Présence d'un point critique au bord des disques de Siegel des polynômes bicritiques

Arnaud Chéritat and Pascale Roesch

CNRS, Univ. Toulouse

Nice, 15 mars 2010

Théorème (Arnol'd)

Pour tout θ *diophantien et* $h > 0$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que tout difféomorphisme analytique* f *de* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *de nombre de rotation* θ *et qui possède un prolongement à une bande de hauteur* h *et vérifie* $|f(x) - x| < \varepsilon$ *sur* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *est analytiquement linéarisable.*

Théorème (Herman)

Pour tout θ *diophantien, l'hypothèse* $|f(x) - x| < \varepsilon$ *est superflue.*

Yoccoz a ultérieurement démontré caractérisé l'ensemble $\mathcal{H}$ des nombres de rotation pour lesquels tout difféomorphisme analytique est analytiquement linéarisable. Il les a appelé *nombres de Herman*.

Théorème (Ghys)

Si P est un polynome ayant un disque de Siegel Δ de nombre de rotation dans $\mathcal{H}$ et si $\partial\Delta$ est une courbe de Jordan alors $\partial\Delta$ contient un point critique.

Théorème (Herman)

Soit f holomorphe sur un ouvert Ω. S'il y a un domaine de rotation de nombre de rotation dans $\mathcal{H}$ et ayant une composante X de son bord compactement incluse dans Ω, alors f n'est pas injective au voisinage de X.

Note : f n'est pas injective au voisinage de $X \iff$ (f a un point critique dans X) ou (la restriction de f à X est non-injective).

Théorème (Herman)

Si P est un polynôme unicritique $(z^d + v)$ et si Δ est un disque de Siegel de nombre de rotation dans $\mathcal{H}$ alors le point critique est au bord de Δ.

Mais on ne sait pas si la restriction f à $\partial\Delta$ est injective.

Preuve : Soit $\widehat{\Delta}$ le "rempli" de $\overline{\Delta}$. Soit c le point critique et v la valeur critique. 3 cas :

1. $v \notin \widehat{\Delta}$ alors f est injective sur $\partial\Delta$: contradiction avec $\theta \in \mathcal{H}$.
2. $v \in \widehat{\Delta} \setminus \partial\Delta$: contradiction avec un thm de Fatou : $\partial\Delta \subset \omega(c)$ + classification des composantes Fatou/Sullivan.
3. $v \in \partial\Delta$.

Théorème (Herman)

Si P est un polynôme unicritique ($z^d + v$) et si Δ est un disque de Siegel de nombre de rotation dans $\mathcal{H}$ alors le point critique est au bord de Δ.

Mais on ne sait pas si la restriction f à $\partial\Delta$ est injective.

Preuve : Soit $\widehat{\Delta}$ le “rempli” de $\overline{\Delta}$. Soit c le point critique et v la valeur critique. 3 cas :

1. $v \notin \widehat{\Delta}$ alors f est injective sur $\partial\Delta$: contradiction avec $\theta \in \mathcal{H}$.
2. $v \in \widehat{\Delta} \setminus \partial\Delta$: contradiction avec un thm de Fatou : $\partial\Delta \subset \omega(c)$ + classification des composantes Fatou/Sullivan.
3. $v \in \partial\Delta$.

Théorème (C, R)

Si P est un polynôme ayant deux points critiques et si Δ est un disque de Siegel de nombre de rotation dans $\mathcal{H}$ alors au moins l'un des points critiques est au bord de Δ.

Preuve : Soit $\widetilde{\Delta}$ la composante connexe de $P^{-1}(\widehat{\Delta})$ qui contient $\widehat{\Delta}$. Soit n_0 le nombre de point critiques dans $\widetilde{\Delta}$. Si on prend un suffisamment petit voisinage simplement connexe U de $\widehat{\Delta}$ et V la composante connexe de $P^{-1}(\Delta)$ qui contient $\widetilde{\Delta}$ alors $P : V \to U$ est un revêtement ramifié possédant n_0 points critiques. 3 cas :

1. $n_0 = 0$: alors P est injective sur $\partial\Delta$.
2. $n_0 = 2$: on conclut comme dans le cas unicritique, mais avec le théorème de Mañé : il existe un point critique c *récurrent* tel que $\partial\Delta \subset \omega(c)$.
3. $n_0 = 1$: le cas nouveau.

Cas $n_0 = 1$. La preuve va consister en :

- Supposer par l'absurde qu'il n'y a pas de point critique au bord de Δ.
- (A) Démontrer que $\widetilde{\Delta} = \widehat{\Delta}$, c'est à dire $\widehat{\Delta}$ est localement totalement invariant.
- Conjuguer P par la représentation conforme du complémentaire de $\widehat{\Delta}$ vers le complémentaire de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\mathbb{C}$.
- Obtenir par réflexion de Schwarz un revêtement analytique localement difféo de S^1 dans S^1 : ϕ.
- (B) Utiliser un autre théorème de Mañé pour démontrer que ϕ est expansif.
- Ce qui signifie que P est une application à allûre polynomiale, au voisinage de $\widehat{\Delta}$.
- On est donc ramené au cas unicritique, déja résolu, donnant une contradiction.

Les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ sont des composantes de Fatou. Ces composantes sont préperiodiques. Le lemme de séparation de Kiwi, Poirier, Goldberg-Milnor implique que ces composantes finissent par tomber dans Δ.

Le revêtement ramifié $P : V \to U$ est équivalent à $z \mapsto z^d$ avec $d > 1$.

Rappelons qu'on suppose par l'absurde qu'il n'y a pas de point critique au bord de Δ. Donc v n'y est pas non plus (cf ci-dessus). Donc v est dans une composante cachée par $\overline{\Delta}$.
Cette composante a ses itérées également cachées, et finit par tomber dans Δ. Juste avant, elle est une composante de $P^{(-1)}(\Delta)$: *$\overline{\Delta}$ cache une composante de $P^{(-1)}(\Delta)$*.
Par symétrie (le groupe d'automorphismes du revêtement) et avec un peu de topologie si $d \geq 3$, on en conclut que toutes les composantes de $V \cap P^{(-1)}(\Delta)$ se cachent les unes les autres (lacs de Wada).