme ce qui est contraire au fait que λg est de degré $\geqslant 2$. ■

16. Démonstration de la proposition 14.

Si $\sup_{g \in \mathcal{H}_d} SD(\widetilde{g}) = +\infty$ on peut trouver une suite $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_i SD(\widetilde{g}_i) = +\infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite g_{i_k} on peut supposer que $a^{(i_k)}$ converge vers un élément b de $\overline{\mathbb{D}}^{d-1}$. Par le lemme précédent $b \in \mathbb{D}^{d-1}$. Les hypothèses de 1 sont vérifiées pour la suite (g_{i_k}) et par 2

$$\sup_i SD(\widetilde{g}_i) = +\infty \quad \text{n'est pas possible.}$$

■

16.1. Remarque. 14 ainsi que le lemme 15 sont faux si on ne se restreint pas aux produits de Blaschke de la forme particulière que nous avons considérée en 13.

Exemple

$$g_t(z) = \frac{z - t}{1 - \bar{t} z} \qquad |t| < 1,\ t \longrightarrow 1.$$

[21]Ndt : Théorème de Helly : soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'$\exists M, N > 0$ tels que $\forall f \in \mathcal{F}$, $|f| \leqslant M$ et $\operatorname{Var}(f) \leqslant N$. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une suite f_n convergeant en tout point de I vers une fonction f vérifiant les mêmes inégalités.

Si on avait $\sup_t SD(\widetilde{g}_t) < +\infty$, $\widetilde{g}_t$ et $\widetilde{g}_t^{-1}$ seraient uniformément k-quasi symétriques et donc si $t_i \longrightarrow 1$ $\widetilde{g}_{t_i} - \widetilde{g}_{t_i}(0)$ aurait des valeurs limites non constantes. Pour cet exemple 17 est faux si on impose[22] que $H_{g_t}(0) = 0$.

17. <u>Corollaire</u>. *Soit α un nombre de type constant et $\mathcal{H}_{d,\alpha} = \{g \in \mathcal{H}_d,\ \rho(g) = \alpha \bmod 1\}$. Si $H_g : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ est l'homéomorphisme $K(H_g)$-quasi conforme que nous avons défini en 12, alors*

$$\sup_{g \in \mathcal{H}_{d,\alpha}} K(H_g) < +\infty.$$

Cela suit immédiatement de 12.

Références

[H] M.R. Herman. *Conjugaison quasi symétrique des homéomorphismes analytiques du cercle à des rotations*, manuscrit, 1987.

[S] G. Świątek. *Rational rotation numbers for maps of the circle*, to appear in CMP.[23]

Notes

Structure de l'article.

–§0 introduction
–§1 et §2 hypothèse et énoncé du théorème principal : la distortion de Świątek reste bornée ; quelques remarques
–§3 extraction d'une sous-suite et mise sous forme locale aux points critiques de la limite
–§4 et §5 contrôle de la distortion du birapport sous une seule itérée
§4 problème local
§5 problème global
–§6 à §9 contrôle de la distortion de Świątek (produit des distortions des birapports sur un ensemble presque disjoint d'intervalles de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$)
§6 et §7 énoncé et démonstration d'une proposition clé ; c'est cette proposition qui permet l'adaptation de [H] aux familles de fonctions ; elle dit que la variation totale du logarithme de la dérivée sur les intervalle où la dérivée Schwarzienne est positive reste bornée.
§8 problème local
§9 problème global
–§10 fin de la démonstration du théorème principal
–§11 à §17 applications
§11 lien avec la constante de quasisymétrie de la conjugaison à la rotation
§12 lien avec la constante de quasiconformité de l'extension d'Ahlfors-Beurling
§13 définition d'un exemple de classe $\mathcal{H}_d$ de produits de Blaschke
§15 démonstration que $\mathcal{H}_d$ est une classe compacte
§14, §16 et §17 application du théorème principal à $\mathcal{H}_d$, remarques

[22] Ndt : c'est à dire qu'on ne prend plus l'extension d'Ahlfors-Beurling mais qu'on demande à la place que $H_{g_t}(0) = 0$; notons que sur cet exemple, qui est un möbius, la conjugaison de $\lambda_t g_t$ à la rotation $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}t$ est elle-même un möbius, donc admet une extension H_{g_t} qui est conforme : $K(H_{g_t}) = 1\ldots$

[23] Ndt : Paru : Comm. Math. Phys., 119 (1988) 109–128.

Rappel de quelques définitions de [H] :

$$D(l,f) = \frac{b(f(l))}{b(l)}$$

où

$$l \in \mathcal{L} = \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ a<b<c<d\big\}$$

et

$$b(l) = \frac{b-a}{c-a} \Big/ \frac{d-b}{d-c}$$

est le birapport. Y sont définis également :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1 = \big\{(a,b,c,+\infty) \in \mathbb{R}^4,\ a<b<c\big\},\\
&\mathcal{L}_2 = \big\{(-\infty,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ b<c<d\big\},\\
&\forall l \in \mathcal{L}_1,\ b(l) = \frac{b-a}{c-a},\\
&\forall l \in \mathcal{L}_2,\ b(l) = \frac{d-c}{d-b}.
\end{aligned}$$

Illustration du §3.4 :

Les points critiques de g_k sont soit à distance $\geqslant \delta_1$ de $\mathbb{S}^1$, soit situés dans dans des disques gris. Ces derniers sont centrés aux points critiques de l'application limite g.